Lycée Bellevue – Toulouse **27 mai 2025**
MPSI – Mathématiques

Concours blanc
Épreuve de mathématiques

Durée : 4 heures – Calculatrices non autorisées

- *On rappelle qu'une grande attention est portée à la présentation, l'orthographe, la qualité de la rédaction.*
- *En général les symboles mathématiques ne doivent pas figurer dans une phrase.*
- *Les objets introduits doivent être présentés correctement.*
- *Les références au cours doivent être citées, de même que les questions précédentes si elles sont utilisées.*
- *Il est inutile de recopier l'énoncé.*
- *Les copies doivent être numérotées, leur nombre total indiqué.*
- *Les annotations au crayon ne sont pas prises en compte.*
- *Le barème est indicatif.*
- *Un point sera offert à chaque copie où seront placés judicieusement tous les mots suivants : Taylor, Chasles, linéaire, convexe, incomplète, fondamental, uniquement.*
- *Si un élève est amené à repérer ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

Problème 1. Intégrale de Gauss et formule de Stirling

Dans ce problème on calcule l'intégrale de Gauss

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$$

et on démontre la formule de Stirling donnant un équivalent de la factorielle en $+\infty$.

Les parties B et C sont indépendantes et utilisent toutes les deux la partie A.

Partie A. Intégrales de Wallis

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit l'intégrale de Wallis : $\quad W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\,\mathrm{d}t.$

1. En intégrant par parties démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} W_n$

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad W_{n+1}W_n = \dfrac{\pi}{2(n+1)}$

3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad 0 \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n \leqslant W_{n-1}$

4. Encadrer W_n^2 puis démontrer que : $\quad W_n \underset{(+\infty)}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant le résultat de la question 1 exprimer W_{2n} à l'aide de factorielles.
   En déduire (sans utiliser la formule de Stirling) : $\binom{2n}{n} \underset{(+\infty)}{\sim} \dfrac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}}$.

Partie B. Intégrale de Gauss

Dans cette partie on démontre l'existence de $I = \lim\limits_{A\to+\infty} \displaystyle\int_0^A e^{-x^2/2}dx$ et on calcule sa valeur.

On notera ensuite $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2/2}\mathrm{d}x$.

Dans les questions 1 à 3, n est un entier naturel strictement positif fixé.

1. Justifier que pour tout réel t : $e^t \geqslant 1+t$.
   En déduire :
$$\forall x \in \left[0, \sqrt{2n}\right] \qquad e^{-x^2/2} \geqslant (1-x^2/2n)^n$$
$$\text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad e^{-x^2/2} \leqslant (1+x^2/2n)^{-n}.$$
2. Pour tout réel $A \geqslant 0$ on pose : $G_n(A) = \displaystyle\int_0^A \left(1+x^2/2n\right)^{-n} \mathrm{d}x$.
   (a) Justifier que la fonction G_n est bien définie et croissante.
   (b) À l'aide du changement de variable $x = \sqrt{2n}\tan t$, démontrer que :
$$\forall A \in \mathbb{R}_+ \qquad G_n(A) = \sqrt{2n}\int_0^{\arctan\frac{A}{\sqrt{2n}}} \cos^{2n-2} t \,\mathrm{d}t.$$
   (c) Justifier que la fonction $\Phi_n : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \cos^{2n-2} t \,\mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbb{R}$.
   En déduire que la fonction G_n admet une limite finie en $+\infty$.
   On note $K_n = \lim\limits_{A\to+\infty} G_n(A)$. Exprimer K_n en fonction de n et d'une intégrale de Wallis.
3. On pose maintenant : $H_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{2n}} \left(1-x^2/2n\right)^n \mathrm{d}x$.
   À l'aide du changement de variable $x = \sqrt{2n}\sin t$, exprimer H_n en fonction de n et d'une intégrale de Wallis.
4. Pour tout $A \in \mathbb{R}_+$ on pose : $F(A) = \displaystyle\int_0^A e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$.
   (a) Justifier que F est bien définie, croissante, et inférieure ou égale aux fonctions G_n ($n \in \mathbb{N}^*$).
   (b) En déduire que F admet une limite finie en $+\infty$, limite que l'on note I.
   Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I \leqslant K_n$.
   (c) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $H_n \leqslant F(\sqrt{2n})$ et $H_n \leqslant I$.
5. Démontrer que les suites (H_n) et (K_n) convergent et donner leurs limites.
   En déduire la valeur de I.

Partie C. Formule de Stirling

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose : $I_n = \displaystyle\int_1^n \frac{1}{t}\left(t - \lfloor t \rfloor - \frac{1}{2}\right) \mathrm{d}t$

1. (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\int_1^n \frac{\lfloor t \rfloor}{t} = n \ln n - \ln(n!)$.

   (b) En déduire la valeur de I_n en fonction de n.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   (a) Démontrer :

$$I_{n+1} - I_n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{x}{2n+1+x}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{x}{2n+1-x}\,\mathrm{d}t.$$

   (b) En déduire :

$$I_{n+1} - I_n = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{(2n+1)^2 - x^2}\,\mathrm{d}x.$$

   (c) Démontrer :

$$\frac{1}{12(n+1)(n+2)} \leqslant I_n - I_{n+1} \leqslant \frac{1}{12n(n+1)}.$$

3. On définit les suites :

$$u = \left(I_n - \frac{1}{12n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \qquad \text{et} \qquad v = \left(I_n - \frac{1}{12(n+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}.$$

   Démontrer que ces suites sont adjacentes.

