# Chapitre B13 Espaces vectoriels euclidiens

Tous les espaces vectoriels de ce chapitre sont des espaces vectoriels  $r\acute{e}els$ , c'est-à-dire des espaces vectoriels sur  $\mathbb{R}$ .

# I. Produit scalaire

## A. Définitions

**Définition.** Soit E un espace vectoriel réel. Un <u>produit scalaire</u> sur E est une forme bilinéaire symétrique définie positive, i.e., une application

$$\varphi: E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(u, v) \longmapsto (u \mid v)$$

vérifiant les propriétés :

•  $\varphi$  est bilinéaire :  $\forall (u, u', v, v') \in E^4 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ 

$$(\lambda u + u' | v) = \lambda (u | v) + (u' | v)$$
  
$$(u | \lambda v + v') = \lambda (u | v) + (u | v')$$

- $\varphi$  est symétrique :  $\forall (u, v) \in E^2$   $(u \mid v) = (v \mid u)$
- $\varphi$  est <u>définie positive</u> :  $\forall u \in E$   $(u \mid u) \geqslant 0$  et

$$(u \mid u) = 0_{\mathbb{R}} \quad \Longleftrightarrow \quad u = 0_E$$

**Notation.** On note le produit scalaire  $(u \mid v)$  ou  $\langle u, v \rangle$  ou  $u \cdot v$ .

**Exemple 1.** Le *produit scalaire usuel* sur  $\mathbb{R}^n$  est défini pour tous  $u=(x_1,\ldots,x_n)$  et  $y=(y_1,\ldots,y_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  par :

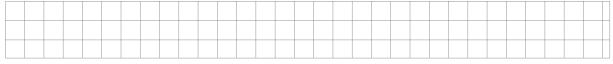
$$(u \mid v) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

C'est la généralisation en dimension n des produits scalaires classiques sur  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$ .

**Exemple 2.** Un autre produit scalaire sur  $\mathbb{R}^3$ :

$$\forall u = (x, y, z) \quad \forall v = (x', y', z') \qquad (u \mid v) = xx' + 2yy' + 7zz'$$

**Exemple 3.** Produit scalaire sur l'espace vectoriel  $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$  (avec a < b) :



 $\triangleright$  Exercices 1, 2.

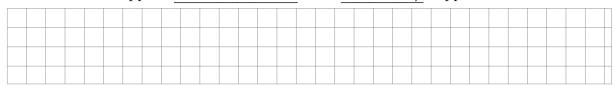
#### Définitions.

- (i) Un espace préhilbertien est un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire  $\varphi$ .
- (ii) Un espace euclidien est un espace vectoriel réel E de dimension finie muni d'un produit scalaire  $\varphi$ .

## B. Norme

**Notation.** Dans tout ce qui suit  $(E,\varphi)$  désigne un espace préhilbertien réel, et on note  $(u \mid v) = \varphi(u,v)$ .

**Définition.** On appelle norme euclidienne de E associée a  $\varphi$  l'application :



**Remarque.** On sait que (u | u) est positif pour tout  $u \in E$  car le produit scalaire est défini positif, donc la norme de u est bien définie.

**Notation.** On note  $||u|| = N(u) = \sqrt{(u \mid u)}$ .

**Exemple.** Pour tout  $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  on pose :

$$N(u) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Alors N est la norme associée au produit scalaire usuel sur  $\mathbb{R}^2$ .

**Exemple 1 (suite).** Pour tout  $u = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$  on pose :

$$N(u) = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

Alors N est la norme associée au produit scalaire usuel sur  $\mathbb{R}^n$ .

**Exemple 4.** Soit  $E = \mathbb{R}$ . L'application  $(x, y) \mapsto xy$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}$ .

La norme associée à ce produit scalaire est l'application  $x \mapsto \sqrt{x^2} = |x|$ .

Ainsi la valeur absolue est une norme euclidienne sur R.

