Corrigé du T. D. C2
Dénombrement

1 Écrire toutes les permutations de $\{a, b\}$, puis de $\{a, b, c\}$, puis de $\{a, b, c, d\}$.

Rappelons que le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est $n!$, donc on doit obtenir respectivement 2, 6 et 24 permutations dans les trois cas suivants.

Les deux permutations de $\{a, b\}$ sont :

$$(a, b) \qquad (b, a)$$

Les six permutations de $\{a, b, c\}$ sont :

$$(a, b, c) \qquad (a, c, b) \qquad (b, a, c) \qquad (b, c, a) \qquad (c, a, b) \qquad (c, b, a)$$

Les 24 permutations de $\{a, b, c, d\}$ sont, en procédant par ordre alphabétique :

$$\begin{array}{cccccc}
(a, b, c, d) & (a, b, d, c) & (a, c, b, d) & (a, c, d, b) & (a, d, b, c) & (a, d, c, b) \\
(b, a, c, d) & (b, a, d, c) & (b, c, a, d) & (b, c, d, a) & (b, d, a, c) & (b, d, c, a) \\
(c, a, b, d) & (c, a, d, b) & (c, b, a, d) & (c, b, d, a) & (c, d, a, b) & (c, d, b, a) \\
(d, a, b, c) & (d, a, c, b) & (d, b, a, c) & (d, b, c, a) & (d, c, a, b) & (d, c, b, a)
\end{array}$$

2 On jette trois dés. On note X la variable aléatoire égale à la somme des trois dés. Calculer $P(X=k)$ pour $k=2,3,4,5,6,10$.

Comme chaque dés donne une valeur comprise entre 1 et 6, la variable aléatoire X prend ses valeurs dans l'ensemble $X(\Omega)=\{3,\dots,18\}$.
Pour modéliser cette expérience on choisit l'univers Ω contenant les triplets d'entiers compris entre 1 et 6 :

$$\Omega=\{1,\dots,6\}^3=\{(a,b,c)\mid 1\leqslant a,b,c\leqslant 6\}$$

Les cardinal de cet ensemble est : $\operatorname{Card}\Omega=6^3=216$
Chaque numéro a autant de chance d'arriver que les autres sur chaque dé, donc tous les triplets sont équiprobables, *i.e.,* Ω est muni de la probabilité uniforme.

On explicite maintenant les événements $(X=k)$ demandés pour calculer leurs probabilités.

L'événement $(X=2)$ est impossible donc $P(A_2)=0$.

Comme $(X=3)=\{(1,1,1)\}$ alors par équiprobabilité $P(X=3)=\frac{1}{216}$.

Comme $(X=4)=\{(1,1,2),(1,2,1),(2,1,1)\}$ alors $P(X=4)=\frac{3}{216}=\frac{1}{72}$.

Pour l'événement $(X=5)$ on obtient les trois permutations de $(1,1,3)$ et les trois permutations de $(1,2,2)$, donc six possibilités. Ainsi $P(X=5)=\frac{6}{216}=\frac{1}{36}$.

Pour l'événement $(X=6)$ on obtient $(2,2,2)$, les trois permutations de $(1,1,4)$ et les six permutations de $(1,2,3)$, donc dix possibilités. Ainsi $P(X=6)=\frac{10}{216}=\frac{5}{108}$.

Enfin pour l'événement $(X=10)$ on écrit :

$$\begin{array}{llll}
(1,3,6) & \text{donne} & 6 & \text{permutations}\\
(2,2,6) & & 3 & \text{permutations}\\
(1,4,5) & & 6 & \text{permutations}\\
(2,3,5) & & 6 & \text{permutations}\\
(2,4,4) & & 3 & \text{permutations}\\
(3,3,4) & & 3 & \text{permutations.}
\end{array}$$

Ainsi 27 triplets conviennent, et donc $P(X=10)=\frac{27}{216}=\frac{1}{8}$.

La suite pour k allant de 3 à 10 est 1, 3, 6, 10, 15, 21, 25, 27 sur 216. Pour k allant de 11 à 18 c'est la suite inverse.
On peut même démontrer que :

$$\forall k=1,\dots,20 \qquad P(X=k)=\begin{cases}\frac{(k-1)(k-2)}{2\times 6^3} & \text{si } 1\leqslant k\leqslant 8\\ -\frac{k^2-21k+83}{6^3} & \text{si } 7\leqslant k\leqslant 14\\ \frac{(20-k)(19-k)}{2\times 6^3} & \text{si } 13\leqslant k\leqslant 20.\end{cases}$$

3 Soit $k \in \{0, \dots, 26\}$. On pioche k lettres une par une dans un sac contenant les 26 lettres de l'alphabet.

a. Décrire l'univers modélisant cette expérience. Quel est son cardinal ?

On note S_k l'événement : «le S apparaît lors de l'un des k tirages» et T_k l'événement «le S apparaît lors du k-ème tirage».

b. Calculer la probabilité de S_k.

c. Exprimer T_k en fonction de S_k et S_{k-1} et en déduire sa probabilité.

