Feuille de T. D. B12
Déterminants

Exercices de cours

(1) Vérifier la formule $\det AB = \det A \det B$ avec :
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) Calculer les déterminants suivants en utilisant une ou plusieurs méthodes parmi :
- des opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes,
- un développement par rapport à une colonne,
- un développement par rapport à une ligne,
- la règle de Sarrus.

$$d_1 = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & 6 \end{vmatrix} \qquad d_2 = \begin{vmatrix} -14 & 0 & 13 \\ 4 & 0 & -5 \\ 3 & 0 & 11 \end{vmatrix}$$
$$d_3 = \begin{vmatrix} 12 & 1 & -8 \\ 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad d_4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$
$$d_5 = \begin{vmatrix} 2 & -34 & 1 \\ 0 & 15 & 27 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} \qquad d_6 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix}$$

(3) Dans $\mathscr{S}_3$ on note $\tau = (1\ 2)$ et $\sigma = (1\ 2\ 3)$.

a. Calculer $\tau\sigma$, $\sigma\tau$, σ^2.

b. Vérifier que tous les éléments de $\mathscr{S}_3$ sont ainsi obtenus.

c. Vérifier que $\tau_1 = (1\ 2)$ et $\tau_2 = (2\ 3)$ permettent aussi d'obtenir tous les éléments de $\mathscr{S}_3$.

(4) On note :
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 6 & 1 & 4 & 2 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 2 & 8 & 5 & 6 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$
Calculer $\tau\sigma$, puis les signatures de σ, τ et $\tau\sigma$.

(5) Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

a. Soit τ une transposition de $\mathscr{S}_n$. Démontrer que l'application $\sigma \mapsto \tau\sigma$ réalise une bijection de $\mathscr{S}_n$.

b. En déduire que $\mathscr{S}_n$ possède autant de permutations de signature 1 que de permutations de signature -1.
Vérifier ceci avec $\mathscr{S}_3$ et $\mathscr{S}_4$.

(6) Soit $u_1 = (2, 1)$, $u_2 = (1, -2)$ et :
$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (5x + 2y, 2x + 2y) \end{array}$$

a. Démontrer que la famille $\mathscr{B} = (u_1, u_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

b. Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, puis dans la base $\mathscr{B}$.

c. Calculer de deux façons différentes le déterminant de f. Justifier que f est un isomorphisme.

d. Démontrer que $f \circ f = 7f - 6\mathrm{Id}_E$.

(7) Soit p un projecteur de E de rang r, et s la symétrie de E associée à p.
Calculer les déterminants de p et de s en fonction de r.

(8) Soit $\vec{u} = (-2, 0, 1)$ et $\vec{v} = (0, -2, 1)$ deux vecteurs de l'espace. Donner une équation du plan $\mathscr{P}$ passant par l'origine dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

(9) Résoudre les systèmes

a. $\begin{cases} 13x + 42y = 4 \\ 7x + 20y = 10 \end{cases}$

b. $\begin{cases} (\lambda^2 - 1)x - 2\lambda y = -2 \\ 2\lambda x + (\lambda^2 - 1)y = \lambda^3 + 3\lambda \end{cases}$ avec λ réel fixé.

Travaux dirigés

$\boxed{1}$ Soit p et q deux entiers tels que $1 < q < p$, et $a_1, \ldots, a_p$ des entiers distincts.

a. Calculer $(a_1\ \ldots\ a_q)(a_q\ \ldots\ a_p)$.
Vérifier la concordance avec la signature.

b. Calculer $(a_1\ a_2)(a_2\ a_3)\ldots(a_{p-1}\ a_p)$.

c. Simplifier $\sigma = (1\ 2\ 3)(1\ 4\ 5)(2\ 6)$ grâce au a.

$\boxed{2}$ Soit $n \geqslant 2$.

a. Soit a et b deux entiers naturels. Démontrer que la transposition $(a\ b)$ s'écrit comme produit de transpositions de la forme $(i\ i+1)$.

b. En déduire que tous les éléments de $\mathscr{S}_n$ sont obtenus par produits des transpositions $(1\ 2)$, $(2\ 3)$, $\ldots$, $(n-1\ n)$.

$\boxed{3}$ Soit $n \geqslant 2$, puis $\sigma = (1\ 2\ \ldots\ n)$ et $\tau = (1\ 2)$.

a. Calculer $\sigma^{n-1}\tau\sigma^2$.

b. Démontrer par récurrence que tous les éléments de $\mathscr{S}_n$ peuvent être obtenus par produits uniquement de τ et σ.

4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathscr{A}_n$ l'ensemble des éléments de $\mathscr{S}_n$ de signature 1.

a. Démontrer que $\mathscr{A}_n$ est un sous-groupe de $\mathscr{S}_n$.

b. On suppose que $n \geqslant 4$. Démontrer que $(1\ 2)(3\ 4)$ est un produit de deux 3-cycles.

c. Démontrer que tout élément de $\mathscr{A}_n$ se décompose en produit de 3-cycles.