**Définition.** Un vecteur u de E est dit unitaire si ||u|| = 1.

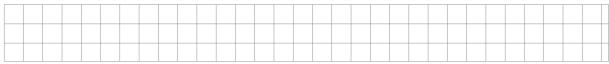
**Exemple 5.** Soit u un vecteur non-nul de E. Alors  $\frac{1}{||u||}$  est un réel. Le vecteur  $\frac{u}{||u||} = \frac{1}{||u||} \cdot u$  est unitaire.

Théorème (Inégalité de Cauchy-Schwarz). Soit E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire. Alors :



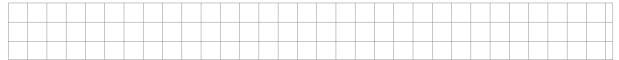
L'égalité a lieu si et seulement si u et v sont colinéaires.

Remarque. Cette inégalité équivaut à :



# Corollaire (Inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales).

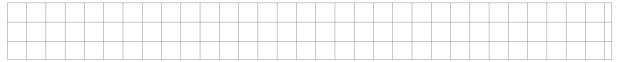
Pour toutes fonctions f et g continues sur [a,b] (avec a < b):



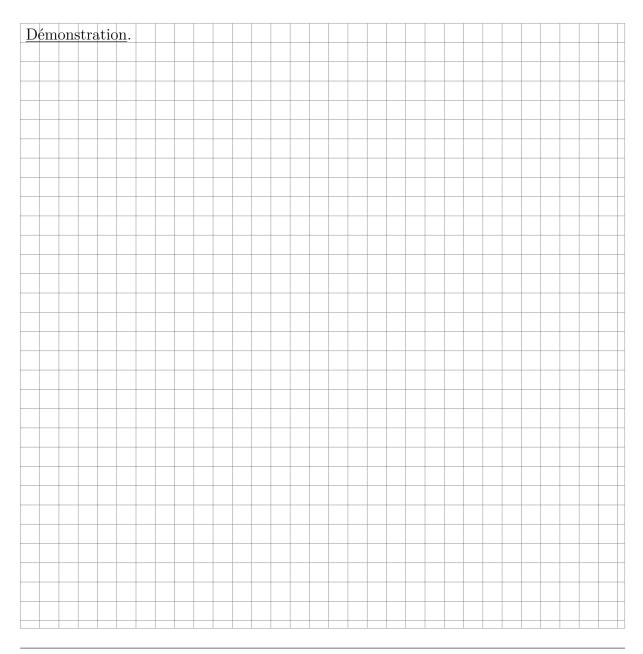
L'égalité a lieu si et seulement si f et g sont proportionnelles.

# Corollaire (Inégalité de Cauchy-Schwarz pour les réels).

Soit  $x = (x_1, \dots, x_n)$  et  $y = (y_1, \dots, y_n)$  deux n-uplets de réels. Alors :



L'égalité a lieu si et seulement si x et y sont proportionnels.



**Proposition.** Soit  $u \mapsto ||u||$  une norme euclidienne sur E. Alors

- $\forall u \in E \quad ||u|| \geqslant 0$
- $\forall u \in E \quad (||u|| = 0 \iff u = 0) \quad (Séparation)$
- $\forall u \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad ||\lambda u|| = |\lambda| \, ||u|| \quad (Homog\acute{e}n\acute{e}it\acute{e})$
- ∀(u, v) ∈ E² ||u + v|| ≤ ||u|| + ||v|| (Inégalité triangulaire)
   L'égalité a lieu si et seulement si u et v sont colinéaires de même sens, i.e., u = 0<sub>E</sub> ou il existe λ réel positif tel que v = λu.

**Remarque.** Une application  $N: E \to \mathbb{R}$  vérifiant les quatre propriétés ci-dessus est appelée <u>norme</u> de E. Toutes les normes ne sont pas euclidiennes (*i.e.*, ne proviennent pas d'un produit scalaire).

