Chapitre B13
Espaces vectoriels euclidiens

Tous les espaces vectoriels de ce chapitre sont des espaces vectoriels *réels*, c'est-à-dire des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

I. Produit scalaire

A. Définitions

Définition. Soit E un espace vectoriel réel. Un produit scalaire sur E est une forme bilinéaire symétrique définie positive, *i.e.,* une application

$$\begin{array}{rcl} \varphi : E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u, v) & \longmapsto & (u \,|\, v) \end{array}$$

vérifiant les propriétés :

- φ est bilinéaire : $\forall (u, u', v, v') \in E^4 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcl} (\lambda u + u' \,|\, v) & = & \lambda\,(u \,|\, v) + (u' \,|\, v) \\ (u \,|\, \lambda v + v') & = & \lambda\,(u \,|\, v) + (u \,|\, v') \end{array}$$

- φ est symétrique : $\forall (u, v) \in E^2 \qquad (u \,|\, v) = (v \,|\, u)$
- φ est définie positive : $\forall u \in E \qquad (u \,|\, u) \geqslant 0$ et

$$(u \,|\, u) = 0_{\mathbb{R}} \quad \Longleftrightarrow \quad u = 0_E$$

Notation. On note le produit scalaire $(u \,|\, v)$ ou $\langle u, v \rangle$ ou $u \cdot v$.

Exemple 1. Le *produit scalaire usuel* sur $\mathbb{R}^n$ est défini pour tous $u = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$ par :

$$(u \,|\, v) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

C'est la généralisation en dimension n des produits scalaires classiques sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

Exemple 2. Un autre produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$:

$$\forall u = (x, y, z) \quad \forall v = (x', y', z') \qquad (u \,|\, v) = xx' + 2yy' + 7zz'$$

Exemple 3. Produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$ (avec $a < b$) :

▷ **Exercices 1, 2.**

Définitions.

(i) Un espace préhilbertien est un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire φ.

(ii) Un espace euclidien est un espace vectoriel réel E de dimension finie muni d'un produit scalaire φ.

B. Norme

Notation. Dans tout ce qui suit (E, φ) désigne un espace préhilbertien réel, et on note $(u \,|\, v) = \varphi(u, v)$.

Définition. On appelle norme euclidienne de E associée a φ l'application :

Remarque. On sait que $(u \,|\, u)$ est positif pour tout $u \in E$ car le produit scalaire est défini positif, donc la norme de u est bien définie.

Notation. On note $||u|| = N(u) = \sqrt{(u \,|\, u)}$.

Exemple. Pour tout $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ on pose :

$$N(u) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Alors N est la norme associée au produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^2$.

Exemple 1 (suite). Pour tout $u = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ on pose :

$$N(u) = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

Alors N est la norme associée au produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$.

Exemple 4. Soit $E = \mathbb{R}$. L'application $(x, y) \mapsto xy$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}$.
La norme associée à ce produit scalaire est l'application $x \mapsto \sqrt{x^2} = |x|$.
Ainsi la valeur absolue est une norme euclidienne sur $\mathbb{R}$.

Définition. Un vecteur u de E est dit unitaire si $||u|| = 1$.

Exemple 5. Soit u un vecteur non-nul de E. Alors $\frac{1}{||u||}$ est un réel. Le vecteur $\frac{u}{||u||} = \frac{1}{||u||} \cdot u$ est unitaire.

Théorème (Inégalité de Cauchy-Schwarz). *Soit E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire. Alors :*

L'égalité a lieu si et seulement si u et v sont colinéaires.

Remarque. Cette inégalité équivaut à :

Corollaire (Inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales).
Pour toutes fonctions f et g continues sur $[a, b]$ (avec $a < b$) :

L'égalité a lieu si et seulement si f et g sont proportionnelles.

Corollaire (Inégalité de Cauchy-Schwarz pour les réels).
Soit $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ deux n-uplets de réels. Alors :

L'égalité a lieu si et seulement si x et y sont proportionnels.