4. (a) Démontrer que pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$:

$$n! \underset{(+\infty)}{=} \left(\frac{n}{e}\right)^n \alpha\sqrt{n}\left(1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

   (b) À l'aide de la partie A déterminer la valeur de α puis donner un équivalent de $n!$ lorsque n tend vers $+\infty$ qui n'utilise pas de factorielle.

John Wallis, 1616 – 1703, Angleterre.
James Stirling, 1692 – 1770, Écosse.
Daniel Bernoulli, 1700 – 1782, Suisse.
Pierre-Simon de Laplace, 1749 – 1827, France.
Carl Friedrich Gauss, 1777 – 1855, Allemagne.

Problème 2. Racines carrées et nilpotence

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie $n > 0$.

Pour tout endomorphisme f de E on note $f^0 = \mathrm{Id}_E$, $f^1 = f$, et par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $f^{k+1} = f \circ f^k$.

Une *racine carrée* de f est un endomorphisme g de E tel que $g^2 = f$.

De même, pour une matrice carrée A, une *racine carrée* de A est une matrice carrée B telle que $B^2 = A$.

Partie A. En dimension 2

On suppose que $n = 2$ et on choisit une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ de E.

1. Soit x un réel non-nul.
   Démontrer qu'il existe une et une seule racine carrée g de Id_E telle que $g(e_1) = xe_2$.
   En déduire que Id_E admet une infinité de racines carrées.
2. Soit g une racine carrée de $-\mathrm{Id}_E$.
   (a) Soit e un vecteur non-nul de E.
   Démontrer que la famille $(e, g(e))$ est une base de E.
   (b) Donner la matrice de g dans cette base.
3. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
   Démontrer que f n'admet pas de racine carrée.
   On pourra raisonner par l'absurde, noter $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matrice d'une racine carrée de f dans la base $\mathscr{B}$, et séparer les cas $\operatorname{tr} B \neq 0$ et $\operatorname{tr} B = 0$.

Partie B. Endomorphismes nilpotents

Soit f un endomorphisme de E. On dit que f est *nilpotent* s'il existe un entier naturel p tel que $f^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Soit f un endomorphisme nilpotent de E.

1. Justifier qu'il existe un plus petit entier p tel que $f^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
   Cet entier est appelé *indice de nilpotence* de f dans toute la suite.
2. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent d'indice p strictement positif.
   (a) Justifier qu'il existe $e \in E$ tel que $f^{p-1}(e) \neq 0_E$.
   (b) Démontrer que la famille $(e, f(e), f^2(e), \ldots, f^{p-1}(e))$ est libre.
   (c) En déduire que $p \leqslant n$.
3. Démontrer que si f admet une racine carrée alors $p \leqslant \frac{n+1}{2}$.
4. On rappelle que n est supposé strictement positif, et que $\mathbb{R}_n[X]$ n'est pas de dimension n.
   Démontrer que l'endomorphisme de dérivation $D : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$ n'admet pas de racine carrée.

Partie C. Racines carrées des endomorphismes nilpotents en dimension 3

Dans cette partie on suppose que $n = 3$ et $f \in \mathscr{L}(E)$ est nilpotent d'indice 2, c'est-à-dire que $f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $f \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$.

1. Comparer le noyau et l'image de f et en déduire leurs dimensions.
2. Démontrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   On note $\mathscr{B}$ une telle base.
3. Soit g une racine carrée de f.
   (a) Justifier que g est nilpotent d'indice 3.
   (b) Démontrer que si $\ker g^2 \subseteq \ker g$ alors $\ker g^3 \subseteq \ker g^2$.
   (c) En déduire que $\operatorname{im} g = \ker f$ et $\ker g = \operatorname{im} f$.
4. Démontrer que les racines carrées de f sont les endomorphismes de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & \frac{1}{y} \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

Partie D. Racines carrées d'un endomorphisme unipotent

Un endomorphisme f de E est dit *unipotent* si $f - \mathrm{Id}_E$ est nilpotent, c'est-à-dire si $f = \mathrm{Id}_E + h$ où h est un endomorphisme nilpotent de E.

De même une matrice carrée de taille (n, n) est dite *unipotente* si la matrice $A - I_n$ est nilpotente.

1. Justifier que la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$ admet un développement limité à l'ordre $n-1$ en 0. (On rappelle que n est supposé strictement positif.)
2. Il existe donc un polynôme $P_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $\sqrt{1+x} \underset{(0)}{=} P_n(x) + o(x^{n-1})$.
   Démontrer qu'il existe un polynôme Q_n tel que $P_n^2 = 1 + X + X^n Q_n$.
3. Soit f un endomorphisme unipotent de E, et A sa matrice dans une base $\mathscr{B}$ de E.
   Obtenir une racine carrée de A à l'aide du polynôme P_n et de la matrice $H = A - I_n$.
   En déduire que f admet une racine carrée.
4. *Question hors barème.*
   Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Démontrer que A est unipotente.
   (b) Expliciter le polynôme P_3.
   (c) En déduire une racine carrée de A.