Chapitre B12
Déterminants

On note toujours $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et n est un entier strictement positif.

I. Déterminant d'une matrice

A. Définition

Lemme. *Il existe une et une seule application $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ telle que :*
(i) f est linéaire par rapport à chacune des colonnes de sa variable.
(ii) f est antisymétrique par rapport à chacune de ses colonnes.
(iii) $f(I_n) = 1$.

Démonstration. Voir partie III. D. □

Définition. On note $\det A = f(A)$, et on appelle déterminant de A ce scalaire.

Notation.

$$\text{Si} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \text{alors on note} \qquad \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Définition. Étant donnés n vecteurs $u_1, \dots, u_n$ de $\mathbb{K}^n$, le déterminant de la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est le déterminant de la matrice dont ils forment les colonnes.

Remarque. Le déterminant n'est défini que pour une matrice carrée, ou pour une famille de n vecteurs de $\mathbb{K}^n$.

B. Propriétés

Notation. Dans la suite, si A est une matrice alors on note $(C_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ ses colonnes.

Lemme. *Le déterminant d'une matrice ayant une colonne nulle est nul.*

Démonstration. Ceci est conséquence de la linéarité par rapport à chaque colonnes. □

Proposition. *Le déterminant d'une matrice ayant deux colonnes égales est nul.*

Démonstration. On suppose que $C_{i_1} = C_{i_2}$ où $1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n$. Par antisymétrie :

$$\det(C_1 \ \cdots \ C_n) = -\det(C_1 \ \cdots \ C_{i_2} \ \cdots \ C_{i_1} \ \cdots \ C_n)$$

Ceci donne $\det A = -\det A$ car $C_{i_1} = C_{i_2}$, puis $\det A = 0$. □

Proposition. *Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$:*

$$\det(\lambda A) =$$

Démonstration. Le déterminant est linéaire par rapport à chacune de ses colonnes, donc :

$$\det(\lambda A) = \det(\lambda C_1 \ \cdots \ \lambda C_n) = \lambda^n \det(C_1 \ \cdots \ C_n) = \lambda^n \det A \qquad \square$$

Remarque. Par exemple $\det(-A) = (-1)^n \det A$.

Rappel. Pour tous $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$, on note

- $T_{ji}(\alpha)$ la matrice élémentaire de transvection : $T_{ji}(\alpha) = I_n + \alpha E_{ji}$
- $D_i(\lambda)$ la matrice élémentaire de dilatation : $D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{ii}$
- P_{ij} la matrice élémentaire de transposition : $P_{ij} = I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$

Proposition. *Pour toute matrice A :*

$$\det AT_{ji}(\alpha) = \det A \qquad \det AD_i(\lambda) = \lambda \det A \qquad \det AP_{ij} = -\det A$$

Démonstration. Pour la première égalité :

$$AT_{ji}(\alpha) = (C_1 \ \cdots \ C_i + \alpha C_j \ \cdots \ C_n)$$

La linéarité par rapport à la colonne i montrent que $AT_{ji}(\alpha)$ et A ont même déterminant.

La seconde égalité est conséquence de la linéarité par rapport à la colonne i, et la troisième est conséquence de l'antisymétrie. $\square$

Corollaire. *Les opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice ont l'effet suivant sur son déterminant :*

- $(C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j)$ *ne modifie pas le déterminant*
- $(C_i \leftarrow \lambda C_i)$ *multiplie le déterminant par λ*
- $(C_i \leftrightarrow C_j)$ *change le signe du déterminant.*

Exemple 1. Calcul de

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 2 \\ 2 & 10 & 0 \end{vmatrix}$$

Lemme. *Si une matrice A n'est pas inversible alors son déterminant est nul.*

Démonstration.

Proposition. *Soit A et B deux matrices de taille (n, n). Alors :*

$$\det AB =$$

Démonstration. En vertu de la remarque ci-dessus cette propriété est vraie si B est une matrice élémentaire, car :

$$\det T_{ij}(\alpha) = 1 \qquad \det D_i(\lambda) = \lambda \qquad \det P_{ij} = -1$$

Si B est inversible, alors il existe des matrices élémentaires $E_1 \dots E_m$ telles que :

$$B = E_1 \times \dots \times E_m$$

Alors :

$$\det B = \det E_1 \times \dots \times \det E_m$$

et d'autre part :

$$\det AB = \det(AE_1 \cdots E_m) = \det A \times \det E_1 \times \dots \times \det E_m = \det A \det B$$

La propriété est donc vraie.

Si maintenant B n'est pas inversible, alors AB n'est pas inversible, ceci car le système $ABX = 0$ admet une solution non-nulle, ou alors car $\ker B \subseteq \ker AB$, ou encore en utilisant la formule $\operatorname{rg}(AB) \leqslant \min(\operatorname{rg} A, \operatorname{rg} B)$.

On en déduit $\det AB = \det A \det B = 0$, la propriété est vraie également. □

▷ **Exercice 1.**

Proposition. *Une matrice carrée A est inversible si et seulement si son déterminant est non-nul. Dans ce cas :*

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

Démonstration. Nous avons déjà vu que le déterminant d'une matrice non inversible est nul.