Variante :

d. Calculer directement la probabilité de T_k.

e. Exprimer S_k en fonction des T_i et en déduire sa probabilité.

a. L'univers Ω est l'ensemble des listes de k éléments distincts de l'alphabet, donc :

$$\operatorname{Card}\Omega = \frac{26!}{(26-k)!}$$

En effet 26 lettres sont possibles pour la première, puis 25 pour la seconde, etc jusqu'à $(26-(k-1)) = 27-k$ pour la k-ème, donc :

$$\operatorname{Card}\Omega = 26 \times 25 \times \cdots \times (27-k) = \frac{26!}{(26-k)!}$$

On suppose que les lettres sont indiscernables au toucher, et donc les éléments de Ω sont équiprobables.

b. L'événement S_k est l'ensemble des listes contenant k éléments distincts dont le S.

Ce S peut être placé en k positions différentes. Ensuite pour les $k-1$ lettres restantes, il faut compter le nombre de listes de $k-1$ éléments distincts d'un ensemble à 25 éléments, donc :

$$\operatorname{Card} S_k = k \times \frac{25!}{(25-(k-1))!} = \frac{k\,25!}{(26-k)!}$$

Par équiprobabilité :

$$P(S_k) = \frac{\operatorname{Card} S_k}{\operatorname{Card}\Omega} = \frac{k \times 25! \times (26-k)!}{(26-k)! \times 26!} = \frac{k}{26}$$

En piochant k lettres dans le sac, la probabilité d'obtenir le S est $\frac{k}{26}$.

Effectivement si $k = 0$ alors on ne peut obtenir le S et si $k = 26$ alors on est certain de l'obtenir.

c. L'événement T_k signifie que l'on obtient le S dans les k premiers tirages mais pas dans les $(k-1)$ premiers tirages : $T_k = S_k \setminus S_{k-1}$.

On en déduit : $P(T_k) = P(S_k) - P(S_k \cap S_{k-1})$

Si l'événement S_{k-1} a lieu alors le S est obtenu lors des $(k-1)$ premiers tirages, donc *a fortiori* le S est obtenu lors des k premiers tirages. Ainsi $S_{k-1} \subseteq S_k$, puis $S_{k-1} \cap S_k = S_{k-1}$.

On peut donc calculer :

$$P(T_k) = P(S_k) - P(S_{k-1}) = \frac{k}{26} - \frac{k-1}{26} = \frac{1}{26}$$

La probabilité l'obtenir le S lors du tirage k est de $\frac{1}{26}$.

Ceci semble logique, le S a autant de chance d'arriver que toutes les autres lettres.

d. L'événement T_k contient les listes de k éléments distincts de l'alphabet dont le S en position k.

Ce S étant placé, il reste à compléter la liste avec une liste de $(k-1)$ éléments distincts parmi un ensemble à 25 éléments, donc :

$$\operatorname{Card} T_k = \frac{25!}{(25-(k-1))!} = \frac{25!}{(26-k)!}$$

Par équiprobabilité :

$$P(T_k) = \frac{\operatorname{Card} T_k}{\operatorname{Card} \Omega} = \frac{25! \times (26-k)!}{(26-k)! \times 26!} = \frac{1}{26}$$

On retrouve bien le résultat de la question précédente.

e. L'événement S_k signifie que le S est obtenu lors de l'un des tirages 1 à k, donc que l'un des événements T_1, $T_2, \ldots, T_k$ a lieu :

$$S_k = T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_k = \bigcup_{i=1}^{k} T_i$$

Si le S est pioché à un tirage i alors il ne peut être pioché à un autre tirage puisque les lettres ne sont pas remises dans le sac après chaque tirage. Ceci justifie que les événements T_i sont incompatibles : si $i \neq j$ alors $T_i \cap T_j = \varnothing$.

On en déduit, par additivité :

$$P(S_k) = \sum_{i=1}^{k} P(T_i)$$

La question précédente donne $P(S_k) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{26} = \frac{k}{26}$.

On retrouve bien le résultat de la question b.

4 Une urne contient une boule noire, deux boules rouges et sept boules blanches.

a. On pioche simultanément n boules de l'urne ($0 \leqslant n \leqslant 10$). Quelle est la probabilité d'obtenir la boule noire ? Au moins une rouge ?

b. On pioche n fois de suite une boule de l'urne ($n \in \mathbb{N}$) puis on la remet dans l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir la boule noire ? Au moins une rouge ?

a. L'univers Ω est l'ensemble des parties à n éléments de l'urne, laquelle contient 10 boules. Donc Ω est de cardinal $\binom{10}{n}$. De plus on suppose que toutes les boules sont identiques (à part leur couleur) et donc les éléments de Ω sont équiprobables.

On définit les événements :

- A : «On obtient la boule noire.»
- B : «On obtient au moins une boule rouge.»

Alors A est l'ensemble des parties contenant la boule noire et $n-1$ boules parmi les 9 autres boules, donc A est de cardinal $\binom{9}{n-1}$. Par équiprobabilité :

$$P(A) = \frac{\operatorname{Card} A}{\operatorname{Card} \Omega} = \frac{\binom{9}{n-1}}{\binom{10}{n}} = \frac{9!}{(n-1)!(10-n)!} \times \frac{n!(10-n)!}{10!} = \frac{n}{10}$$

La probabilité d'obtenir la boule noire est donc de $\frac{n}{10}$.

