

TD. B13

Déterminants

Exercices de cours

① Vérifier la formule $\det AB = \det A \det B$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

② Calculer les déterminants suivants en utilisant :

- des opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes,
- un développement par rapport à une colonne,
- un développement par rapport à une ligne,
- la règle de Sarrus.

$$d_1 = \begin{vmatrix} -14 & 0 & 13 \\ 4 & 0 & -5 \\ 3 & 0 & 11 \end{vmatrix} \quad d_2 = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

$$d_3 = \begin{vmatrix} 12 & 1 & -8 \\ 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad d_4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$d_5 = \begin{vmatrix} 2 & -34 & 1 \\ 0 & 15 & 27 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} \quad d_6 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix}$$

$$d_7 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 8 & 15 \\ 3 & 7 & 15 & 30 \end{vmatrix} \quad d_8 = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

③ Dans \mathcal{S}_3 on note $\tau = (1\ 2)$ et $\sigma = (1\ 2\ 3)$.

- a. Calculer $\tau\sigma, \sigma\tau, \sigma^2$.
- b. Vérifier que tous les éléments de \mathcal{S}_3 sont ainsi obtenus.
- c. Vérifier que $\tau_1 = (1\ 2)$ et $\tau_2 = (2\ 3)$ permettent aussi d'obtenir tous les éléments de \mathcal{S}_3 .

④ On note :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 6 & 1 & 4 & 2 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 2 & 8 & 5 & 6 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Calculer $\tau\sigma$, puis les signatures de σ , τ et $\tau\sigma$.

⑤ Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

- a. Soit τ une transposition de \mathcal{S}_n . Démontrer que l'application $\sigma \mapsto \tau\sigma$ réalise une bijection de \mathcal{S}_n .
- b. En déduire que \mathcal{S}_n possède autant de permutations de signature 1 que de permutations de signature -1 .
Vérifier ceci avec \mathcal{S}_3 et \mathcal{S}_4 .

⑥ Soit $u_1 = (2, 1)$, $u_2 = (1, -2)$ et :

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (5x + 2y, 2x + 2y)$$

- a. Démontrer que la famille $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ est une base de \mathbb{R}^2 .
- b. Donner la matrice de f dans la base canonique de \mathbb{R}^2 , puis dans la base \mathcal{B} .
- c. Calculer de deux façons différentes le déterminant de f . Justifier que f est un isomorphisme.
- d. Démontrer que $f \circ f = 7f - 6\text{Id}_E$.

⑦ Soit p un projecteur de E de rang r , et s la symétrie de E associée à p .

Calculer les déterminants de p et de s en fonction de r .

⑧ Soit $\vec{u} = (-2, 0, 1)$ et $\vec{v} = (0, -2, 1)$ deux vecteurs de l'espace. Donner une équation du plan \mathcal{P} passant par l'origine dirigé par \vec{u} et \vec{v} .

⑨ Résoudre les systèmes suivants, où a est un réel fixé.

- a.
$$\begin{cases} 13x + 42y = 4 \\ 7x + 20y = 10 \end{cases}$$
- b.
$$\begin{cases} (a^2 - 1)x - 2ay = -2 \\ 2ax + (a^2 - 1)y = a^3 + 3a \end{cases}$$
- c.
$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a^2 \\ x - 2y + az = -a - 1 \end{cases}$$

Travaux dirigés

① Soit p et q deux entiers tels que $1 < q < p$, et a_1, \dots, a_p des entiers distincts.

- a. Calculer $(a_1 \dots a_q)(a_q \dots a_p)$.
Vérifier la concordance avec la signature.
- b. Calculer $(a_1 a_2)(a_2 a_3) \dots (a_{p-1} a_p)$.
- c. Simplifier $\sigma = (1\ 2\ 3)(1\ 4\ 5)(2\ 6)$ grâce au a.

② Soit $n \geq 2$.

- a. Soit a et b deux entiers naturels. Démontrer que la transposition $(a\ b)$ s'écrit comme produit de transpositions de la forme $(i\ i+1)$.
- b. En déduire que tous les éléments de \mathcal{S}_n sont obtenus par produits des transpositions $(1\ 2), (2\ 3), \dots, (n-1\ n)$.

3 Soit $n \geq 2$, puis $\sigma = (1\ 2\ \dots\ n)$ et $\tau = (1\ 2)$.

- a. Calculer $\sigma^{n-1}\tau\sigma^2$.
- b. Démontrer par récurrence que tous les éléments de \mathcal{S}_n peuvent être obtenus par produits unique-ment de τ et σ .

4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note \mathcal{A}_n l'ensemble des éléments de \mathcal{S}_n de signature 1.

- a. Démontrer que \mathcal{A}_n est un sous-groupe de \mathcal{S}_n .
- b. On suppose que $n \geq 4$. Démontrer que $(1\ 2)(3\ 4)$ est un produit de deux 3-cycles.
- c. Démontrer que tout élément de \mathcal{A}_n se décompose en produit de 3-cycles.