Si A est inversible alors $AA^{-1} = I_n$ donc :

$$\det A \det A^{-1} = \det I_n = 1$$

Ceci montre que le déterminant de A est non-nul et donne la formule pour le déterminant de l'inverse de A. □

Corollaire. *Une famille de n vecteurs de $\mathbb{K}^n$ est une base de $\mathbb{K}^n$ si et seulement si son déterminant est non-nul.*

Exemple 2. Soit $u_1 = (5, 7)$ et $u_2 = (9, 4)$.

Proposition. *Pour toute matrice carrée A :* $\det {}^tA = \det A$.

Démonstration. Si A n'est pas inversible alors ${}^tA$ ne l'est pas non plus, donc leurs déterminants sont tous les deux nuls.

Si A est inversible, alors elle s'écrit comme produit de matrices élémentaires. Or la transposée d'une matrice élémentaire est une matrice élémentaire, et le déterminant des matrices élémentaires est invariant par transposition. Par produit on démontre la formule.

En effet, si $A = E_1 \cdots E_m$, alors :

$$\begin{aligned}\det {}^tA &= \det {}^t(E_1 \cdots E_m) = \det({}^tE_m \cdots {}^tE_1) = (\det {}^tE_m) \cdots (\det {}^tE_1) \\ &= (\det E_m) \cdots (\det E_1) = (\det E_1) \cdots (\det E_m) = \det(E_1 \cdots E_m) = \det A \qquad \square\end{aligned}$$

Remarque. En conséquence les opérations élémentaires sur les lignes ont le même effet sur le déterminant que celles sur les colonnes.

C. Calculs de déterminants

Proposition. *Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des coefficients de sa diagonale.*

Démonstration. Soit T triangulaire, et $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ ses coefficients diagonaux. Si tous les λ_i sont non-nuls alors on obtient par opérations élémentaires :

$$\det T = \left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i\right) \det I_n = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Si l'un des λ_i est nul alors la matrice n'est pas inversible, car son rang n'est pas égal à n, donc son détermnant est nul, tout comme le produit des λ_i. $\square$

Proposition (Règle de l'alpha). *Pour tout $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4$:* $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$

Proposition (Règle de Sarrus).

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$

Exemple 3. Calcul de $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix}$.

Proposition (Développement par rapport à une ligne ou une colonne).
Soit A une matrice de taille (n,n). Pour tout $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$ on note A_{ij} la matrice obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de la matrice A. Alors :

$$\begin{array}{lll} & \forall i = 1\dots n & \det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \\ \textit{et} & \forall j = 1\dots n & \det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \end{array}$$

Remarque. Dans le premier cas on dit que l'on développe le déterminant par rapport à la ligne i, dans le second cas on dit qu'on le développe par rapport à la colonne j.

Définition. Le scalaire $(-1)^{i+j} \det A_{ij}$ est appelé cofacteur de a_{ij}.

Démonstration. Par propriété sur la transposition et les inversions de colonnes, il suffit de démontrer le résultat pour le développement par rapport à un colonne.

Pour i allant de 1 à n, soit E_i, la représentation matricielle du vecteur e_i de la base canonique. La colonne j de A est alors :

$$C_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} E_i$$

Par linéarité :

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \det \tilde{A}_{ij}$$

où $\tilde{A}_{ij}$ est la matrice obtenue en remplaçant dans A la colonne j par E_i.

On applique les opérations élémentaires $(C_i \leftarrow C_i - a_{ij} C_j)$ pour i allant de 1 à n différent de j, puis les opérations $(C_k \leftrightarrow C_{k+1})$ pour k allant de $j-1$ à 1, puis les opérations $(L_k \leftrightarrow L_{k+1})$ pour k allant de $i-1$ à 1. On obtient :

$$\det \tilde{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_{ij} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

La dernière égalité peut être justifiée par la décomposition des matrices en matrices élémentaires. Une autre démonstration sera donnée partie III. D. (formule pour le cofacteur, page 13). □

Méthode. Pour calculer un déterminant :

- On procède par opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes, en appliquant l'algorithme du pivot de Gauss pour se ramener à une matrice triangulaire.
- Si le déterminant est de taille $(2,2)$ ou $(3,3)$ on dispose des règles de l'alpha et de Sarrus.
- On utilise aussi le développement par rapport à une ligne ou une colonne.

▷ **Exercice 2.**

II. Groupe symétrique

A. Généralités

Définition. Le groupe symétrique $\mathscr{S}_n$ est l'ensemble des permutations de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$.

Proposition. *Le groupe symétrique est un groupe pour la loi de composition* $\circ$.
Il est fini, de cardinal $n!$. *Il n'est pas commutatif si* $n \geqslant 3$.