Démonstration.

Proposition. *Soit $u \mapsto ||u||$ une norme euclidienne sur E. Alors*

- $\forall u \in E \quad ||u|| \geqslant 0$
- $\forall u \in E \quad (||u|| = 0 \iff u = 0)$ *(Séparation)*
- $\forall u \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad ||\lambda u|| = |\lambda|\,||u||$ *(Homogénéité)*
- $\forall (u, v) \in E^2 \quad ||u + v|| \leqslant ||u|| + ||v||$ *(Inégalité triangulaire)*

  L'égalité a lieu si et seulement si u et v sont colinéaires de même sens, i.e., $u = 0_E$ *ou il existe λ réel positif tel que $v = \lambda u$.*

Remarque. Une application $N : E \to \mathbb{R}$ vérifiant les quatre propriétés ci-dessus est appelée norme de E. Toutes les normes ne sont pas euclidiennes (*i.e.,* ne proviennent pas d'un produit scalaire).

Démonstration. On rappelle que $||u|| = \sqrt{(u \,|\, u)}$. Ceci justifie la première propriété. La séparation et l'homogénéité sont conséquences du fait que le produit scalaire est défini positif et bilinéaire.

Il reste à démontrer l'inégalité triangulaire et son cas d'égalité.

Soit u et v deux vecteurs de E. On calcule :

$$\begin{aligned} ||u+v||^2 &= (u+v \,|\, u+v) &&= ||u||^2 + ||v||^2 + 2\,(u \,|\, v) \\ \text{et} \qquad (||u|| + ||v||)^2 &= ||u||^2 + ||v||^2 + 2||u||.||v|| \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$||u+v||^2 \leqslant (||u|| + ||v||)^2$$

On en déduit l'inégalité triangulaire, car une norme est toujours positive.

De plus, d'après le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'égalité $||u+v|| = ||u|| + ||v||$ a lieu si et seulement si u et v sont colinéaires et $(u \,|\, v) \geqslant 0$.

Supposons que u est non-nul et colinéaire à v. Alors $v = \lambda u$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, ce qui donne $(u \,|\, v) = \lambda ||u||^2$. Donc $(u \,|\, v) \geqslant 0$ si et seulement si λ est positif.

Si u est nul alors l'inégalité triangulaire est une égalité.

Finalement le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire a lieu si et seulement si u et v sont colinéaires de même sens. □

Propositions. *Pour tous vecteurs u et v de E :*

Remarque. Grâce à l'identité de polarisation, lorsque l'on connaît une norme euclidienne sur E, on peut retrouver le produit scalaire auquel elle est associée.

Remarque. Autres formules, valables pour tous vecteurs u et v de E :

▷ **Exercice 3.**

Exemple 6. Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini.

Une variable aléatoire Z est *centrée* si $E(Z) = 0$.

Par exemple si X est une variable aléatoire alors $Z = X - E(X)$ est centrée.

L'ensemble des variables aléatoires réelles centrées sur Ω est un espace vectoriel.

La *covariance* $\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ est un produit scalaire sur cet espace vectoriel.

La norme associée est l'écart-type.

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $|\mathrm{Cov}(X, Y)| \leqslant \sigma(X)\sigma(Y)$

Ceci montre que le coefficient de corrélation linéaire appartient à l'intervalle $[-1, 1]$.

II. Orthogonalité

On désigne toujours par E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire φ, et on note $(u \mid v) = \varphi(u, v)$.

A. Vecteurs et sous-espaces orthogonaux

Définition. On dit que deux vecteurs u et v de E sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul : $(u \mid v) = 0$.

Exemple 7. Soit $E = \mathscr{C}([0, 1], \mathbb{R})$, muni du produit scalaire $(f \mid g) = \displaystyle\int_0^1 fg$. Alors les fonctions $f : t \mapsto 1$ et $g : t \mapsto t - \frac{1}{2}$ sont orthogonales.