<u>Démonstration</u>. On rappelle que  $||u|| = \sqrt{(u|u)}$ . Ceci justifie la première propriété. La séparation et l'homogénéité sont conséquences du fait que le produit scalaire est défini positif et bilinéaire.

Il reste à démontrer l'inégalité triangulaire et son cas d'égalité.

Soit u et v deux vecteurs de E. On calcule :

$$||u+v||^2 = (u+v|u+v) = ||u||^2 + ||v||^2 + 2(u|v)$$
 et 
$$(||u|| + ||v||)^2 = ||u||^2 + ||v||^2 + 2||u||.||v||$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$||u+v||^2 \le (||u||+||v||)^2$$

On en déduit l'inégalité triangulaire, car une norme est toujours positive.

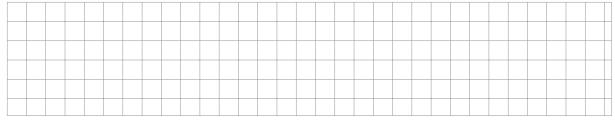
De plus, d'après le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'égalité ||u+v|| = ||u|| + ||v|| a lieu si et seulement si u et v sont colinéaires et  $(u \mid v) \ge 0$ .

Supposons que u est non-nul et colinéaire à v. Alors  $v = \lambda u$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ , ce qui donne  $(u \mid v) = \lambda ||u||^2$ . Donc  $(u \mid v) \geqslant 0$  si et seulement si  $\lambda$  est positif.

Si u est nul alors l'inégalité triangulaire est une égalité.

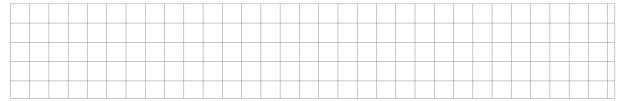
Finalement le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire a lieu si et seulement si u et v sont colinéaires de même sens.

**Propositions.** Pour tous vecteurs u et v de E:



**Remarque.** Grâce à l'identité de polarisation, lorsque l'on connaît une norme euclidienne sur E, on peut retrouver le produit scalaire auquel elle est associée.

**Remarque.** Autres formules, valables pour tous vecteurs u et v de E:



#### > Exercice 3.

**Exemple 6.** Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini.

Une variable aléatoire Z est centrée si E(Z) = 0.

Par exemple si X est une variable aléatoire alors Z = X - E(X) est centrée.

L'ensemble des variables aléatoires réelles centrées sur  $\Omega$  est un espace vectoriel.

La covariance Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) est un produit scalaire sur cet espace vectoriel.

La norme associée est l'écart-type.

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :  $|Cov(X,Y)| \leq \sigma(X)\sigma(Y)$ 

Ceci montre que le coefficient de corrélation linéaire appartient à l'intervalle [-1, 1].

# II. Orthogonalité

On désigne toujours par E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire  $\varphi$ , et on note  $(u \mid v) = \varphi(u, v)$ .

## A. Vecteurs et sous-espaces orthogonaux

**Définition.** On dit que deux vecteurs u et v de E sont <u>orthogonaux</u> si leur produit scalaire est nul :  $(u \mid v) = 0$ .

**Exemple 7.** Soit  $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ , muni du produit scalaire  $(f \mid g) = \int_0^1 fg$ . Alors les fonctions  $f: t \mapsto 1$  et  $g: t \mapsto t - \frac{1}{2}$  sont orthogonales.

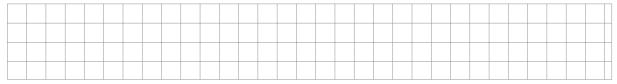
Ce n'est pas en lien avec l'orthogonalité de leurs courbes représentatives.

**Définition.** Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont dits orthogonaux si :

$$\forall (u, v) \in F \times G \qquad (u \mid v) = 0$$

**Remarque.** Dans ce cas  $F \cap G = \{0_E\}$ , *i.e.*, F et G sont en somme directe. En effet, si  $u \in F \cap G$  alors u est élément de F et de G, donc comme F et G sont orthogonaux alors  $(u \mid u) = 0$ , puis u = 0.