5 Soit n entier naturel non-nul.

a. Soit $\sigma = (a_1\ \dots\ a_p)$ et ρ deux éléments de $\mathscr{S}_n$. Démontrer que $\rho\sigma\rho^{-1} = (\rho(a_1)\ \dots\ \rho(a_p))$.

b. On suppose que $n \geqslant 5$. Démontrer que si $\sigma = (a\ b\ c)$ alors il existe une permutation ρ de signature 1 telle que $\rho\sigma\rho^{-1} = (1\ 2\ 3)$.

6 Soit $u_1 = (10,1)$, $u_2 = (1,10)$ et :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & \frac{1}{9}(10x-55y, 46x-10y) \end{array}$$

Démontrer que la famille $\mathscr{B} = (u_1, u_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et donner la matrice de f dans cette base. L'application f est-elle un isomorphisme ?

7 Les familles suivantes sont-elles des bases de E ? On discutera éventuellement suivant les valeurs des paramètres.

a. $E = \mathbb{R}^2$
$u_1 = (\lambda+3, 3\lambda+1) \quad u_2 = (2\lambda+3, 5\lambda+4)$

b. $E = \mathbb{R}^3 \quad u_1 = (4-\lambda, 2, 5)$
$u_2 = (1, 2-\lambda, -4) \quad u_3 = (1, 2, -4-\lambda)$

c. $E = \mathbb{R}_1[X] \quad P_1 = 32X + 47 \quad P_2 = 23X + 34$

d. $E = \mathbb{R}_2[X] \quad P_1 = 4X^2 + 3X - 1$
$P_2 = 2X^2 - 2X + 3 \quad P_3 = 3X^2 + 2X - 4$

e. $E = \mathbb{R}_2[X] \quad P_1 = (X-\alpha)(X-\beta)$
$P_2 = (X-\alpha)(X-\gamma) \quad P_3 = (X-\beta)(X-\gamma)$

8 Calculer les déterminants suivants.

$$d_1 = \begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \qquad d_2 = \begin{vmatrix} 20 & 35 \\ 6 & 42 \end{vmatrix} \qquad d_3 = \begin{vmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{vmatrix} \qquad d_4 = \begin{vmatrix} 5-\sqrt{11} & \sqrt{14} \\ \sqrt{14} & 5+\sqrt{11} \end{vmatrix}$$

$$d_5 = \begin{vmatrix} 863 & 43 \\ 21 & 1 \end{vmatrix} \qquad d_6 = \begin{vmatrix} 77 & 23 \\ 23 & 77 \end{vmatrix} \qquad d_7 = \begin{vmatrix} 1 & 81 \\ 81 & 6401 \end{vmatrix} \qquad d_8 = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -\lambda \\ \lambda & \lambda+6 \end{vmatrix}$$

$$d_9 = \begin{vmatrix} -17 & 21 \\ 43 & -54 \end{vmatrix} \qquad d_{10} = \begin{vmatrix} \pi^2+\pi & \pi-1 \\ \pi^2-1 & \pi+2 \end{vmatrix} \qquad d_{11} = \begin{vmatrix} a^2-2a & a^2+a-7 \\ a^2+3 & a^2+3a+2 \end{vmatrix}$$

9 Calculer les déterminants suivants.

$$d_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \lambda \\ \lambda & 0 & 1 \\ 1 & \lambda & 0 \end{vmatrix} \qquad d_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & a & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} \qquad d_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \\ 3 & 9 & 28 \end{vmatrix} \qquad d_4 = \begin{vmatrix} 24 & -21 & 13 \\ -11 & 16 & -9 \\ 23 & -19 & 12 \end{vmatrix}$$

$$d_5 = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 7 \\ 8 & 1 & 9 \\ 4 & 5 & 5 \end{vmatrix} \qquad d_6 = \begin{vmatrix} 27 & 28 & 29 \\ 28 & 30 & 32 \\ 29 & 32 & 36 \end{vmatrix} \qquad d_7 = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda^2-3 & 2 \\ 3 & 4\lambda & \lambda \\ 2 & 2\lambda+1 & 1 \end{vmatrix} \qquad d_8 = \begin{vmatrix} 1 & \cos\theta & \cos 2\theta \\ \cos\theta & \cos 2\theta & \cos 3\theta \\ \cos 2\theta & \cos 3\theta & \cos 4\theta \end{vmatrix}$$

$$d_9 = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ b & 1 & a \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix} \qquad d_{10} = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 5 & 3 & -4 \\ -4 & 5 & 3 \end{vmatrix} \qquad d_{11} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & c & b \\ 2b+2c & a & a \end{vmatrix} \qquad d_{12} = \begin{vmatrix} a-2b & 2a-b & a-b \\ a-2b & 3a-4b & 2a-3b \\ 2a-b & a-2b & 2a-2b \end{vmatrix}$$

