Feuille de T. D. B13
Espaces vectoriels euclidiens

Exercices de cours

1 Pour tous $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$ de $\mathbb{R}^2$ on pose :

$$(u \mid v) = 5xx' + xy' + x'y + yy'$$

Démontrer que cette application est un produit scalaire.

2 Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ des réels distincts fixés. Démontrer que l'application :

$$\varphi : (P, Q) \mapsto \sum_{k=0}^{n} P(\alpha_k) Q(\alpha_k)$$

est un produit scalaire.

3 Soit u et v deux vecteurs de E tels que :

$$||u + v|| = 5 \qquad \text{et} \qquad ||u - v|| = 1$$

Ces vecteurs peuvent-ils être orthogonaux ?

4 Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Démontrer que :

$$F^\perp \cap G^\perp = (F + G)^\perp \quad \text{et} \quad F^\perp + G^\perp \subseteq (F \cap G)^\perp$$

5 Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel et :

$$u_1 = \tfrac{1}{3}(2, 2, 1) \quad u_2 = \tfrac{1}{3}(-2, 1, 2) \quad u_3 = \tfrac{1}{3}(1, -2, 2)$$

a. Démontrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est orthonormée, et en déduire que c'est une base orthonormée de E.

b. Donner les coordonnées du vecteur $(3, 1, 1)$ dans cette base.

6 Orthonormaliser la base (u_1, u_2) de $\mathbb{R}^2$, où

$$u_1 = (1, 1) \qquad \text{et} \qquad u_2 = (1, 2)$$

7 Orthonormaliser la base (u_1, u_2, u_3) de $\mathbb{R}^3$ où :

$$u_1 = (1, 1, -1) \quad u_2 = (1, -1, 1) \quad u_3 = (-1, 1, 1)$$

8 Démontrer que l'inclusion de l'exercice 4 est une égalité si E est euclidien.

9 (Suite de l'exercice 6) Soit $F = \text{Vect}\,(u_1)$.

a. Calculer la matrice dans la base canonique du projecteur orthogonal sur F.

b. Quelle est la distance de $v = (13, 3)$ à F ?

10 (Suite de l'exercice 7) Soit $F = \text{Vect}\,(u_1, u_2)$.

a. Calculer la matrice dans la base canonique du projecteur orthogonal sur F.

b. En déduire la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale de E par rapport à F.

11 Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur le segment $[0, 1]$. On munit E du produit scalaire :

$$\forall (f, g) \in E^2 \qquad (f \mid g) = \int_0^1 f(x) g(x)\, dx$$

Pour tout $k = 0, 1, 2$ on pose $g_k(x) = x^k$. Enfin on note $F = \text{Vect}\,(g_0, g_1, g_2)$.

a. Orthonormaliser la base (g_0, g_1, g_2) de F.

b. Calculer le projeté orthogonal de la fonction exponentielle sur F, et la distance de cette fonction à F.

Travaux dirigés

1 Dans $E = \mathbb{R}^2$ on note $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$. Les applications φ suivantes sont-elles des produits scalaires ?

a. $\varphi(u, v) = xx' - 2yy'$

b. $\varphi(u, v) = xy' - x'y$

c. $\varphi(u, v) = xx' - 2xy' - 2x'y + 6yy'$

d. $\varphi(u, v) = xx' - 4xy' - 4x'y + yy'$

2 Démontrer que les applications suivantes sont des produits scalaires de E.

a. $E = \mathscr{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$

$$\varphi(f, g) = f(0) g(0) + \int_0^1 f'(t) g'(t)\, dt$$

b. $E = \mathbb{R}_n[X]$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(\alpha) Q^{(k)}(\alpha)$$

c. $E = \mathscr{M}_{np}(\mathbb{R})$

$$\varphi(A, B) = \text{tr}({}^t\!AB)$$

Donner une expression de ce dernier en fonction des coordonnées de A et B.

3 Soit $E = \mathbb{R}^2$. Pour tout $(x, y) \in E$ on pose :

$$N(x, y) = \sqrt{x^2 + xy + y^2}$$

a. Démontrer que N est une norme euclidienne sur E, c'est-à-dire qu'elle provient d'un produit scalaire.

b. Donner une base orthonormée de E pour ce produit scalaire.

4 Soit u et v deux vecteurs d'un espace préhilbertien réel E. Démontrer que si $||u|| \leqslant 1$ et $||v|| \leqslant 1$ alors :

$$\forall \lambda \in [0, 1] \qquad ||\lambda u + (1 - \lambda) v|| \leqslant 1$$

Interpréter géométriquement ce résultat.

5 Soit E un espace préhilbertien réel, et u, v deux vecteurs de E.

Démontrer que u et v sont orthogonaux si et seulement si :

$$\forall\lambda \in \mathbb{R} \qquad ||u|| \leqslant ||u+\lambda v||$$

6 Soit E un espace préhilbertien réel.

Soit $(e_1,\dots,e_p)$ une famille de vecteurs unitaires de E telle que :

$$\forall u \in E \qquad ||u||^2 = \sum_{i=1}^{p} (\,u\,|\,e_i)^2$$

Démontrer que la famille $(e_1,\dots,e_p)$ est une base orthonormée de E.

7 Soit E un espace euclidien, et soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Démontrer que si F et G sont orthogonaux alors $F = G^\perp$ et $G = F^\perp$.