Notations. Le groupe symétrique est noté $\mathscr{S}_n$, S_n, ou $\mathfrak{S}_n$.
Le symbole $\circ$ est omis : on note $\sigma\tau$ au lieu de $\sigma \circ \tau$.
L'élément neutre $\mathrm{Id}_{\{1,\dots,n\}}$ est noté e.
Une permutation σ de $\mathscr{S}_n$ est notée $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$.

Remarque. Attention à l'ordre : si σ et τ sont deux permutations alors $\sigma\tau$ est l'application qui à un élément k de $\{1, \dots, n\}$ associe $\sigma(\tau(k))$.

Exemple 4. Dans $\mathscr{S}_6$ on note :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 6 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Calculer σ^2, τ^2, σ^{-1}, puis $\sigma\tau$ et $\tau\sigma$.
Donner des entiers k non-nuls minimaux tels que : $\quad \sigma^k = e \quad \tau^k = e \quad (\sigma\tau)^k = e$

Définitions.

(i) Le support d'une permutation est l'ensemble des points de $\{1, \dots, n\}$ non fixes par cette permutation.

(ii) Un cycle est une permutation σ de la forme :

$$\begin{array}{rlcll} \sigma : & a_1 & \longmapsto & a_2 & \\ & a_2 & \longmapsto & a_3 & \\ & \vdots & & \vdots & \\ & a_{p-1} & \longmapsto & a_p & \\ & a_p & \longmapsto & a_1 & \\ & a & \longmapsto & a & \qquad \text{si } a \notin \{a_1, \dots, a_p\} \end{array}$$

où $a_1, \dots, a_p$ sont des éléments distincts de $\{1, \dots, n\}$, avec $1 \leqslant p \leqslant n$.
On dit que ce cycle est d'ordre p ou que c'est un p-cycle.
On le note $\sigma = (a_1\ a_2\ \dots\ a_p)$.

(iii) Une transposition est un cycle d'ordre 2 : $\quad \tau = (a\ b)$

Remarques.

(i) Si deux permutations ont des supports disjoints alors elles commutent.

(ii) Si σ est un p-cycle alors $\sigma^p = e$, donc l'inverse de σ est σ^{p-1}.

Théorème. *Toute permutation se décompose en produit de cycles à supports disjoints. Cette décomposition est unique à l'ordre près des facteurs, et ses cycles commutent.*

Exemple 5. Dans $\mathscr{S}_8$ on définit :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 8 & 3 & 5 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 4 & 7 & 8 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Écrire sous forme de produit de cycles à supports disjoints σ, τ et $\tau\sigma$, ainsi que leurs inverses.

Exemple 6. Dans $\mathscr{S}_4$ soit $\tau_1 = (1\ 2)$, $\tau_2 = (1\ 3)$, $\tau_3 = (1\ 4)$.

Calculer $\tau_1\tau_2$, $\tau_2\tau_1$, $\tau_1\tau_2\tau_1$, $\tau_3\tau_2\tau_1$, $\tau_1\tau_3\tau_2\tau_1$.

Théorème. *Toute permutation se décompose en produit de transpositions.*

Remarques.

(i) Pour le cycle $\sigma = (1\ 2\ \ldots\ p)$ on a $\sigma = (1\ p)(1\ p-1)\ldots(1\ 2)$. De même on démontre que tout p-cycle est produit de $p-1$ transpositions, et donc le théorème ci-dessus est conséquence du précédent.

(ii) La décomposition n'est pas unique. Par exemple $(1\ 2)(1\ 3) = (1\ 3)(2\ 3)$.

Exemples : premiers groupes symétriques.

(i) $\mathscr{S}_1 =$

(ii) $\mathscr{S}_2 =$

(iii) $\mathscr{S}_3 =$

(iv) $\mathscr{S}_4$ contient

▷ **Exercice 3.**

B. Signature

Théorème. *Il existe une et une seule application $\varepsilon : \mathscr{S}_n \to \{\pm 1\}$ telle que :*

(i) Pour toutes permutations σ et σ' : $\quad \varepsilon(\sigma\sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')$

(ii) Pour toute transposition τ : $\quad \varepsilon(\tau) = -1$

Démonstration. (Admise)

Pour tout $\sigma \in \mathscr{S}_n$ on définit : $\quad \varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$

On vérifie que l'application ε est bien définie, qu'elle prend ses valeurs dans $\{\pm 1\}$, et qu'elle satisfait les points *(i)* et *(ii).* □

Définition. L'application ε définie par le théorème ci-dessus est appelée signature. Pour tout permutation σ, on dit que $\varepsilon(\sigma)$ est la signature de σ.

Remarques.

(i) Si une permutation σ est un produit de p transpositions alors $\varepsilon(\sigma) = (-1)^p$:

$$\sigma = \tau_1 \dots \tau_p \qquad \Longrightarrow \qquad \varepsilon(\sigma) = (-1)^p$$

(ii) Si une permutation σ s'écrit de deux façons différentes comme produit de transpositions :

$$\sigma = \tau_1 \dots \tau_p = \tau'_1 \dots \tau'_q$$

Alors p et q ne sont pas forcément égaux mais ils ont même parité. En effet la signature de σ est :

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^p = (-1)^q$$

(iii) Soit un p-cycle $\sigma = (a_1 \ \dots \ a_p)$. Alors :

$$\sigma = (a_1 \ a_p)(a_1 \ a_{p-1}) \dots (a_1 \ a_2)$$

Ainsi $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{p-1}$.