**Définition.** Soit F une partie de E. On appelle <u>orthogonal</u> de F et on note  $F^{\perp}$  l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à tous les vecteurs de F:



**Remarque.** F et  $F^{\perp}$  sont orthogonaux, et donc  $F \cap F^{\perp} \subseteq \{0_E\}$ .

**Exemple 8.**  $E^{\perp} = \{0_E\}$  et  $\{0_E\}^{\perp} = E$ .

# Propositions.

(i) Pour toute partie F de E:  $F \subseteq (F^{\perp})^{\perp}$ 

(ii) Pour toutes parties F et G de E : Si  $F \subseteq G$  alors  $G^{\perp} \subseteq F^{\perp}$ 

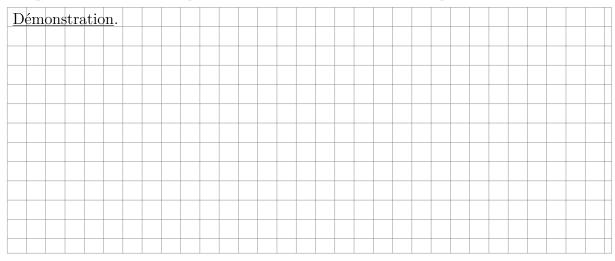
(iii) Pour toute partie F de E:  $(\operatorname{Vect} F)^{\perp} = F^{\perp}$ .



**Remarque.** Soit F un sous-espace vectoriel de E et  $\mathcal{B}$  une base de F. Alors la dernière proposition montre que  $F^{\perp} = \mathcal{B}^{\perp}$ , donc :

 $Un\ vecteur\ est\ orthogonal\ \grave{a}\ F\ si\ et\ seulement\ s'il\ est\ orthogonal\ \grave{a}\ une\ base\ de\ F.$ 

**Proposition.** Soit F une partie de E. Alors  $F^{\perp}$  est un sous-espace vectoriel de E.



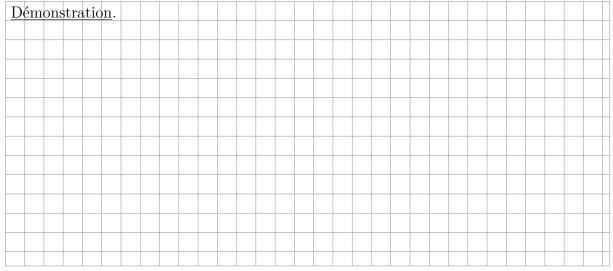
## Exercice 4.

## B. Familles orthogonales

**Définition.** Une famille  $(e_1, \ldots, e_n)$  d'éléments de E est dite <u>orthogonale</u> si tous ses éléments sont orthogonaux deux-à-deux :

$$\forall (i, j) \in \{1 ... n\}^2 \text{ avec } i \neq j \qquad (e_i | e_j) = 0$$

**Proposition.** Une famille orthogonale ne contenant pas le vecteur nul est libre.



**Théorème de Pythagore.**  $Si\ (e_1,\ldots,e_n)$  est une famille orthogonale de vecteurs de E alors :

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} e_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} ||e_i||^2$$

**Exemple 9.** Pour deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  orthogonaux de  $\mathbb{R}^2$  on retrouve le théorème de Pythagore classique :

$$||\vec{u} + \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2$$

<u>Démonstration</u>. En utilisant la bilinéarité du produit scalaire et le fait que la famille  $(e_i)_i$  est orthogonale on obtient :

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} e_i \right\|^2 = \left( \sum_{i=1}^{n} e_i \, \left| \, \sum_{j=1}^{n} e_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (e_i \, | \, e_j) = \sum_{i=1}^{n} (e_i \, | \, e_i) = \sum_{i=1}^{n} ||e_i||^2 \right)$$

**Définition.** Une famille  $(e_1, \ldots, e_n)$  est dite <u>orthonormée</u> si elle est orthogonale et si tous ses vecteurs sont unitaires : :

$$\forall (i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2$$
  $(e_i | e_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$ 

**Remarque.** On note: 
$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

et on appelle <u>symbole</u> de Kronecker cette fonction. Par exemple la matrice identité est la matrice dont <u>le coefficient</u> (i, j) est le symbole de Kronecker  $\delta_{ij}$ .