5 Soit n entier naturel non-nul.

- a. Soit $\sigma = (a_1\ \dots\ a_p)$ et ρ deux éléments de \mathcal{S}_n .
Démontrer que $\rho\sigma\rho^{-1} = (\rho(a_1)\ \dots\ \rho(a_p))$.
- b. On suppose que $n \geq 5$. Démontrer que si $\sigma = (a\ b\ c)$ alors il existe une permutation ρ de signature 1 telle que $\rho\sigma\rho^{-1} = (1\ 2\ 3)$.

6 Soit $u_1 = (10, 1)$, $u_2 = (1, 10)$ et :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \longmapsto \frac{1}{9}(10x - 55y, 46x - 10y)$$

Démontrer que la famille $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ est une base de \mathbb{R}^2 et donner la matrice de f dans cette base. L'application f est-elle un isomorphisme ?

7 Calculer les déterminants suivants.

$$d_1 = \begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \quad d_2 = \begin{vmatrix} 20 & 35 \\ 6 & 42 \end{vmatrix} \quad d_3 = \begin{vmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{vmatrix} \quad d_4 = \begin{vmatrix} 5 - \sqrt{11} & \sqrt{14} \\ \sqrt{14} & 5 + \sqrt{11} \end{vmatrix}$$

$$d_5 = \begin{vmatrix} 863 & 43 \\ 21 & 1 \end{vmatrix} \quad d_6 = \begin{vmatrix} 77 & 23 \\ 23 & 77 \end{vmatrix} \quad d_7 = \begin{vmatrix} 1 & 81 \\ 81 & 6401 \end{vmatrix} \quad d_8 = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & -\lambda \\ \lambda & \lambda + 6 \end{vmatrix}$$

$$d_9 = \begin{vmatrix} -17 & 21 \\ 43 & -54 \end{vmatrix} \quad d_{10} = \begin{vmatrix} \pi^2 + \pi & \pi - 1 \\ \pi^2 - 1 & \pi + 2 \end{vmatrix} \quad d_{11} = \begin{vmatrix} a^2 - 2a & a^2 + a - 7 \\ a^2 + 3 & a^2 + 3a + 2 \end{vmatrix}$$

8 Calculer les déterminants suivants.

$$d_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \lambda \\ \lambda & 0 & 1 \\ 1 & \lambda & 0 \end{vmatrix} \quad d_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & a & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} \quad d_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \\ 3 & 9 & 28 \end{vmatrix} \quad d_4 = \begin{vmatrix} 24 & -21 & 13 \\ -11 & 16 & -9 \\ 23 & -19 & 12 \end{vmatrix}$$

$$d_5 = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 7 \\ 8 & 1 & 9 \\ 4 & 5 & 5 \end{vmatrix} \quad d_6 = \begin{vmatrix} 27 & 28 & 29 \\ 28 & 30 & 32 \\ 29 & 32 & 36 \end{vmatrix} \quad d_7 = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda^2 - 3 & 2 \\ 3 & 4\lambda & \lambda \\ 2 & 2\lambda + 1 & 1 \end{vmatrix} \quad d_8 = \begin{vmatrix} 1 & \cos \theta & \cos 2\theta \\ \cos \theta & \cos 2\theta & \cos 3\theta \\ \cos 2\theta & \cos 3\theta & \cos 4\theta \end{vmatrix}$$

$$d_9 = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ b & 1 & a \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix} \quad d_{10} = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 5 & 3 & -4 \\ -4 & 5 & 3 \end{vmatrix} \quad d_{11} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & c & b \\ 2b + 2c & a & a \end{vmatrix} \quad d_{12} = \begin{vmatrix} a - 2b & 2a - b & a - b \\ a - 2b & 3a - 4b & 2a - 3b \\ 2a - b & a - 2b & 2a - 2b \end{vmatrix}$$

9 Calculer les déterminants suivants.

$$d_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad d_3 = \begin{vmatrix} 1 & i & -1 & -i \\ i & 1 & i & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & i & 1 \end{vmatrix}$$

$$d_4 = \begin{vmatrix} 0! & 1! & 2! & 3! \\ 1! & 2! & 3! & 4! \\ 2! & 3! & 4! & 5! \\ 3! & 4! & 5! & 6! \end{vmatrix} \quad d_5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a & a \\ 1 & a & a^2 & a^2 \\ 1 & a & a^2 & a^3 \end{vmatrix} \quad d_6 = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 2 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$d_7 = \begin{vmatrix} a & a+b & a+b & a+b \\ a-b & a & a+b & a+b \\ a-b & a-b & a & a+b \\ a-b & a-b & a-b & a \end{vmatrix} \quad d_8 = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & d \\ -1 & x & 0 & c \\ 0 & -1 & x & b \\ 0 & 0 & -1 & x+a \end{vmatrix} \quad d_9 = \begin{vmatrix} a & b & c & b \\ b & a & b & c \\ c & b & a & b \\ b & c & b & a \end{vmatrix}$$