Ce n'est pas en lien avec l'orthogonalité de leurs courbes représentatives.

Définition. Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont dits orthogonaux si :

$$\forall (u, v) \in F \times G \qquad (u \mid v) = 0$$

Remarque. Dans ce cas $F \cap G = \{0_E\}$, *i.e.,* F et G sont en somme directe. En effet, si $u \in F \cap G$ alors u est élément de F et de G, donc comme F et G sont orthogonaux alors $(u \mid u) = 0$, puis $u = 0$.

Définition. Soit F une partie de E. On appelle orthogonal de F et on note $F^\perp$ l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à tous les vecteurs de F :

Remarque. F et $F^\perp$ sont orthogonaux, et donc $F \cap F^\perp \subseteq \{0_E\}$.

Exemple 8. $E^\perp = \{0_E\}$ et $\{0_E\}^\perp = E$.

Propositions.

(i) Pour toute partie F de E : $F \subseteq (F^\perp)^\perp$

(ii) Pour toutes parties F et G de E : *Si* $F \subseteq G$ *alors* $G^\perp \subseteq F^\perp$

(iii) Pour toute partie F de E : $(\operatorname{Vect} F)^\perp = F^\perp$.

Démonstration.

Remarque. Soit F un sous-espace vectoriel de E et $\mathscr{B}$ une base de F. Alors la dernière proposition montre que $F^\perp = \mathscr{B}^\perp$, donc :

Un vecteur est orthogonal à F si et seulement s'il est orthogonal à une base de F.

Proposition. *Soit F une partie de E. Alors $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Démonstration.

▷ **Exercice 4.**

B. Familles orthogonales

Définition. Une famille $(e_1, \dots, e_n)$ d'éléments de E est dite orthogonale si tous ses éléments sont orthogonaux deux-à-deux :

$$\forall (i,j) \in \{1 \dots n\}^2 \text{ avec } i \neq j \qquad (e_i \,|\, e_j) = 0$$

Proposition. *Une famille orthogonale ne contenant pas le vecteur nul est libre.*

Démonstration.

Théorème de Pythagore. *Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille orthogonale de vecteurs de E alors :*

$$\left|\left|\sum_{i=1}^{n} e_i\right|\right|^2 = \sum_{i=1}^{n} ||e_i||^2$$

Exemple 9. Pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux de $\mathbb{R}^2$ on retrouve le théorème de Pythagore classique :

$$||\vec{u} + \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2$$

Démonstration. En utilisant la bilinéarité du produit scalaire et le fait que la famille $(e_i)_i$ est orthogonale on obtient :

$$\left|\left|\sum_{i=1}^{n} e_i\right|\right|^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} e_i \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} e_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (e_i \,|\, e_j) = \sum_{i=1}^{n} (e_i \,|\, e_i) = \sum_{i=1}^{n} ||e_i||^2 \qquad \square$$

Définition. Une famille $(e_1, \dots, e_n)$ est dite orthonormée si elle est orthogonale et si tous ses vecteurs sont unitaires : :

$$\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2 \qquad (e_i \,|\, e_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Remarque. On note :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

et on appelle symbole de Kronecker cette fonction. Par exemple la matrice identité est la matrice dont le coefficient (i,j) est le symbole de Kronecker δ_{ij}.

III. Espaces vectoriels euclidiens

Rappel. Un espace euclidien est un espace vectoriel

(i) réel

(ii) de dimension finie

(iii) muni d'un produit scalaire, que nous noterons $(u \mid v)$.

On note $n = \dim E$.

A. Bases orthonormées

Proposition. *Une famille orthonormée de n vecteurs est une base de E.*

Démonstration. En effet, les vecteurs de cette famille sont non-nuls car ils sont de norme 1, il forment donc une famille orthogonale de vecteurs non-nuls. Par propriété cette famille est libre, donc elle est libre maximale, et ainsi elle forme une base de E. □

Théorème. *Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. Alors pour tout u de E :*

$$u = \sum_{i=1}^{n} (u \mid e_i)\, e_i$$

En d'autres termes, les coordonnées de u dans la base $\mathscr{B}$ sont $((u \mid e_1), \ldots, (u \mid e_n))$.