(iv) Soit $\sigma = \prod_{i=1}^r \sigma_i$ la décomposition de σ en produit de cycles à supports disjoints. Pour tout $i = 1, \dots, r$ on note p_i l'ordre du cycle σ_i. Alors

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{i=1}^r (-1)^{p_i - 1}$$

(v) On dispose donc de deux méthodes pour calculer la signature d'une permutation : on la décompose soit en produit de transpositions, soit en produit de cycles à supports disjoints.

Exemple. Déterminer la signature des permutations suivantes.

σ	e	$(3\ 1)$	$(5\ 4\ 1)$	$(3\ 5)(6\ 1)$	$(4\ 8\ 1\ 2)$	$(1\ 2)(1\ 3)(1\ 2)$	$(1\ 4\ 6)(4\ 1\ 2)$
$\varepsilon(\sigma)$							

▷ **Exercices 4, 5.**

III. Multilinéarité

A. Applications multilinéaires

Définition. Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Une application

$$f : E^n \to F$$

est n-linéaire si elle est linéaire par rapport à chaque variable.
Ceci signifie que pour tout $i = 1, \ldots, n$, et tout $(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_n)$ dans E^{n-1} l'application

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow F \\ u &\longmapsto f(u_1, \ldots, u_{i-1}, u, u_{i+1}, \ldots u_n) \end{aligned}$$

est linéaire.
Une application 2-linéaire est dite bilinéaire, une application 3-linéaire est dite trilinéaire.

Exemple. Soit $f : E^2 \to F$ bilinéaire, u, v deux vecteurs de E et λ un scalaire. Alors :

$f(\lambda u + v, \lambda u + v) =$

B. Applications multilinéaires alternées

Définition. Une application n-linéaire $f : E^n \to F$ est alternée si elle est nulle dès que deux de ses variables sont égales :

$$\forall (u_1, \ldots, u_n) \in E^n \qquad \forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2$$
$$i \neq j \qquad \text{et} \qquad u_i = u_j \qquad \Longrightarrow \qquad f(u_1, \ldots, u_n) = 0_F$$

Proposition. *Une application n-linéaire $f : E^n \to F$ est alternée si et seulement si elle est antisymétrique :*

$$\forall (u_1, \ldots, u_n) \in E^n \qquad \forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2$$
$$i < j \qquad \Longrightarrow \qquad f(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_n) = -f(u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_i, \ldots, u_n)$$

Démonstration.

Proposition. *Soit $f : E^n \to F$ une application n-linéaire alternée, et soit σ une permutation de $\{1, \dots, n\}$. Alors :*

$$\forall (u_1, \dots, u_n) \in E^n \qquad f(u_{\sigma(1)}, u_{\sigma(2)}, \dots, u_{\sigma(n)}) =$$

<u>Démonstration</u>. Soit τ une transposition. Comme f est alternée alors :

$$f(u_{\tau(1)}, u_{\tau(2)}, \dots, u_{\tau(n)}) = -f(u_1, u_2, \dots, u_n)$$

Soit maintenant σ un élément quelconque de $\mathscr{S}_n$. Par théorème il existe alors des transpositions $\tau_1, \dots, \tau_p$ telles que $\sigma = \tau_1 \tau_2 \dots \tau_p$.

Ceci implique que $\varepsilon(\sigma) = (-1)^p$. De plus, si on applique ces p transpositions sur les vecteurs $(u_1, \dots, u_n)$ alors on obtient :

$$f(u_{\sigma(1)}, u_{\sigma(2)}, \dots, u_{\sigma(n)}) = (-1)^p f(u_1, u_2, \dots, u_n)$$

Il s'agit du résultat attendu, car $\varepsilon(\sigma) = (-1)^p$. □

Proposition. *Soit $f : E^n \to F$ une application n-linéaire alternée, et $u_1, \dots, u_n$ des vecteurs de E. Si la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est liée alors $f(u_1, \dots, u_n) = 0_F$.*

<u>Démonstration</u>. Comme la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est liée alors il existe un n-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de scalaires non tous nuls tel que $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = 0_E$.

Notons k un indice tel que λ_k est non-nul. Alors :

$$f(u_1, \dots, u_{k-1}, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i, u_{k+1}, \dots, u_n) = f(u_1, \dots, u_{k-1}, 0_E, u_{k+1}, \dots, u_n) = 0_F$$

Par linéarité selon la variable d'indice k :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(u_1, \dots, u_{k-1}, u_i, u_{k+1}, \dots, u_n) = 0_E \tag{$\star$}$$

Comme f est alternée alors :

$$\forall i \neq k \qquad f(u_1, \dots, u_{k-1}, u_i, u_{k+1}, \dots, u_n) = 0_F$$

L'égalité ($\star$) devient :

$$\lambda_k f(u_1, \dots, u_{k-1}, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n) = 0_F$$

On a supposé que λ_k est non-nul, donc on en déduit bien que $f(u_1, \dots, u_n) = 0_F$. □

C. <u>Formes multilinéaires alternées</u>

Remarque. On considère ci-dessous des formes n-linéaires alternées, c'est-à-dire des applications n-linéaires alternées de E^n dans $\mathbb{K}$.