Si $n = 0$ alors cette probabilité est nulle car on ne pioche pas de boules.

Si $n = 1$ alors cette probabilité est de $\frac{1}{10}$, ce qui se comprend bien, on pioche une boule dans une urne contenant 10 boules dont une seule noire.

Si $n = 10$ alors cette probabilité est égale à 1 car on pioche toutes les boules.

Pour calculer la probabilité de B on considère son événement contraire $\overline{B}$: «on n'obtient pas de boule rouge». Ceci signifie que l'on obtient n boules parmi les 8 boules qui ne sont pas rouges, donc B est de cardinal $\binom{8}{n}$. Par équiprobabilité :

$$P(\overline{B}) = \frac{\operatorname{Card} \overline{B}}{\operatorname{Card} \Omega} = \frac{\binom{8}{n}}{\binom{10}{n}} = \frac{8!}{n!(8-n)!} \times \frac{n!(10-n)!}{10!} = \frac{(10-n)(9-n)}{90}$$

On en déduit :

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = \frac{90 - ((10-n)(9-n))}{90} = \frac{n^2 - 19n}{90} = \frac{n(19-n)}{90}$$

La probabilité d'obtenir au moins une boule rouge est donc de $\frac{n(19-n)}{90}$.

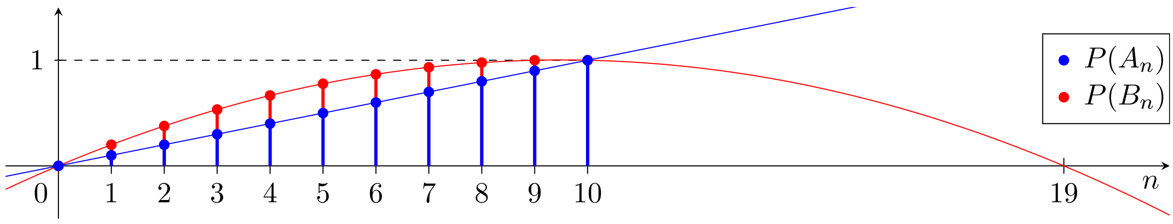
Si $n = 0$ alors cette probabilité est nulle car on ne pioche pas de boules.

Si $n = 1$ alors cette probabilité est de $\frac{18}{90} = \frac{2}{10}$, ce qui se comprend bien, on pioche une boule dans une urne contenant 10 boules dont deux rouges.

Si $n = 10$ alors cette probabilité est égale à $\frac{10 \times 9}{90}$ donc à 1. En effet on pioche toutes les boules donc on est certain d'en obtenir au moins une rouge.

Si $n = 9$ alors cette probabilité est égale à $\frac{9 \times 10}{90}$ donc à 1. En effet, on pioche 9 boules dans l'urne qui en contient 10, mais deux boules sont rouges donc on est certain d'avoir au moins une rouge.

On peut représenter ces probabilités sur un graphique. La probabilité de A est sur la droite d'équation $y = \frac{x}{10}$, celle de B est sur la parabole d'équation $\frac{x(19-x)}{90}$. Cette parabole est orientée vers le bas, elle coupe l'axe des abscisses aux points 0 et 19.



b. L'univers Ω contient maintenant les listes de n éléments parmi 10. Son cardinal est donc 10^n, et il est muni de la probabilité uniforme.

L'événement A est maintenant : «on obtient au moins une fois la boule noire», l'événement B est inchangé : «on obtient au moins une fois une boule rouge».

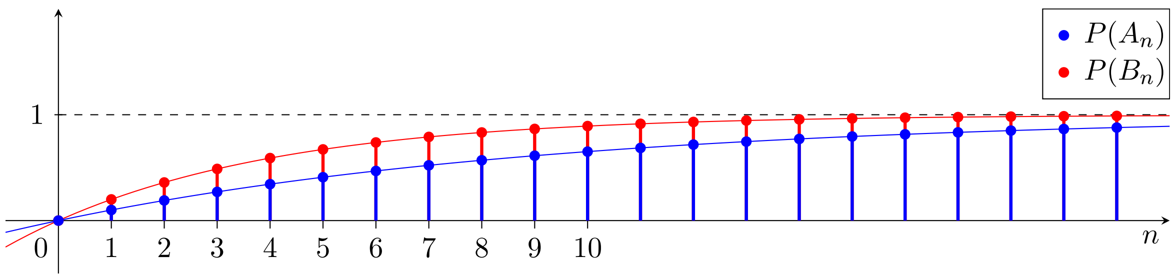
On considère les événements contraires $\overline{A}$: «on n'obtient jamais la noire» et $\overline{B}$: «on n'obtient jamais une rouge».

Alors $\overline{A}$ contient les listes de n éléments parmi 9, car 9 boules ne sont pas noires, et $\overline{B}$ contient les listes de n éléments parmi 8, car 8 boules ne sont pas rouges. Ainsi $\overline{A}$ est de cardinal 9^n et $\overline{B}$ est de cardinal 8^n. Par équiprobabilité :

$$P(A) = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^n \qquad \text{et} \qquad P(B) = 1 - \left(\frac{8}{10}\right)^n$$

On peut représenter graphiquement ses probabilités. Elles sont sur les courbes des fonctions f et g définie par $f(x) = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^x$ et $g(x) = 1 - \left(\frac{8}{10}\right)^x$.