Démonstration.

▷ **Exercice 5.**

Proposition. *Soit u et v deux vecteurs de E, de coordonnées respectives $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ dans une base orthonormée de E. Alors :*

$$(u \mid v) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \qquad \text{et} \qquad ||u|| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$

Remarque. Ainsi on applique les mêmes formules qu'avec le produit scalaire usuel, pourvu que les coordonnées soient exprimées dans une base orthonormée.

Démonstration. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E dans laquelle u et v admettent pour coordonnées respectives $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$.

Alors $u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $v = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$. La bilinéarité du produit scalaire donne :

$$(u \,|\, v) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \, (e_i \,|\, e_j)$$

Comme la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée alors

$$\forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2 \qquad (e_i \,|\, e_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Ceci montre que $(u \,|\, v) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \, (e_i \,|\, e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Si $u = v$ alors $||u||^2 = (u \,|\, u)$, donc la seconde propriété découle de la première. □

B. Orthonormalisation

Remarque. *Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt* est nommé ainsi en l'honneur de Jørgen Gram, Danemark, 1850 – 1916 et Erhard Schmidt, Allemagne, 1876 – 1959, mais il était déjà connu au XVIIIème siècle.

C'est un algorithme permettant d'obtenir une base orthonormée à partir d'une base.

Exemple 10. On munit $E = \mathbb{R}^3$ de son produit scalaire usuel, et on définit :

$$u_1 = (1,1,1) \qquad u_2 = (1,2,0) \qquad u_3 = (2,0,3)$$

La famille (u_1, u_2, u_3) est une base car son déterminant est non-nul.

On orthonormalise cette base de la façon suivante :

Étape 1. On construit une base *orthogonale* (v_1, v_2, v_3) en posant :

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 \\ v_2 &= u_2 + \lambda v_1 \\ v_3 &= u_3 + \alpha v_1 + \beta v_2 \end{aligned}$$

où λ, α et β sont des scalaires, choisis de façon à ce que la famille (v_1, v_2, v_3) soit orthogonale.

Pour ceci on pose $(v_1 \,|\, v_2) = 0$, puis $(v_1 \,|\, v_3) = (v_2 \,|\, v_3) = 0$. En utilisant la linéarité à droite du produit scalaire on obtient $\lambda = -1$, puis $\alpha = -\frac{5}{3}$ et $\beta = \frac{3}{2}$.

On a maintenant une base orthogonale (v_1, v_2, v_3) avec :

$$v_1 = (1,1,1) \qquad v_2 = (0,1,-1) \qquad v_3 = \frac{1}{6}(2,-1,-1)$$

Étape 2. On normalise cette base en posant :

$$\forall i = 1,2,3 \qquad \varepsilon_i = \frac{v_i}{||v_i||}$$

On obtient : $\varepsilon_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \qquad \varepsilon_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1) \qquad \varepsilon_3 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,-1)$

La famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base orthonormée.

▷ **Exercices 6, 7.**

Théorème. *Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille libre d'éléments de E. Alors il existe une famille orthonormée $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ d'éléments de E telle que pour tout $k = 1 \dots p$:*

$$\mathrm{Vect}\,(u_1, \dots, u_k) = \mathrm{Vect}\,(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$$

Démonstration. L'hypothèse implique que $p \leqslant n$, puisqu'une famille libre d'un espace vectoriel de dimension n a au plus n éléments.

Pour tout $k = 1 \dots p$ on pose $F_k = \mathrm{Vect}\,(u_1, \dots, u_k)$.

On démontre le théorème par récurrence finie sur $m \in \{1, \dots, p\}$.