10 Les familles suivantes sont-elles des bases de E ? On discutera éventuellement suivant les valeurs des paramètres.

- a. $E = \mathbb{R}^2$
 $u_1 = (\lambda + 3, 3\lambda + 1)$ $u_2 = (2\lambda + 3, 5\lambda + 4)$
- b. $E = \mathbb{R}^3$ $u_1 = (4 - \lambda, 2, 5)$
 $u_2 = (1, 2 - \lambda, -4)$ $u_3 = (1, 2, -4 - \lambda)$
- c. $E = \mathbb{R}_1[X]$ $P_1 = 32X + 47$ $P_2 = 23X + 34$
- d. $E = \mathbb{R}_2[X]$ $P_1 = 4X^2 + 3X - 1$
 $P_2 = 2X^2 - 2X + 3$ $P_3 = 3X^2 + 2X - 4$
- e. $E = \mathbb{R}_2[X]$ $P_1 = (X - \alpha)(X - \beta)$
 $P_2 = (X - \alpha)(X - \gamma)$ $P_3 = (X - \beta)(X - \gamma)$

11 Soit a et b deux scalaires, et :

$$M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

- a. Justifier que la matrice M n'est pas inversible si $a = b$.
- b. Existe-t-il d'autres cas où la matrice M n'est pas inversible?

12 Démontrer qu'une matrice antisymétrique de taille (n, n) avec n impair n'est jamais inversible.

13 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ on définit le déterminant de taille (n, n) suivant.

$$d_n = \begin{vmatrix} 2 \cos \theta & 1 & & 0 \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & 2 \cos \theta & 1 \\ 0 & & & 1 & \cos \theta \end{vmatrix}$$

Exprimer d_{n+2} en fonction de d_{n+1} et de d_n , et en déduire une formule générale pour d_n .

14 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et a, b deux scalaires. On note d_n le déterminant de taille $(2n, 2n)$ suivant.

$$d_n = \begin{vmatrix} a & 0 & b \\ & \ddots & \\ 0 & \ddots & 0 \\ b & \ddots & 0 & \ddots & a \end{vmatrix}$$

- a. Exprimer d_n en fonction de d_{n-1} .
- b. En déduire la valeur de d_n .

15 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de scalaires. On note $V_n(a_0, \dots, a_n)$ le déterminant de la matrice :

$$\begin{pmatrix} a_0^0 & \dots & a_n^0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_0^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}$$

On convient que $a_k^0 = 1$ même si $a_k = 0$.

- a. Soit $P = V_n(a_0, \dots, a_{n-1}, X)$. Démontrer que P est un polynôme de degré au plus n en X , et que $a_0 \dots a_{n-1}$ en sont racines.
- b. En déduire que :

$$P(X) = V_{n-1}(a_0, \dots, a_{n-1}) \prod_{k=0}^{n-1} (X - a_k)$$

On isolera le cas où les a_k ne sont pas tous distincts.

c. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$V_n(a_0, \dots, a_n) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

16 Soit n un entier strictement positif, et

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

- a. Déterminer le rang de A_n en fonction de n .
- b. Calculer le déterminant de A_n .
- c. Soit $B_n = A_n - I_n$. En considérant l'application linéaire canoniquement associée à B_n , déterminer B_n^n .
- d. Dans le cas où A_n est inversible, démontrer que son inverse est une combinaison linéaire des B_n^k .

17 Soit A une matrice carrée

a. Démontrer que si A est inversible alors :

$$\begin{aligned} \text{Com}({}^t A) &= {}^t \text{Com}(A) \\ \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \text{Com}(\lambda A) &= \lambda^{n-1} \text{Com}(A) \\ \text{Com}(A^{-1}) &= (\text{Com}(A))^{-1} \end{aligned}$$

b. Démontrer que les deux premiers résultats restent vrais si A n'est pas inversible.

18 Soit A une matrice inversible.

Déterminer toutes les matrices M telles que :

$$\text{Com}(M) = A$$

19 Soit A une matrice de taille (n, n) .

- a. Quel est le rang de $\text{Com}(A)$ si A est de rang n ?
- b. Démontrer que si A est de rang inférieur ou égal à $n - 2$ alors $\text{Com}(A)$ est nulle.
- c. On suppose que A est de rang $n - 1$. Démontrer que $\text{im } {}^t \text{Com}(A) \subset \ker A$ et en déduire le rang de $\text{Com}(A)$.
- d. Démontrer que $\text{Com}(\text{Com}(A)) = \lambda A$, où λ est un scalaire à déterminer.

20 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- a. Justifier que $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ est un anneau.
- b. Démontrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ alors $\det A \in \mathbb{Z}$.
- c. Justifier que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ alors $\text{Com}(A) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.
- d. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

Démontrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ tel que $AB = I_n$ si et seulement si $\det(A) = \pm 1$.

En déduire que les éléments inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ sont les matrices de déterminants ± 1 .