On suppose aussi que E est de dimension n.

Théorème. *Soit E est de dimension finie n, et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors il existe une et une seule forme n-linéaire alternée $f : E^n \to \mathbb{K}$ telle que $f(e_1, \dots, e_n) = 1$.*

Si g est une autre forme n-linéaire alternée de E alors g est colinéaire à f : il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $g = \lambda f$.

Exemple 7. Cas $n = 2$.

Démonstration. On suppose qu'une telle forme n-linéaire existe. On montre alors qu'elle est uniquement déterminée.

Soit $f : E^n \to \mathbb{K}$ une forme n-linéaire alternée vérifiant $f(e_1, \ldots, e_n) = 1$.

Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de n vecteurs de E.

Pour tout $j = 1, \ldots, n$, soit $(a_{1j}, \ldots, a_{nj})$ les coordonnées de u_j dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$. Alors :

$$f(u_1, \ldots, u_n) = f\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i1} e_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} a_{in} e_i\right)$$

Par n-linéarité :

$$f(u_1, \ldots, u_n) = \sum_{i_1=1}^{n} \ldots \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_1 1} \ldots a_{i_n n} f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n})$$

Comme f est alternée, tous les termes $f(e_{i_1}, \ldots e_{i_n})$ où deux des i_k sont égaux sont nuls. Il ne reste donc que ceux où la famille $(i_1, \ldots, i_n)$ est une permutation de $(1, \ldots, n)$:

$$f(u_1, \ldots, u_n) = \sum_{\sigma \in \mathscr{S}_n} a_{\sigma(1)1} \ldots a_{\sigma(n)n} f(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)})$$

Par propriété des applications n-linéaires alternées :

$$f(u_1, \ldots, u_n) = \sum_{\sigma \in \mathscr{S}_n} a_{\sigma(1)1} \ldots a_{\sigma(n)n} \varepsilon(\sigma) f(e_1, \ldots, e_n)$$

Or $f(e_1, \ldots, e_n) = 1$, donc :

$$f(u_1, \ldots, u_n) = \sum_{\sigma \in \mathscr{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \ldots a_{\sigma(n)n}$$

Ceci montre que l'application f est uniquement déterminée.

On constate que cette application est bien définie. Elle est n-linéaire, on admet qu'elle est alternée, et on vérifie vite que l'image de la base canonique est 1.

L'existence et l'unicité sont donc établies.

Si g est une autre forme n-linéaire alternée de E, alors on obtient comme ci-dessus :

$$g(u_1, \ldots, u_n) = \sum_{\sigma \in \mathscr{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \ldots a_{\sigma(n)n} g(e_1, \ldots, e_n)$$

En posant $\lambda = g(e_1, \ldots, e_n)$ on a alors $g = \lambda f$. □

Remarques.

(i) On peut ajouter que deux formes n-linéaires alternées sur un espace vectoriel de dimension n sont proportionnelles.

(ii) La formule ci-dessus s'écrit aussi :

$$f(u_1, \ldots, u_n) = \sum_{\sigma \in \mathscr{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma^{-1}(1)} \ldots a_{n\sigma^{-1}(n)}$$

Et comme l'application $\sigma \mapsto \sigma^{-1}$ est une bijection de $\mathscr{S}_n$:

$$f(u_1, \ldots, u_n) = \sum_{\sigma \in \mathscr{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \ldots a_{n\sigma(n)}$$

D. Compléments sur le déterminant d'une matrice

Corollaire. *Il existe une et une seule application* $\det : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *linéaire par rapport à chaque colonne et alternée telle que* $\det(I_n) = 1$.

Démonstration. Soit $E = \mathbb{K}^n$, et $\mathscr{B}_c$ sa base canonique. Soit $M = M_{\mathscr{B}_c}$ l'application qui à une famille de n vecteurs de E associe sa représentation matricielle dans la base canonique :

$$M : \begin{array}{rcl} E^n & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ (u_1, \ldots, u_n) & \longmapsto & M_{\mathscr{B}_c}(u_1, \ldots, u_n) \end{array}$$

Alors M est un isomorphisme.

Soit f la forme n-linéaire alternée de E_n telle que $f(e_1, \ldots, e_n) = 1$.

Alors $\det = f \circ M^{-1}$ vérifie les propriétés demandées.

Réciproquement, si une application det vérifie les propriétés demandées, alors $\det \circ M$ est une forme n-linéaire alternée de E, et elle vérifie $\det \circ M(e_1, \ldots, e_n) = 1$, donc $\det \circ M = f$, et ainsi $\det = f \circ M^{-1}$.