Ce sont des formes exponentielles, par exemple $f(x) = 1 - e^{x \ln \frac{9}{10}}$.



(5) Combien de mains au Poker contiennent un brelan, mais pas de full ? Combien contiennent deux paires ?

On rappelle que le Poker se joue avec un jeu de 52 cartes, réparties en 4 couleurs et 13 valeurs. Une paire est un ensemble de deux cartes de même valeur, un brelan est un ensemble de trois cartes de même valeur, un full est l'union d'un brelan et d'une paire.

Il existe 13 valeurs possibles pour un brelan : du 2 à l'as.

Pour une valeur donnée il existe 4 brelans : c'est le nombre de façons de choisir 3 éléments parmi 4. Par exemple il existe 4 brelans d'as, 4 brelans de roi, etc.

Il existe donc 4×13 brelans, auxquels il faut ajouter deux cartes de valeurs différentes, sinon on aurait un full.

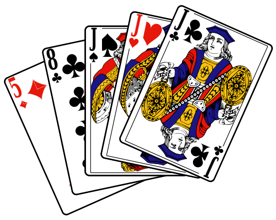
Il faut donc choisir 2 valeurs parmi les 12 restantes, soit $\binom{12}{2} = 6 \times 11$ possibilités.

Et une fois ces valeurs choisies il existe 4 cartes de chaque valeur, une par couleur.

Le nombre de mains contenant un brelan est donc :

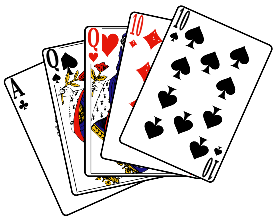
$$13 \times 4 \times 6 \times 11 \times 4^2 = 2^7 \times 3 \times 11 \times 13$$

Par exemple pour le brelan suivant :



On a 13 façons de choisir le valet, puis 4 brelans de valets, ici on a choisi les valets de pique, cœur et trèfle. Puis $\binom{12}{2}$ façons de choisir le cinq et le huit, et enfin 4 cinq et 4 huit possibles.

Pour les deux paires : on choisit deux valeurs parmi 13, soit $\binom{13}{2} = 13 \times 6$ possibilités. Par exemple une paire de dames et une paire de 10.



Pour une paire donnée il existe $\binom{4}{2} = 6$ façons de choisir la paire, on choisit deux couleurs parmi les 4 possibles. Par exemple pour les dames on choisit pique et cœur et pour les 10 on choisit carreau et pique.

Ensuite il reste une carte à choisir parmi les $52 - 8 = 44$ cartes qui n'ont pas les valeurs des paires, c'est-à-dire dans notre cas ni une dame ni un 10.

Le nombre de mains contenant deux paires est donc :

$$13 \times 6 \times 6^2 \times 44 = 2^5 \times 3^3 \times 11 \times 13$$

6 On jette cinq dés. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de six obtenus.

a. Déterminer la loi de X.

b. Vérifier que l'on obtient bien une loi de probabilité de X.

a. Comme on jette cinq dés, le nombre de six obtenus est un entier compris entre 0 et 5, donc $X(\Omega) = \{0, \ldots, 5\}$.

On choisit pour univers l'ensemble des listes de 5 entiers parmi $\{1, \ldots, 6\}$:

$$\Omega = \{1, \ldots, 6\}^5 = \{(a_1, \ldots, a_5) \mid \forall i = 1, \ldots, 5 \quad a_i \in \{1, \ldots, 6\}\}$$

Cet univers contient 6^5 éléments, lesquels sont équiprobables car on suppose que les dés ne sont pas truqués.

Soit $k \in \{0, \ldots, 5\}$. On calcule le nombre de tirages pour lesquels $X = k$, donc le nombre de tirages contenant exactement k six.

Il existe $\binom{5}{k}$ façons de choisir les places pour les k six, puis 5^{5-k} façons de choisir les nombres aux $5 - k$ places restantes. On en déduit $\mathrm{Card}(X = k) = \binom{5}{k} 5^{5-k}$ puis par équiprobabilité :

$$P(X = k) = \frac{\binom{5}{k} 5^{5-k}}{6^5}$$

b. La première condition est évidente :

$$\forall k = 0, \ldots, 5 \qquad P(X = k) = \frac{\binom{5}{k} 5^{5-k}}{6^5} \geqslant 0.$$

Pour vérifier que la somme des $P(X = k)$ est bien égale à 1 on applique la formule du binôme :

$$\sum_{k=0}^{5} P(X = k) = \frac{1}{6^5} \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} 1^k 5^{5-k} = \frac{(1 + 5)^5}{6^5} = 1.$$

On a bien obtenu une loi de probabilité pour X.

Ceci implique que :

$$\forall k = 0, \ldots, 5 \qquad 0 \leqslant P(X = k) \leqslant 1.$$

Le fait que chaque probabilité soit inférieure à 1 n'est *a priori* pas immédiat.