# III. Espaces vectoriels euclidiens

Rappel. Un espace euclidien est un espace vectoriel

- (i) réel
- (ii) de dimension finie
- (iii) muni d'un produit scalaire, que nous noterons  $(u \mid v)$ .

On note  $n = \dim E$ .

## A. Bases orthonormées

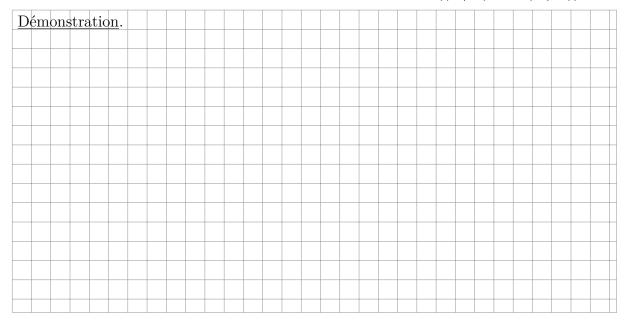
**Proposition.** Une famille orthonormée de n vecteurs est une base de E.

<u>Démonstration</u>. En effet, les vecteurs de cette famille sont non-nuls car ils sont de norme 1, il forment donc une famille orthogonale de vecteurs non-nuls. Par propriété cette famille est libre, donc elle est libre maximale, et ainsi elle forme une base de E.

**Théorème.** Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de E. Alors pour tout u de E:

$$u = \sum_{i=1}^{n} (u \mid e_i) e_i$$

En d'autres termes, les coordonnées de u dans la base  $\mathscr{B}$  sont  $((u \mid e_1), \ldots, (u \mid e_n))$ .



#### $\triangleright$ Exercice 5.

**Proposition.** Soit u et v deux vecteurs de E, de coordonnées respectives  $(x_1, \ldots, x_n)$  et  $(y_1, \ldots, y_n)$  dans une base orthonormée de E. Alors :

$$(u | v) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$
 et  $||u|| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$ 

Remarque. Ainsi on applique les mêmes formules qu'avec le produit scalaire usuel, pourvu que les coordonnées soient exprimées dans une base orthonormée.

<u>Démonstration</u>. Soit  $(e_1, \ldots, e_n)$  une base orthonormée de E dans laquelle u et v admettent pour coordonnées respectives  $(x_1, \ldots, x_n)$  et  $(y_1, \ldots, y_n)$ .

Alors  $u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$  et  $v = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$ . La bilinéarité du produit scalaire donne :

$$(u | v) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \middle| \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j (e_i | e_j)$$

Comme la famille  $(e_1, \ldots, e_n)$  est une base orthonormée alors

$$\forall (i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2 \qquad (e_i \mid e_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Ceci montre que 
$$(u | v) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i (e_i | e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Si u = v alors  $||u||^2 = (u | u)$ , donc la seconde propriété découle de la première.

#### B. Orthonormalisation

Remarque. Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt est nommé ainsi en l'honneur de Jørgen Gram, Danemark, 1850 – 1916 et Erhard Schmidt, Allemagne, 1876 – 1959, mais il était déjà connu au XVIIIème siècle.

C'est un algorithme permettant d'obtenir une base orthonormée à partir d'une base.