L'initialisation est obtenue en posant : $\varepsilon_1 = \frac{u_1}{||u_1||}$

Supposons que la propriété est établie au rang $m-1$, pour un certain $m \in \{2, \dots, p\}$. L'hypothèse de récurrence donne une famille orthonormée $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{m-1})$ d'éléments de E telle que pour tout $k = 1 \dots m-1$:

$$\mathrm{Vect}\,(u_1, \dots, u_k) = \mathrm{Vect}\,(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$$

On note :

$$v_m = u_m + \sum_{k=1}^{m-1} \alpha_k \varepsilon_k \tag{1}$$

où les $\alpha_1 \dots \alpha_{m-1}$ sont des réels.

La famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$ est orthogonale si et seulement si $(\varepsilon_j \,|\, v_m) = 0$ pour tout $j = 1 \dots m-1$. Or :

$$\forall j = 1 \dots m-1 \qquad (\varepsilon_j \,|\, v_m) = (\varepsilon_j \,|\, u_m) + \sum_{k=1}^{m-1} \alpha_k \,(\varepsilon_j \,|\, \varepsilon_k) = (\varepsilon_j \,|\, u_m) + \alpha_j$$

On pose donc :

$$\forall j = 1 \dots m-1 \qquad \alpha_j = -\,(\varepsilon_j \,|\, u_m)$$

Comme la famille $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{m-1}$ est orthonormée alors :

$$\forall j = 1 \dots m-1 \qquad (\varepsilon_j \,|\, v_m) = 0$$

Ainsi la famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{m-1}, v_m)$ est orthogonale.

Le vecteur v_m ne peut être nul, sinon on aurait d'après (1)

$$u_m \in \mathrm{Vect}\,(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{m-1}) = F_{m-1}$$

et ceci donnerait une contradiction car F_{m-1} est l'espace vectoriel engendré par la famille $u_1, \dots, u_{m-1}$ et la famille $(u_1, \dots, u_m)$ est libre.

Ainsi v_m est non-nul. On pose $\varepsilon_m = \frac{v_m}{||v_m||}$. La famille $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$ est alors orthonormée.

Par construction $v_m \in F_m$, donc $\text{Vect}\,(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m) \subseteq F_m$. Les familles $(u_1, \ldots, u_m)$ et $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$ sont libres, donc par égalité de dimension :

$$\text{Vect}\,(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m) = F_m$$

Ceci montre que la propriété est héréditaire.

On a démontré le théorème par récurrence. □

Corollaire. *Tout espace euclidien possède des bases orthonormées.*

Démonstration. En effet, on sait que tout espace vectoriel de dimension finie possède des bases. Il suffit donc d'en choisir une, et de l'orthonormaliser, *i.e.,* d'appliquer le théorème précédent. □

C. Supplémentaire orthogonal

Proposition. *Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien alors F et $F^\perp$ sont supplémentaires.*

Définition. On appelle alors supplémentaire orthogonal de F l'orthogonal de F.

Démonstration.

Corollaire. *Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors :*

(i) $\dim F^\perp = n - \dim F$ *(ii)* $(F^\perp)^\perp = F$

Démonstration. La propriété *(i)* est immédiate car $F \oplus F^\perp = E$.

Pour la seconde, on sait que $F \subseteq (F^\perp)^\perp$, même si E n'est pas de dimension finie.

Si E est de dimension finie n alors

$$\dim(F^\perp)^\perp = n - \dim F^\perp = n - (n - \dim F) = \dim F$$

donc par théorème : $(F^\perp)^\perp = F$ □

▷ **Exercice 8.**

D. Projecteurs orthogonaux

Définition. Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien E. Le projecteur orthogonal de E sur F est le projecteur de E sur F parallèlement à $F^\perp$.

Remarque. Par définition, si u est un vecteur de E, alors $u - p(u)$ est élément du noyau de p, donc $u - p(u)$ est orthogonal à F.