1 Par combien de zéros se termine 1000! ?

Le nombre 1000! est un entier, donc on peut le décomposer en facteurs premiers :

$$1000! = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i}$$

où $p_1, \dots p_n$ sont les nombres premiers, tous distincts, intervenant dans cette décomposition, et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont des entiers naturels strictement positifs.

On peut supposer que les nombres premiers $p_1, \dots, p_n$ sont classés par ordre croissant. Alors les trois premiers sont 2, 3 et 5 et :

$$1000! = 2^{\alpha_1} \times 3^{\alpha_2} \times 5^{\alpha_3} \times \prod_{i=4}^{n} p_i^{\alpha_i}$$

En renommant α_1 et α_3 en a et b on obtient :

$$1000! = 2^a \times 5^b \times C \qquad \text{avec} \qquad C = 3^{\alpha_2} \times \prod_{i=4}^{n} p_i^{\alpha_i}$$

L'entier C est produit de nombres premiers différents de 2 et 5, il ne peut donc être multiple de 10.

Le nombre 2 est plus fréquent que 5 dans la décomposition en facteurs premiers de 1000!, donc $a \geqslant b$ et on peut écrire :

$$1000! = 10^b \times 2^{a-b} \times C$$

Le nombre de zéros terminant l'écriture de 1000! est donc l'entier b.

C'est le nombre d'apparitions de 5 dans la décomposition de 1000! en facteurs premiers.

Ensuite on considère le développement de 1000! :

$$10000! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \cdots \times 1000$$

Ce nombre contient :

- 200 multiples de 5 (5, 10, 15, etc jusqu'à $1000 = 200 \times 5$),
- 40 multiples de 25 (25, 50, 75, etc jusqu'à 1000),
- 8 multiples de 125,
- 1 multiples de 625.

Chaque multiple de 5 apporte un 5 dans la décomposition de 1000! en facteurs premiers. Chaque multiple de 25 en apporte un de plus, etc. On a ainsi tous les 5 de la décomposition. On en déduit que $b = 200 + 40 + 8 + 1 = 249$.

Finalement 1000! se termine par 249 zéros.

Remarque. Une autre question est : combien de chiffres possède 1000! ?

On ne peut répondre sans recours à un ordinateur.

En effet le nombre de chiffres de 1000! est l'entier naturel n tel que :

$$10^{n-1} \leqslant 1000! < 10^n$$

La fonction logarithme décimal est strictement croissante donc :

$$n-1 \leqslant \log(1000!) < n$$

Ceci montre que :

$$n-1 = \lfloor \log(1000!) \rfloor$$

Or :

$$\log(1000!) = \log\left(\prod_{k=1}^{1000} k\right) = \sum_{k=1}^{1000} \log k$$

Donc :

$$n = 1 + \left\lfloor \sum_{k=1}^{1000} \log k \right\rfloor$$

On exécute le programme :

```
from math import log
s=0                  # Initialisation de la somme
for k in range(1,1001):
    s=s+log(k,10)    # logarithme décimal
n=int(1+s)
print("n =",n)
```

Il donne $n = 2\,568$. Ainsi 1000! contient 2 568 chiffres.

On peut aussi déterminer l'écritude scientifique de 1000! grâce à l'instruction :

```
print(10**(s-n+1))
```

On en déduit que $1000! \simeq 4{,}024 \times 10^{2\,567}$.

2 Un anagramme d'un mot M est un mot composé des mêmes lettres que M.
Combien les mots bûche, tarte, galette et millefeuilles ont-ils d'anagrammes ?

Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est $n!$ donc le nombre d'anagrammes du mot *bûche* est $5! = 120$.

Pour les anagrammes du mot *tarte* le problème est différent, puisque deux lettres sont identiques. En effet si on inverse les deux t alors le mot est inchangé.
Deux méthodes sont possibles.

Méthode 1.
On différencie les deux t : t_1art_2e
Le nombre d'anagrammes du mot t_1art_2e est alors $5! = 120$.
Mais chaque permutation de l'ensemble t_1t_2 donne en fait le même mot, et on a $2! = 2$ permutations de l'ensemble t_1t_2. Donc le nombre d'anagrammes du mot *tarte* est $\frac{5!}{2!} = 60$.

Méthode 2.
Pour former un anagramme du mot *tarte* on place d'abord les deux t. Le nombre de façons de choisir 2 places parmi les 5 places est $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = 10$.
Ensuite il reste trois places pour les trois autres lettres *are*. Le nombre de façons de placer ces trois lettres sur les trois places est $3!$, c'est le nombre de permutations de l'ensemble *are*.
Finalement le nombre d'anagrammes du mot *tarte* est $\binom{5}{2} \times 3! = 10 \times 6 = 60$.
On retrouve bien le même résultat.

Les mot *galette* contient 7 lettres, dont deux t et deux e.
Par la première méthode on obtient $\frac{7!}{2!2!}$ anagrammes. Le nombre de permutations d'un ensemble à 7 éléments est $7!$, mais on le divise par le nombre de permutations de l'ensemble des deux t et par le nombre de permutations de l'ensemble des deux e.