L'existence et l'unicité du déterminant d'une matrice sont démontrées. □

Théorème. *Soit* $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ *une matrice. Alors :*

Démonstration. Ceci est conséquence de la remarque *(ii)* ci-dessus. □

Exemples.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Lemme : formule pour le cofacteur.
Pour tout matrice A' de taille $(n-1, n-1)$:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \det A'$$

<u>Démonstration</u>. On applique d'abord les opérations $(C_1 \leftrightarrow C_2), (C_2 \leftrightarrow C_3), (C_{n-1} \leftrightarrow C_n)$ puis $(C_1 \leftrightarrow C_2), (C_2 \leftrightarrow C_3), (C_{n-1} \leftrightarrow C_n)$. Alors :

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = (-1)^{n-1}(-1)^{n-1} \det \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & A' & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & A' & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On note A cette dernière matrice et a_{ij} ses coefficients.

Les a_{nj} sont nuls dès que $j \neq n$, et $a_{nn} = 1$. D'après la formule ci-dessus :

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathscr{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} = \sum_{\substack{\sigma \in \mathscr{S}_n \\ \sigma(n)=n}} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n-1\sigma(n-1)}$$

L'ensemble des permutations de $\mathscr{S}_n$ qui laissent stable n est en bijection naturelle avec $\mathscr{S}_{n-1}$, laquelle conserve la signature, donc :

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathscr{S}_{n-1}} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n-1\sigma(n-1)} = \det A'$$

En effet, les coefficients de A' sont les a_{ij} pour $1 \leqslant i, j \leqslant n-1$. □

E. <u>Comatrice</u>

Rappel. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice.
Pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ on note A_{ij} la matrice extraite de A obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de A.
Le réel $c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ est appelé <u>cofacteur</u> de a_{ij}.
Les développements par rapport à une ligne ou une colonne s'expriment alors :

$$\forall i = 1, \dots, n \qquad \det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_{ij} \qquad\qquad \forall j = 1, \dots, n \qquad \det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} c_{ij}$$

Définition. La matrice des cofacteurs est appelée comatrice de A, elle est notée $\mathrm{Com}(A)$.

$$\mathrm{Com}(A) = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad \forall i, j = 1, \ldots, n \quad c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

Proposition. *Pour toute matrice A de taille (n, n) :*

Démonstration.

On note c'_{jk} les coefficients de la matrice ${}^t\mathrm{Com}(A)$. Alors c'_{jk} est le cofacteur c_{kj}.

On note b_{ik} les coefficients de la matrice produit $A\,{}^t\mathrm{Com}(A)$. Alors :

$$\forall (i,k) \in \{1, \ldots, n\}^2 \qquad b_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c'_{jk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_{kj}$$

Si $i = k$ alors on retrouve le développement par rapport à la ligne i, donc $b_{ii} = \det(A)$.

Si $i \neq k$, alors on définit la matrice $\tilde{A}$ comme étant la matrice A dans laquelle la ligne k est remplacée par la ligne i.

Les lignes i et k de cette matrice sont identiques, donc son déterminant est nul. Or le développement de ce déterminant selon sa ligne k est b_{ik}. Ainsi $b_{ik} = 0$.

On a démontré que :

$$\forall (i,k) \in \{1, \ldots, n\}^2 \qquad b_{ik} = \begin{cases} \det(A) & \text{si } i = k \\ 0 & \text{si } i \neq k \end{cases}$$

On en déduit : $A\,{}^t\mathrm{Com}(A) = \det(A) I_n$

On démontre de même la formule ${}^t\mathrm{Com}(A) A = \det(A) I_n$, grâce aux développements par rapport à une colonne. $\square$

Corollaire. *Si A est inversible alors :*

Exemple. Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors $\mathrm{Com}(A) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$ donc $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

IV. Déterminant en base quelconque

A. Déterminant d'une famille de vecteurs

Définition. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, et $\mathscr{B}$ une base de E. Pour toute famille de n vecteurs $(u_1, \ldots, u_n)$ de E on appelle déterminant de la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ dans la base $\mathscr{B}$ et on note $\det_{\mathscr{B}}(u_1, \ldots, u_n)$ le déterminant de la matrice dont les colonnes sont les représentations matricielles des vecteurs u_i dans la base $\mathscr{B}$.

Remarque. Le déterminant d'une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$ est le déterminant usuel.

Exemple 8. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$, $P_0 = 1 + X + X^2$, $P_1 = 2 - X^2$ et $P_2 = 3X + 5X^2$.

Remarques.

(i) Le déterminant d'une famille de vecteurs peut changer de valeur si on change la base dans laquelle on l'exprime.

(ii) Les propriétés de linéarité et d'antisymétrie restent vraie. Par exemple pour tout $i = 1 \ldots n$, l'application

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow \mathbb{K} \\ u_i &\longmapsto \det_{\mathscr{B}}(u_1, \ldots, u_n) \end{aligned}$$

est linéaire.

