Lycée Bellevue – Toulouse **Année 2024-2025**
MPSI – Mathématiques

Programme de colles
Semaine 27
du 12 au 16 mai 2025

Questions de cours

Sauf mention explicite il faut connaître l'énoncé et la démonstration.

1. Deux définitions de la matrice de passage. Formule $X = PX'$: énoncé et démonstration.
2. Formule de changement de base pour un endomorphisme. Démonstration à l'aide d'un diagramme commutatif.
3. Lemme : soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies p et n. Soit $f : E \to F$ une application linéaire de rang r. Alors il existe une base $\mathscr{B}_1$ de E et une base $\mathscr{B}_2$ de F telles que la matrice de f dans ces bases est J_{npr}.
4. Deux matrices semblables ont même trace.

Exercices

Chapitre A11. Intégration

I. Continuité uniforme
II. Définition des intégrales
III. Propriétés
IV. Sommes de Riemann
V. Théorèmes
VI. Intégrales des fonctions complexes

Programme prévisionnel de la semaine suivante

Chapitre B11 (Matrices et applications linéaires).

Chapitre A11. Intégration

I. Continuité uniforme

Définition, exemples. Si f est lipschitzienne alors elle est uniformément continue, si elle est uniformément continue alors elle est continue. Théorème de Heine.

II. Définition des intégrales

Subdivision d'un segment, fonctions en escalier, intégrales des fonctions en escalier. Continuité par morceaux, théorème d'approximation par une fonction en escalier. Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment.

III. Propriétés

Linéarité, croissance de l'intégrale. Si f est continue positive d'intégrale nulle sur un segment non réduit à un point alors f est nulle. Inégalité triangulaire, relation de Chasles.

IV. Sommes de Riemann

Méthodes des carrés et des trapèzes. Théorème : si f est continue alors les suites (R_n) et (S_n) convergent vers $\int_a^b f(t)dt$.

V. Théorèmes

Théorème fondamental et corollaire : toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive. Valeur moyenne, atteinte si f est continue. Exemples de fonctions définies par une intégrale.

Formule de Taylor avec reste intégral, inégalité de Taylor-Lagrange.

VI. Intégrales des fonctions complexes

Définition, inégalité triangulaire.