**Exemple 10.** On munit  $E = \mathbb{R}^3$  de son produit scalaire usuel, et on définit :

$$u_1 = (1, 1, 1)$$
  $u_2 = (1, 2, 0)$   $u_3 = (2, 0, 3)$ 

La famille  $(u_1, u_2, u_3)$  est une base car son déterminant est non-nul.

On orthonormalise cette base de la façon suivante :

Étape 1. On construit une base orthogonale  $(v_1, v_2, v_3)$  en posant :

$$v_1 = u_1$$

$$v_2 = u_2 + \lambda v_1$$

$$v_3 = u_3 + \alpha v_1 + \beta v_2$$

où  $\lambda$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  sont des scalaires, choisis de façon à ce que la famille  $(v_1, v_2, v_3)$  soit orthogonale.

Pour ceci on pose  $(v_1 | v_2) = 0$ , puis  $(v_1 | v_3) = (v_2 | v_3) = 0$ . En utilisant la linéarité à droite du produit scalaire on obtient  $\lambda = -1$ , puis  $\alpha = -\frac{5}{3}$  et  $\beta = \frac{3}{2}$ .

On a maintenant une base orthogonale  $(v_1, v_2, v_3)$  avec :

$$v_1 = (1, 1, 1)$$
  $v_2 = (0, 1, -1)$   $v_3 = \frac{1}{6}(2, -1, -1)$ 

Étape 2. On normalise cette base en posant:

$$\forall i = 1, 2, 3$$
  $\varepsilon_i = \frac{v_i}{||v_i||}$ 

On obtient: 
$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$$
  $\varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1)$   $\varepsilon_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, -1, -1)$ 

La famille  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$  est une base orthonormée.

#### $\triangleright$ Exercices 6, 7.

**Théorème.** Soit  $(u_1, \ldots, u_p)$  une famille libre d'éléments de E. Alors il existe une famille orthonormée  $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$  d'éléments de E telle que pour tout  $k = 1 \ldots p$ :

$$\operatorname{Vect}(u_1,\ldots,u_k) = \operatorname{Vect}(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k)$$

<u>Démonstration</u>. L'hypothèse implique que  $p \leq n$ , puisqu'une famille libre d'un espace vectoriel de dimension n a au plus n éléments.

Pour tout  $k = 1 \dots p$  on pose  $F_k = \text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$ .

On démontre le théorème par récurrence finie sur  $m \in \{1, ..., p\}$ .

L'initialisation est obtenue en posant :  $\varepsilon_1 = \frac{u_1}{||u_1||}$ 

Supposons que la propriété est établie au rang m-1, pour un certain  $m \in \{2, \ldots, p\}$ . L'hypothèse de récurrence donne une famille orthonormée  $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{m-1})$  d'éléments de E telle que pour tout  $k = 1 \ldots m-1$ :

$$\operatorname{Vect}(u_1,\ldots,u_k) = \operatorname{Vect}(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k)$$

On note:

$$v_m = u_m + \sum_{k=1}^{m-1} \alpha_k \varepsilon_k \tag{1}$$

où les  $\alpha_1 \dots \alpha_{m-1}$  sont des réels.

La famille  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$  est orthogonale si et seulement si  $(\varepsilon_j | v_m) = 0$  pour tout  $j = 1 \dots m - 1$ . Or:

$$\forall j = 1 \dots m - 1 \qquad (\varepsilon_j \mid v_m) = (\varepsilon_j \mid u_m) + \sum_{k=1}^{m-1} \alpha_k (\varepsilon_j \mid \varepsilon_k) = (\varepsilon_j \mid u_m) + \alpha_j$$

On pose donc:

$$\forall j = 1 \dots m - 1$$
  $\alpha_j = -(\varepsilon_j \mid u_m)$ 

Comme la famille  $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{m-1}$  est orthonormée alors :

$$\forall j = 1 \dots m - 1 \qquad (\varepsilon_j \mid v_m) = 0$$

Ainsi la famille  $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{m-1}, v_m)$  est orthogonale.