Théorème. *Soit E un espace vectoriel de dimension n, et $\mathscr{F}$ une famille de n vecteurs de E. On a équivalence entre :*

(i) La famille $\mathscr{F}$ est une base de E.

(ii) Pour toute base $\mathscr{B}$ de E, $\det_{\mathscr{B}}\mathscr{F}$ est non-nul.

(iii) Il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\det_{\mathscr{B}}\mathscr{F}$ est non-nul.

Démonstration. *(i)* $\Longrightarrow$ *(ii)* : Supposons que la famille $\mathscr{F}$ est une base de E. Soit $\mathscr{B}$ une autre base de E. Par définition du déterminant d'une famille de vecteurs dans une base, $\det_{\mathscr{B}}\mathscr{F}$ est le déterminant de la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{F}$. Une matrice de passage est inversible donc $\det_{\mathscr{B}}\mathscr{F}$ est non-nul.

L'implication *(ii)* $\Longrightarrow$ *(iii)* est évidente.

Implication *(iii)* $\Longrightarrow$ *(i)* : Si $\det_{\mathscr{B}}\mathscr{F}$ est non-nul pour une certaine base $\mathscr{B}$, alors la matrice $M_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$, représentation matricielle de $\mathscr{F}$ dans la base $\mathscr{B}$, est inversible, donc ses colonnes forment une base de $\mathbb{K}^n$.

L'application $M_{\mathscr{B}} : E \to \mathbb{K}^n$ qui à un vecteur de E associe sa représentation matricielle dans la base $\mathscr{B}$ est un isomorphisme. Un isomorphisme envoie une base sur une base, donc $\mathscr{F}$ est une base de E. □

B. Déterminant d'un endomorphisme

Soit E un espace vectoriel de dimension n.

Définition. Soit f un endomorphisme de E : $f \in \mathscr{L}(E)$, et soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On appelle déterminant de f dans la base $\mathscr{B}$ le scalaire :

$$\det_{\mathscr{B}}(f) = \det_{\mathscr{B}}(f(e_1), \ldots, f(e_n))$$

Il s'agit donc du déterminant de la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$: $\det_{\mathscr{B}}(f) = \det(M_{\mathscr{B}}(f))$.

Théorème. *Soit $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E. Alors :*

$$\det_{\mathscr{B}}(f) = \det_{\mathscr{B}'}(f)$$

En d'autres termes, le déterminant de f ne dépend pas de la base choisie.

Définition. Soit f un endomorphisme de f. On appelle déterminant de f et on note $\det f$ le déterminant de f dans une base de E.

Démonstration. Si on note $A = M_{\mathscr{B}}(f)$, $A' = M_{\mathscr{B}'}(f)$, P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$, alors $A = PA'P^{-1}$. Ceci donne :

$$\det A = \det P \det A' \det P^{-1}$$

Mais les déterminants sont des scalaires, donc :

$$\det A = \det A' \det P \det P^{-1} = \det A'$$

Ceci donne bien $\det_{\mathscr{B}}(f) = \det_{\mathscr{B}'}(f)$. □

Remarque. Ainsi pour calculer le déterminant de f on utilise sa matrice dans n'importe quelle base de E.

Proposition. *Soit f un endomorphisme de E, $\mathscr{B}$ une base de E, et $u_1, \ldots, u_n$ des vecteurs de E. Alors :*

$$\det_{\mathscr{B}}(f(u_1), \ldots, f(u_n)) = \det f \det_{\mathscr{B}}(u_1, \ldots, u_n)$$

Démonstration. On sait que :

$$\forall i = 1, \ldots, n \qquad M_{\mathscr{B}}(f(u_i)) = M_{\mathscr{B}}(f) \times M_{\mathscr{B}}(u_i)$$

La multiplication par blocs (hors programme) montre que si $C_1, \ldots, C_n$ sont des colonnes à n lignes et A est une matrice de taille (n, n) alors :

$$(AC_1 \ \cdots \ AC_n) = A(C_1 \ \cdots \ C_n)$$

En conséquence, en notant $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_n)$ on obtient :

$$M_{\mathscr{B}}(f(\mathscr{F})) = M_{\mathscr{B}}(f) \times M_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$$

Ceci donne la formule souhaitée :

$$\det_{\mathscr{B}}(f(\mathscr{F})) = \det(M_{\mathscr{B}}(f(\mathscr{F}))) = \det M_{\mathscr{B}}(f) \times \det(M_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})) = \det f \times \det_{\mathscr{B}} \mathscr{F} \qquad \square$$

Démonstration alternative. On considère l'application :

$$F : \begin{array}{rcl} E^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (u_1, \dots, u_n) & \longmapsto & \det_{\mathscr{B}}(f(u_1), \dots, f(u_n)) \end{array}$$

Cette application est n-linéaire car f est linéaire, et elle est alternée. Il s'agit d'une forme n-linéaire alternée de E.