10 Calculer les déterminants suivants.

$$d_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \qquad d_3 = \begin{vmatrix} 1 & i & -1 & -i \\ i & 1 & i & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & i & 1 \end{vmatrix}$$

$$d_4 = \begin{vmatrix} 0! & 1! & 2! & 3! \\ 1! & 2! & 3! & 4! \\ 2! & 3! & 4! & 5! \\ 3! & 4! & 5! & 6! \end{vmatrix} \qquad d_5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a & a \\ 1 & a & a^2 & a^2 \\ 1 & a & a^2 & a^3 \end{vmatrix} \qquad d_6 = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 2 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$d_7 = \begin{vmatrix} a & a+b & a+b & a+b \\ a-b & a & a+b & a+b \\ a-b & a-b & a & a+b \\ a-b & a-b & a-b & a \end{vmatrix} \qquad d_8 = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & d \\ -1 & x & 0 & c \\ 0 & -1 & x & b \\ 0 & 0 & -1 & x+a \end{vmatrix} \qquad d_9 = \begin{vmatrix} a & b & c & b \\ b & a & b & c \\ c & b & a & b \\ b & c & b & a \end{vmatrix}$$

11 Soit a et b deux scalaires, et :

$$M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

a. Justifier que la matrice M n'est pas inversible si $a = b$.

b. Existe-t-il d'autres cas où la matrice M n'est pas inversible ?

12 Démontrer qu'une matrice antisymétrique de taille (n, n) avec n impair n'est jamais inversible.

13 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ on définit le déterminant de taille (n, n) suivant.

$$d_n = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & & 1 & \cos\theta \end{vmatrix}$$

Exprimer d_{n+2} en fonction de d_{n+1} et de d_n, et en déduire une formule générale pour d_n.

14 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et a, b deux scalaires. On note d_n le déterminant de taille $(2n, 2n)$ suivant.

$$d_n = \begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & \ddots \quad \iddots & 0 \\ & \iddots \quad \ddots & \\ b & 0 & a \end{vmatrix}$$

a. Exprimer d_n en fonction de d_{n-1}.

b. En déduire la valeur de d_n.

15 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de scalaires. On note $V_n(a_0, \dots, a_n)$ le déterminant de la matrice :

$$\begin{pmatrix} a_0^0 & \dots & a_n^0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_0^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}$$

On convient que $a_k^0 = 1$ même si $a_k = 0$.

a. Soit $P = V_n(a_0, \dots, a_{n-1}, X)$. Démontrer que P est un polynôme de degré au plus n en X, et que $a_0 \dots a_{n-1}$ en sont racines.

b. En déduire que :

$$P(X) = V_{n-1}(a_0, \dots, a_{n-1}) \prod_{k=0}^{n-1} (X - a_k)$$

On isolera le cas où les a_k ne sont pas tous distincts.

c. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$V_n(a_0, \dots, a_n) = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$$

16 Soit n un entier strictement positif, et

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

a. Déterminer le rang de A_n en fonction de n.

b. Calculer le déterminant de A_n.

c. Soit $B_n = A_n - I_n$. En considérant l'application linéaire canoniquement associée à B_n, déterminer B_n^n.

d. Dans le cas où A_n est inversible, démontrer que son inverse est une combinaison linéaire des B_n^k.

17 Soit A une matrice carrée

a. Démontrer que si A est inversible alors :

$$\begin{aligned} & \mathrm{Com}({}^tA) &&= {}^t\mathrm{Com}(A) \\ \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad & \mathrm{Com}(\lambda A) &&= \lambda^{n-1}\,\mathrm{Com}(A) \\ & \mathrm{Com}\left(A^{-1}\right) &&= (\mathrm{Com}(A))^{-1} \end{aligned}$$

b. Démontrer que les deux premiers résultats restent vrais si A n'est pas inversible.

18 Soit A une matrice inversible.

Déterminer toutes les matrices M telles que :

$$\mathrm{Com}(M) = A$$

19 Soit A une matrice de taille (n, n).

a. Quel est le rang de $\mathrm{Com}(A)$ si A est de rang n ?

b. Démontrer que si A est de rang inférieur ou égal à $n-2$ alors $\mathrm{Com}(A)$ est nulle.

c. On suppose que A est de rang $n-1$. Démontrer que $\mathrm{im}\,{}^t\mathrm{Com}(A) \subset \ker A$ et en déduire le rang de $\mathrm{Com}(A)$.

d. Démontrer que $\mathrm{Com}(\mathrm{Com}(A)) = \lambda A$, où λ est un scalaire à déterminer.

20 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Justifier que $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ est un anneau.

b. Démontrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ alors $\det A \in \mathbb{Z}$.

c. Justifier que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ alors $\mathrm{Com}(A) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

d. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.
Démontrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ tel que $AB = I_n$ si et seulement si $\det(A) = \pm 1$.
En déduire que les éléments inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ sont les matrices de déterminants ± 1.