8 Soit E un espace préhilbertien réel et v un vecteur non-nul de E. Décrire l'application :

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow E \\ u &\longmapsto \frac{(\,u\,|\,v)}{||v||^2} v \end{aligned}$$

9 Soit E un espace vectoriel euclidien, et f un endomorphisme de E vérifiant :

$$\forall u \in E \qquad (\,u\,|\,f(u)) = 0$$

a. Démontrer que :

$$\forall (u,v) \in E^2 \qquad (\,u\,|\,f(v)) = -\,(\,f(u)\,|\,v)$$

b. Démontrer que $\ker f$ et $\operatorname{im} f$ sont supplémentaires orthogonaux.

10 Soit E un espace préhilbertien réel, et p un projecteur de E. Démontrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si :

$$\forall u \in E \qquad ||p(u)|| \leqslant ||u||$$

On pourra utiliser un vecteur $v + \lambda w$.

11 Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel et :

$$u_1 = (0,1,1) \quad u_2 = (1,0,1) \quad u_3 = (1,1,0)$$

a. Démontrer que la famille (u_1,u_2,u_3) est une base de E et orthonormaliser celle-ci.

b. Donner les coordonnées du vecteur $(1,2,3)$ dans cette base.

12 Soit E l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel, et p le projecteur orthogonal de E sur F, plan vectoriel d'équation $x-2y+z=0$.

a. Donner la matrice de p dans la base canonique de E.

b. Quelle est la distance du point de coordonnées $(2,1,2)$ au plan F ?

13 Soit E l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire usuel. On souhaite déterminer le projecteur de E sur :

$$F = \{\,(x,y,z,t) \in E \mid\ 2x - 8y + 3z + 2t = 0\}$$

a. Donner une base orthonormée de $F^\perp$.

b. Soit q le projecteur orthogonal sur $F^\perp$. Exprimer $q(u)$ en fonction de u et de la base de la question précédente.

c. En déduire la matrice de q, puis celle du projecteur orthogonal de E sur F dans la base canonique.

14 Soit E l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel. Donner la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à la droite engendrée par le vecteur $u_0 = (9,2,6)$.

15 Soit E un espace vectoriel euclidien et f un endomorphisme de E.

On dit que f est une *isométrie vectorielle* si pour tout $u \in E$: $||f(u)|| = ||u||$.

On dit que f est *orthogonal* si pour tout $(u,v) \in E^2$: $(\,f(u)\,|\,f(v)) = (\,u\,|\,v)$.

a. Démontrer que f est une isométrie vectorielle si et seulement si f est orthogonal, et que dans ce cas f est un automorphisme.

b. Démontrer qu'un endomorphisme orthogonal est une symétrie si et seulement si :

$$\forall (u,v) \in E^2 \qquad (\,f(u)\,|\,v) = (\,u\,|\,f(v))$$

Démontrer qu'alors f est une symétrie orthogonale.

c. On suppose que f est un endomorphisme orthogonal, et on note A sa matrice dans une base orthonormée de E. Démontrer que si f est une symétrie alors A est symétrique.

16 Soit $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire :

$$\forall (f,g) \in E^2 \qquad (\,f\,|\,g) = \int_0^1 fg$$

On note F le sous-espace vectoriel de E contenant les fonctions nulles en 0.

a. Justifier que F est un sous-espace vectoriel de E et déterminer son orthogonal.

On pourra utiliser la fonction $u(t) = tf(t)$.

b. A-t-on $F^{\perp\perp} = F$? $\quad E = F \oplus F^\perp$?

17 Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire :

$$\forall (A,B) \in E^2 \qquad (\,A\,|\,B) = \operatorname{tr}({}^tAB)$$

a. Démontrer que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux.

b. Donner une base orthonormée de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

c. Pour toute matrice A de E, calculer le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

18 Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire de l'exercice précédent.

Soit F l'ensemble des matrices de E de traces nulles.

a. Justifier que F est un hyperplan de E et en donner un supplémentaire orthogonal.

b. Pour toute matrice A de E, Déterminer la distance de A à F.

19 Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a. Déterminer l'ensemble F des points fixes de A, en donner une base orthonormée $\mathscr{F}$.

b. Compléter la famille $\mathscr{F}$ en une base orthonormée $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

c. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.

d. Vérifier que $F^\perp$ est stable par f. Décrire la restriction de f à $F^\perp$, puis décrire l'application f géométriquement.

20 Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n. On note $E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$.

a. Quelle est la dimension de E^* ?

b. Démontrer que pour tout $v \in E$, l'application $\varphi_v : u \mapsto (u \,|\, v)$ appartient à E^*.

c. Démontrer que l'application $\Phi : v \mapsto \varphi_v$ est linéaire.

d. Démontrer que pour toute forme linéaire $\varphi : E \to \mathbb{R}$ il existe un et un seul vecteur $v \in E$ tel que :

$$\forall u \in E \quad \varphi(u) = (u \,|\, v)$$

21 Soit $E = \mathbb{R}^3$.

a. Justifier que pour tout couple (u, v) de vecteurs de E il existe un et un seul vecteur x de E tel que :

$$\forall w \in E \qquad (x \,|\, w) = \det(u, v, w)$$

Le vecteur x est appelé *produit vectoriel* de u et v, et il est noté $u \wedge v$. Il vérifie :

$$\forall w \in E \qquad (u \wedge v \,|\, w) = \det(u, v, w)$$

b. Démontrer que l'application $(u, v) \mapsto u \wedge v$ est bilinéaire alternée.

c. Démontrer que le vecteur $u \wedge v$ est orthogonal à u et à v.

d. Soit $u = (x_1, y_1, z_1)$ et $v = (x_2, y_2, z_2)$. Expliciter les coordonnées de $u \wedge v$ en utilisant un développement par rapport à la troisième colonne.

FIGURE 1 – Approximation de l'exponentielle sur $[0, 1]$ par une courbe du second degré