Par la seconde méthode on obtient $\binom{7}{2}\binom{5}{2}3!$ anagrammes. En effet le nombre de façons de choisir les places pour les deux t est $\binom{7}{2}$, puis le nombre de façons de choisir les places pour les deux e est $\binom{5}{2}$ car il ne reste plus que 5 places, et ensuite on place les trois lettres restantes.
On vérifie que les deux résultats sont égaux : $\binom{7}{2}\binom{5}{2}3! = \frac{7!}{2!5!}\frac{5!}{2!3!}3! = \frac{7!}{2!2!}$.

Le mot *millefeuilles* contient 13 lettres dont 4 l, 3 e, 2 i et 4 lettres distinctes : *mfus*.
Par la première méthode on compte $\frac{13!}{4!3!2!}$ anagrammes.
Par la seconde on en compte $\binom{13}{4}\binom{9}{3}\binom{6}{2}4!$.
On vérifie : $\binom{13}{4}\binom{9}{3}\binom{6}{2}4! = \frac{13!}{4!9!}\frac{9!}{3!6!}\frac{6!}{2!4!}4! = \frac{13!}{4!3!2!}$.
On peut remarquer que l'on obtient le même résultat si on place d'abord les i, puis les e, puis les l, ou même dans un autre ordre.

3 De combien de façons peut-on former deux équipes de 3 avec 6 personnes ?
Trois équipes de 3 avec 9 personnes ?

Méthode 1.

Il existe $\binom{6}{3}$ façons de choisir 3 personnes parmi 6.

Chacune donne une façon de former deux équipes de 3 avec 6 personnes, car les 3 personnes restantes constituent la seconde équipe.

Mais chaque répartition en équipe est comptée deux fois. Par exemple la répartition $(\{abc\}, \{def\})$ est identique à la répartition $(\{def\}, \{abc\})$.

Le nombre de façons de former deux équipes de 3 avec 6 personnes est donc $\frac{1}{2}\binom{6}{3}$.

Méthode 2.

Isolons le joueur a. Le nombre d'équipes le contenant est $\binom{5}{2}$: il suffit de choisir 2 personnes parmi les 5 autres. L'autre équipe est alors constituée des 3 personnes restantes.

Toutes les possibilités sont comptabilisées ainsi car le joueur a est obligatoirement dans une équipe.

Le nombre de façons de former deux équipes de 3 avec 6 personnes est donc $\binom{5}{2}$.

On vérifie que les deux méthodes donnent le même résultat :

$$\frac{1}{2}\binom{6}{3} = \frac{6!}{2 \times 3! \times 3!} = 10 \qquad \text{et} \qquad \binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \times 3!} = 10$$

Le nombre demandé est donc 10.

Pour le nombre de façons de former trois équipes de 3 avec 9 personnes on utilise encore les deux méthodes.

Selon la méthode 1 ce nombre est $\frac{\binom{9}{3}\binom{6}{3}}{3!}$.

En effet on a $\binom{9}{3}$ façons de choisir la première équipe, c'est le nombre de façons de choisir 3 personnes parmi 9, puis $\binom{6}{3}$ façons de choisir une équipe de 3 avec les 6 personnes restantes.

On a obtenu trois équipes ordonnées, que l'on peut permuter de 3! façons. Chaque répartition en trois équipes a été obtenue 3! fois, donc on divise le résultat par 3!.

Selon la méthode 2 on isole le joueur a. On a $\binom{8}{2}$ possibilités pour son équipe. Puis il reste 6 personnes. D'après la question précédente on a $\binom{5}{2}$ façons de les répartir en deux équipes de 3. Le nombre attendu est donc $\binom{8}{2}\binom{5}{2}$.

On vérifie :

$$\frac{1}{3!}\binom{9}{3}\binom{6}{3} = \frac{9!6!}{3!6!3!3!3!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{6^3} = 8 \times 7 \times 5 = 280$$

$$\binom{8}{2}\binom{5}{2} = \frac{8 \times 7}{2} \times \frac{5 \times 4}{2} = 280$$

On obtient bien le même résultat.

$\boxed{4}$ Un domino contient deux chiffres compris entre 0 et 6. Un jeu de dominos contient tous les dominos possibles, mais aucun en double.

a. Combien de dominos possède un jeu ?

b. Combien de paires de dominos ont au moins un numéro en commun ?

c. Combien de mains de sept dominos sont possibles au début du jeu ? Combien de ceux-ci contiennent au moins un double ?

a. Il existe 7 dominos doubles : du double 0 au double 6.

Un domino simple contient 2 numéros distincts parmi 7, et évidemment on ne tient pas compte de l'ordre : les dominos $\{5, 2\}$ et $\{2, 5\}$ sont identiques par exemple.

Il existe donc $\binom{7}{2} = \frac{7\times 6}{2} = 21$ dominos simples.

Finalement un jeu contient $7 + 21$ soit 28 dominos.

b. On compte le nombre de paires de dominos ayant un numéro en commun.

<u>Méthode 1</u>.

Ces paires ne peuvent contenir deux doubles, car il n'existe qu'un seul double de chaque numéro, et donc deux doubles différents ne peuvent avoir un numéro commun.