Or l'application $(u_1, \dots, u_n) \mapsto \det_{\mathscr{B}}(u_1, \dots, u_n)$ est également une forme n-linéaire alternée de E. Comme E est de dimension n alors toutes les formes n-linéaires alternées sont proportionnelles. Donc il existe un scalaire λ tel que $F = \lambda \det_{\mathscr{B}}$.

On en déduit $F(\mathscr{B}) = \lambda \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = \lambda$. Or $F(\mathscr{B}) = \det_{\mathscr{B}}(f(\mathscr{B})) = \det f$, donc $\lambda = \det f$.

Ceci montre que pour tout $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$:

$$\det_{\mathscr{B}}(f(u_1), \dots, f(u_n)) = \det f \det_{\mathscr{B}}(u_1, \dots, u_n)$$ □

Théorème. *Soit f et g deux endomorphismes de E. Alors :*

$$\det(f \circ g) = \det f \cdot \det g$$

Démonstration. Soit $\mathscr{B}$ une base de E, puis A et B les matrices respectives de f et de g dans cette base.

Par propriété la matrice de $f \circ g$ dans la base $\mathscr{B}$ est le produit matriciel AB, ce qui justifie le théorème car $\det(AB) = \det A \det B$. □

Démonstration alternative. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. En utilisant la proposition précédente on obtient :

$$\begin{aligned} \det(f \circ g) &= \det_{\mathscr{B}}(f(g(e_1)), \dots, f(g(e_n))) = \det f \ \det_{\mathscr{B}}(g(e_1), \dots, g(e_n)) \\ &= \det f \ \det g \ \det_{\mathscr{B}}(e_1, \dots, e_n) = \det f \det g \end{aligned}$$

La formule $\det(AB) = \det A \det B$ peut être déduite de cette propriété. □

Proposition. *Soit f un endomorphisme de E. Alors f est bijective si et seulement si son déterminant est non-nul. Dans ce cas :*

$$\det(f^{-1}) = (\det f)^{-1}$$

Démonstration. Soit $\mathscr{B}$ une base de E et A la matrice de f dans cette base. Par propriété le déterminant de f est celui de A, et f est bijective si et seulement si A est inversible.

On sait que A est inversible si et seulement si son déterminant est non-nul, donc f est inversible si et seulement si son déterminant est non-nul.

Si f est bijectif alors $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_E$, donc $\det f \cdot \det(f^{-1}) = \det \mathrm{Id}_E = 1$.

En effet la matrice de Id_E dans toute base est I_n, son déterminant est égal à 1.

Ceci démontre que $\det(f^{-1}) = (\det f)^{-1}$. □

▷ **Exercices 6, 7.**

V. Applications

A. Géométrie

Exemple 9. Donner une équation cartésienne de la droite (AB), où les points A et B ont pour coordonnées $(1, -3)$ et $(2, 1)$.

Exemple 10. Soit $A(0, 1, 2)$, $B(-1, 3, 0)$ et $C(1, 1, 1)$ trois points de l'espace. Vérifier que ces trois points définissent un plan et donner une équation cartésienne de ce plan.

▷ **Exercice 8.**

B. Formules de Cramer

Gabriel Cramer, mathématicien suisse, 1704 – 1752.

Théorème. *(Formules de Cramer) Soit $AX = B$ la forme matricielle d'un système de n équations à n inconnues. Ce système est de Cramer si et seulement si* $\det A$ *est non nul. Les solutions sont alors :*

$$\forall i = 1 \dots n \qquad x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$$

où A_i est la matrice obtenue en remplaçant la colonne i de A par B.

Exemple 11. Résolution du système : $\begin{cases} 4x + 5y = 11 \\ 5x + 6y = 12 \end{cases}$

Exemple 12. Résolution du système : $\begin{cases} 2x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$

Démonstration. Nous savons qu'un système est de Cramer si et seulement si sa matrice A est inversible, donc un système est de Cramer si et seulement si le déterminant de A est non-nul.

Supposons que le système est de Cramer. Soit $(x_1, \dots, x_n)$ sa solution.

On note C_i les colonnes de A. Alors le système s'écrit par blocs :

$$\begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = B \qquad \text{donc} \qquad x_1 C_1 + \cdots + x_n C_n = B$$

Pour tout $i = 1 \dots n$ on peut en déduire :

$$\det(C_1 \ \cdots \ C_{i-1} \ B \ C_{i+1} \ \cdots \ C_n) = \det\left(C_1 \ \cdots \ C_{i-1} \ \left(\sum_{k=1}^{n} x_k C_k\right) \ C_{i+1} \ \cdots \ C_n\right)$$

Par linéarité :

$$\det A_i = \sum_{k=1}^{n} x_k \det(C_1 \ \cdots \ C_{i-1} \ C_k \ C_{i+1} \ \cdots \ C_n)$$

Or un déterminant est nul si deux de ses colonnes sont égales, donc :

$$\det A_i = x_i \det A$$

Comme $\det A$ est non-nul alors on obtient les formules annoncées. □

▷ **Exercice 9.**