Proposition. *Soit $(e_1, \dots, e_m)$ une base orthonormée de F, et p le projecteur orthogonal de E sur F. Alors :*

$$\forall u \in E \qquad p(u) = \sum_{k=1}^{m} (u \mid e_k)\, e_k$$

Démonstration. Soit $v = \sum_{k=1}^{m} (u \mid e_k)\, e_k$. Comme dans la démonstration précédente, on démontre que $u - v$ est élément de $F^\perp$. Ceci donne $u = v + (u - v)$ avec $v \in F = \operatorname{im} p$ et $u - v \in F^\perp = \ker p$, donc $v = p(u)$. □

Remarque. Soit $(e_1, \dots, e_m)$ une base orthonormée de F, et $(e_{m+1}, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de $F^\perp$.

D'après le théorème de la base adaptée $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E. Donc :

$$\forall u \in E \qquad u = (u \mid e_1)\, e_1 + \cdots\cdots\cdots + (u \mid e_n)\, e_n.$$

Par définition de p on retrouve :

$$\forall u \in E \qquad p(u) = (u \mid e_1)\, e_1 + \cdots + (u \mid e_m)\, e_m.$$

Théorème. *Soit F un sous-espace vectoriel de E et p le projecteur orthogonal de E sur F. Alors pour tout $u \in F$:*

(i) $||p(u)|| \leqslant ||u||$

(ii) $p(u)$ *est l'unique vecteur* u_0 *de* F *tel que* $||u - u_0|| = \operatorname*{Min}_{v \in F} ||u - v||$.

Définition. Soit F un sous-espace vectoriel de E, et u un élément de E. On appelle distance de u à F le réel :

$$d(u, F) = \operatorname*{Min}_{v \in F} ||u - v||$$

Remarque. Ainsi, la distance de u à F est la distance de u à $p(u)$.

Démonstration.

(i) On sait que $u - p(u)$ et $p(u)$ sont orthogonaux. D'après le théorème de Pythagore :

$$||u||^2 = ||u - p(u)||^2 + ||p(u)||^2$$

Ceci implique

$$||p(u)||^2 \leqslant ||u||^2$$

et comme les normes sont positives alors $||p(u)|| \leqslant ||u||$.

(ii) Pour tout $v \in F$:

$$u - v = (u - p(u)) + (p(u) - v) \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} u - p(u) \in F^\perp \\ p(u) - v \in F \end{cases}$$

D'après le théorème de Pythagore :

$$||u - p(u)|| \leqslant ||u - v||$$

Cette égalité est stricte dès que $v \neq p(u)$.

Ceci montre que :

$$||u - p(u)|| \leqslant \operatorname*{Inf}_{v \in F} ||u - v||$$

Comme $p(u)$ est l'un des éléments de F alors :

$$||u - p(u)|| = \operatorname*{Min}_{v \in F} ||u - v||$$

Nous avons vu que si v est un élément de F différent de $p(u)$ alors :

$$||u - p(u)|| < ||u - v||$$

Ceci montre l'unicité de l'élément u_0 de F vérifiant $||u - u_0|| = \operatorname*{Min}_{v \in F} ||u - v||$. □

Remarque. Soit E est un espace vectoriel réel préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de dimension finie m. En d'autres termes on ne suppose plus que E est de dimension finie. Soit $(e_1, \ldots, e_m)$ une base orthonormée de F et p l'application :

$$\begin{aligned} p : E &\longrightarrow E \\ u &\longmapsto \sum_{k=1}^{m} (u \mid e_k)\, e_k \end{aligned}$$

Alors p est un projecteur de E et le théorème ci-dessus est toujours valable.

Exemple 11. Soit $E = \mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire usuel. Soit $u_1 = (1, 2, 2)$. Soit p le projecteur orthogonal de E sur $F = \text{Vect}\,(u_1)$.

a. Déterminer la matrice de p dans la base canonique.
b. Calculer la distance de $v = (6, 5, 4)$ à la droite vectorielle F.
c. Soit q le projecteur orthogonal de E sur $F^\perp$. Déterminer la matrice Q de q dans la base canonique.

▷ **Exercices 9, 10, 11.**