On sépare les paires contenant un double de celles n'en contenant pas.

Il existe 7 doubles. Pour chacun il existe 6 dominos ayant un numéro en commun.

Par exemple avec le double 2 il existe les dominos $(2, a)$ avec a différent de 2, donc 6 possibilités.

Ceci donne 7×6 paires de dominos ayant un numéro en commun dont l'un des dominos est un double.

On compte maintenant les paires sans double.

Pour le premier domino de la paire 21 choix sont possibles puisqu'il existe 21 dominos simples.

Ce domino est de la forme $\{a, b\}$ avec $a \neq b$. Il peut correspondre au second domino par le numéro a ou par le numéro b, mais pas par les deux puisqu'il n'existe qu'un seul domino $\{a, b\}$.

Il existe 5 dominos qui correspondent au domino $\{a, b\}$ par le numéro a, il s'agit des dominos $\{a, c\}$ où c est différent de b (car le domino $\{a, b\}$ est unique) et de a (car le domino doit être simple). Ceci fait 5 possibilités pour le c. De même 5 dominos correspondent par le numéro b.

Le nombre de couples de dominos simples ayant un numéro en commun est donc $21 \times 5 + 5 = 210$.

Mais il s'agit de couples ordonnés, par exemple on a compté le couple $(\{a, b\}, \{a, c\})$ et le couple $(\{a, c\}, \{a, b\})$. Chaque paire est comptabilisées deux fois.

Le nombre de paires de dominos simples ayant un numéro en commun est donc $\frac{210}{2} = 105$.

Au total on a donc $105 + 42 = 147$ paires de dominos ayant un numéro en commun.

Méthode 2.

Une paire correspond par un numéro, lequel est unique et doit être choisi parmi les 7 numéros.

Ce numéro étant choisi il existe $\binom{7}{2}$ façons de choisir 2 dominos parmi les 7 qui contiennent ce numéro.

On a donc $7 \times \binom{7}{2}$ paires de dominos ayant un numéro en commun.

Ceci donne $7\frac{7\times 6}{2} = 49 \times 3 = 147$ comme précédemment.

On peut ajouter que le nombre total de paires est $\binom{28}{2} = 14 \times 27$. Si on pioche deux dominos au hasard alors par équiprobabilité la probabilité que l'on obtienne deux numéros qui correspondent est $\frac{7\times7\times3}{14\times27} = \frac{7}{18} \simeq 0{,}3888$.

c. Un jeu de 7 dominos est une partie à 7 éléments de l'ensemble de tous les dominos. Il existe $\binom{28}{7}$ telles parties.

Parmi les 28 dominos, 7 sont doubles et 21 sont simples. Le nombre de jeux sans double est donc $\binom{21}{7}$, c'est le nombre de parties à 7 éléments de l'ensemble des 21 dominos simples.

Le nombre de jeux contenant au moins un double est donc $\binom{28}{7} - \binom{21}{7}$.

On peut en déduire que lorsqu'au début du jeu on pioche 7 dominos au hasard, la probabilité d'avoir au moins un double dans son jeu est $1 - \frac{\binom{21}{7}}{\binom{28}{7}}$.

On calcule que cette probabilité est égale à $1 - \frac{19\times17}{23\times13\times11} \simeq 0{,}9018$.

$\boxed{5}$ Un tournoi de Tennis fait participer $2n$ joueurs, avec $n \geqslant 1$. On souhaite organiser n matchs où chaque joueur en rencontre un autre.

Soit a_n le nombre de possibilités d'organisation.

a. En isolant le joueur $2n$, justifier que $a_n = (2n-1)a_{n-1}$ pour tout $n \geqslant 2$.

b. Calculer le terme général de a_n.

a. Le joueur numéro $2n$ doit rencontrer un joueur parmi les $2n-1$ autres joueurs, il a donc $2n-1$ possibilités de matchs. Il reste ensuite $2n-2$ soit $2(n-1)$ joueurs, et le nombre d'organisations possibles des matchs entre ces joueurs est a_{n-1}. Ceci montre que $a_n = (2n-1)a_{n-1}$.

b. Si $n = 1$ alors on a deux joueurs, donc une seule organisation possible : un match unique, opposant les deux joueurs. Ainsi $a_1 = 1$.

Pour $n = 2$ la formule précédente donne $a_2 = 3a_1$, donc $a_2 = 3 \times 1$.

Pour $n = 3$ la formule précédente donne $a_3 = 5a_2$, donc $a_3 = 5 \times 3 \times 1$.

On remarque que :

$$a_n = (2n-1)a_{n-1} = (2n-1)(2n-3)a_{n-3} = \cdots = (2n-1)(2n-3)\cdots \times 3 \times 1$$

Ceci s'écrit, en ajoutant les nombres pairs dans le produit :

$$a_n = \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)\cdots \times 2 \times 1}{(2n)(2n-2)\cdots \times 4 \times 2} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

On démontre cette formule par récurrence. Soit $\mathscr{P}_n : a_n = \frac{(2n)!}{2^n n!}$

Initialisation. Si $n = 1$ alors $\frac{(2n)!}{2^n n!} = 1$. Nous avons vu que $a_1 = 1$, donc la formule est vraie pour $n = 1$.