Le vecteur  $v_m$  ne peut être nul, sinon on aurait d'après (1)

$$u_m \in \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{m-1}) = F_{m-1}$$

et ceci donnerait une contradiction car  $F_{m-1}$  est l'espace vectoriel engendré par la famille  $u_1, \ldots, u_{m-1}$  et la famille  $(u_1, \ldots, u_m)$  est libre.

Ainsi  $v_m$  est non-nul. On pose  $\varepsilon_m = \frac{v_m}{||v_m||}$ . La famille  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$  est alors orthonormée.

Par construction  $v_m \in F_m$ , donc  $\text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m) \subseteq F_m$ . Les familles  $(u_1, \dots, u_m)$  et  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$  sont libres, donc par égalité de dimension :

Vect 
$$(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m) = F_m$$

Ceci montre que la propriété est héréditaire.

On a démontré le théorème par récurrence.

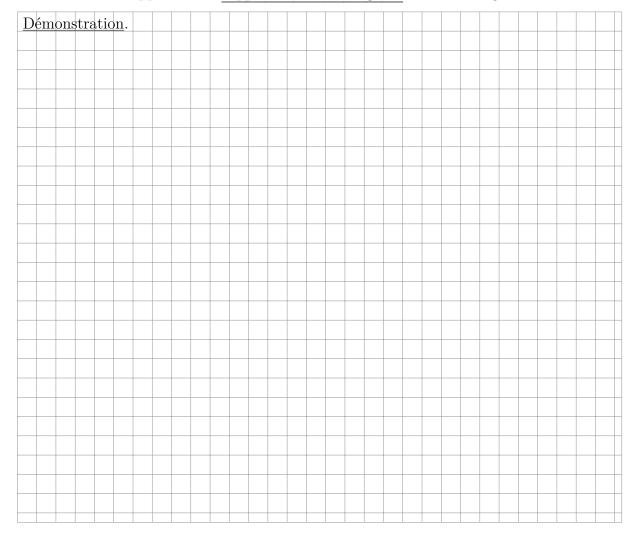
Corollaire. Tout espace euclidien possède des bases orthonormées.

<u>Démonstration</u>. En effet, on sait que tout espace vectoriel de dimension finie possède des bases. Il suffit donc d'en choisir une, et de l'orthonormaliser, i.e., d'appliquer le théorème précédent.

## C. Supplémentaire orthogonal

**Proposition.** Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien alors F et  $F^{\perp}$  sont supplémentaires.

**Définition.** On appelle alors supplémentaire orthogonal de F l'orthogonal de F.



Corollaire. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors :

(i) 
$$\dim F^{\perp} = n - \dim F$$
 (ii)  $(F^{\perp})^{\perp} = F$ 

<u>Démonstration</u>. La propriété (i) est immédiate car  $F \oplus F^{\perp} = E$ .

Pour la seconde, on sait que  $F \subseteq (F^{\perp})^{\perp}$ , même si E n'est pas de dimension finie.

Si E est de dimension finie n alors

$$\dim(F^{\perp})^{\perp} = n - \dim F^{\perp} = n - (n - \dim F) = \dim F$$

donc par théorème :  $(F^{\perp})^{\perp} = F$ 

#### > Exercice 8.

## D. Projecteurs orthogonaux

**Définition.** Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien E. Le <u>projecteur orthogonal</u> de E sur F est le projecteur de E sur F parallèlement à  $F^{\perp}$ .

**Remarque.** Par définition, si u est un vecteur de E, alors u - p(u) est élément du noyau de p, donc u - p(u) est orthogonal à F.

**Proposition.** Soit  $(e_1, \ldots, e_m)$  une base orthonormée de F, et p le projecteur orthogonal de E sur F. Alors :

$$\forall u \in E$$
  $p(u) = \sum_{k=1}^{m} (u \mid e_k) e_k$ 

<u>Démonstration</u>. Soit  $v = \sum_{k=1}^{m} (u | e_k) e_k$ . Comme dans la démonstration précédente, on démontre que u - v est élément de  $F^{\perp}$ . Ceci donne u = v + (u - v) avec  $v \in F = \operatorname{im} p$  et  $u - v \in F^{\perp} = \ker p$ , donc v = p(u).

**Remarque.** Soit  $(e_1, \ldots, e_m)$  une base orthonormée de F, et  $(e_{m+1}, \ldots, e_n)$  est une base orthonormée de  $F^{\perp}$ .

D'après le théorème de la base adaptée  $(e_1, \ldots, e_n)$  est une base orthonormée de E. Donc :

$$\forall u \in E \qquad u = (u \mid e_1) e_1 + \dots + (u \mid e_n) e_n.$$

Par définition de p on retrouve :

$$\forall u \in E$$
  $p(u) = (u | e_1) e_1 + \dots + (u | e_m) e_m.$ 

**Théorème.** Soit F un sous-espace vectoriel de E et p le projecteur orthogonal de E sur F. Alors pour tout  $u \in F$ :

- $(i) ||p(u)|| \leqslant ||u||$
- (ii) p(u) est l'unique vecteur  $u_0$  de F tel que  $||u u_0|| = \underset{v \in F}{\min} ||u v||$ .

**Définition.** Soit F un sous-espace vectoriel de E, et u un élément de E. On appelle distance de u à F le réel :

$$d(u, F) = \min_{v \in F} ||u - v||$$

**Remarque.** Ainsi, la distance de u à F est la distance de u à p(u).

#### Démonstration.

(i) On sait que u - p(u) et p(u) sont orthogonaux. D'après le théorème de Pythagore :

$$||u||^2 = ||u - p(u)||^2 + ||p(u)||^2$$

Ceci implique

$$||p(u)||^2 \leqslant ||u||^2$$

et comme les normes sont positives alors  $||p(u)|| \leq ||u||$ .

(ii) Pour tout  $v \in F$ :

$$u - v = (u - p(u)) + (p(u) - v)$$
 avec 
$$\begin{cases} u - p(u) \in F^{\perp} \\ p(u) - v \in F \end{cases}$$

D'après le théorème de Pythagore :

$$||u - p(u)|| \leqslant ||u - v||$$

Cette égalité est stricte dès que  $v \neq p(u)$ .

Ceci montre que :

$$||u - p(u)|| \leqslant \inf_{v \in F} ||u - v||$$

Comme p(u) est l'un des éléments de F alors :

$$||u - p(u)|| = \min_{v \in F} ||u - v||$$

Nous avons vu que si v est un élément de F différent de p(u) alors :

$$||u - p(u)|| < ||u - v||$$

Ceci montre l'unicité de l'élément  $u_0$  de F vérifiant  $||u-u_0|| = \underset{v \in F}{\text{Min}} ||u-v||$ .

**Remarque.** Soit E est un espace vectoriel réel préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de dimension finie m. En d'autres termes on ne suppose plus que E est de dimension finie. Soit  $(e_1, \ldots, e_m)$  une base orthonormée de F et p l'application :

$$p: E \longrightarrow E$$

$$u \longmapsto \sum_{k=1}^{m} (u \mid e_k) e_k$$

Alors p est un projecteur de E et le théorème ci-dessus est toujours valable.

**Exemple 11.** Soit  $E = \mathbb{R}^3$ , muni du produit scalaire usuel. Soit  $u_1 = (1, 2, 2)$ . Soit p le projecteur orthogonal de E sur  $F = \text{Vect } (u_1)$ .

- a. Déterminer la matrice de p dans la base canonique.
- b. Calculer la distance de v = (6, 5, 4) à la droite vectorielle F.
- c. Soit q le projecteur orthogonal de E sur  $F^{\perp}$ . Déterminer la matrice Q de q dans la base canonique.

## Exercices 9, 10, 11.