Hérédité. Supposons que pour un certain $n \geqslant 2$ la formule $\mathscr{P}_{n-1}$ est vraie. D'après la question précédente $a_n = (2n-1)a_{n-1}$. Ceci donne :

$$a_n = (2n-1)\frac{(2(n-1))!}{2^{n-1}(n-1)!} = \frac{(2n-1)(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!} \times \frac{2n}{2n} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

La formule est bien valable au rang n, l'hérédité est démontrée.

Conclusion. Par récurrence, la formule est valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad a_n = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

Remarque. Pour vérification, on peut procéder autrement pour compter le nombre d'organisations possibles.

On classe tous les joueurs : ceci donne $(2n)!$ permutations, et on fait jouer le premier avec le second, le troisième avec le quatrième, etc.

Mais alors on peut permuter chaque couple, ceci ne change pas l'organisation. Ainsi on divise par 2^n car on a n matchs.

On obtient une liste ordonnées de n matchs, et comme on ne tient pas compte de l'ordre des matchs on peut diviser le nombre de telles listes par $n!$, le nombre de permutations des n matchs.

Ceci donne $\frac{(2n)!}{2^n n!}$ organisations possibles, que l'on a comptées de la façon suivante :

Nombre de listes de la forme	$((\alpha,\beta),(\gamma,\delta),\ldots)$:	$(2n)!$
Nombre de listes de la forme	$(\{\alpha,\beta\},\{\gamma,\delta\},\ldots)$:	$\frac{(2n)!}{2^n}$
Nombre d'ensembles de la forme	$\{\{\alpha,\beta\},\{\gamma,\delta\},\ldots\}$:	$\frac{(2n)!}{2^n n!}$

6 Soit E et F deux ensembles non-vides de cardinaux finis p et n. Calculer le nombre

a. d'applications de E dans F
b. de bijections de E dans F
c. d'injections de E dans F
d. de surjections de E dans F si $n = 1$ ou $n = 2$
e. de surjections de E dans F si $n = 3$.

a. On compte le nombre d'applications de E dans F.

   Pour chacun des p éléments de E il existe n images possibles, chaque élément de F.

   Il existe donc n^p applications possibles de E dans F.

b. On compte maintenant le nombre d'applications bijectives de E dans F.

   Si $f : E \to F$ est une bijection alors tout élément de F admet un et un seul antécédent par f. Ceci implique, dans le cas où E et F sont finis, que E et F ont autant d'éléments : $p = n$.

Ainsi, si $p \neq n$ alors il n'existe pas de bijection de E dans F.

On suppose maintenant que $p = n$.

Pour le premier élément de E il existe n images possibles. Le second ne doit pas avoir la même image puisque l'application est bijective, donc il a $n-1$ images possibles. Le troisième a $n-2$ images possibles, etc, jusqu'au dernier pour qui il reste une et une seul image possible.

Le nombre de bijections de E dans F s'ils sont de même cardinal est donc $n!$.

Effectivement, si on ordonne les éléments de E : $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ alors le choix d'une bijection de E dans F revient à ordonner les éléments de F. Or les nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est bien $n!$.

c. On compte maintenant le nombre d'applications injectives de E dans F.

Si $f : E \to F$ est une injection alors tout élément de F admet au plus un antécédent par f. Ceci implique, dans le cas où E et F sont finis, que F a plus d'éléments que E : $n \geqslant p$.

Ainsi, si $n < p$ alors il n'existe pas d'injection de E dans F.

On suppose maintenant que $p \leqslant n$.

Pour le premier élément de E il existe n images possibles. Le second ne doit pas avoir la même image puisque l'application est injective, donc il a $n-1$ images possibles. Le troisième a $n-2$ images possibles, etc.

Finalement le nombre d'applications injectives de E dans F est :

$$n \times (n-1) \times \cdots \times (n-(p-1)) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

d. Si $n = 1$ alors l'ensemble F possède un et un seul élément, que l'on note y : $F = \{y\}$.

Il existe donc une et une seule application de E dans F, c'est l'application constante égale à y. En effet, les éléments de E ne peuvent être envoyés que sur y.

Comme y admet au moins un antécédent (car E est non-vide) alors l'unique application existant de E dans F est surjective.

Ainsi, si F est de cardinal 1 alors il existe une et une seule application surjective de E dans F.

On suppose maintenant que F est de cardinal 2, et note y_1 et y_2 ses deux éléments : $F = \{y_1, y_2\}$.

Il est plus facile de compter le nombre d'applications non surjectives de E dans F.

En effet une application $f : E \to F$ n'est pas surjective si y_1 ou y_2 n'admet pas d'antécédent. Ceci signifie que f est constante égale à y_1 ou constante égale à y_2.

Le nombre d'applications totale de E dans F est 2^p d'après la question a, le nombre d'applications non surjectives est 2 (les deux constantes), donc le nombre d'applications surjectives de E dans F est $2^p - 2$.

e. Si $n = 3$ alors le nombre d'applications de E dans F est 3^p.

On retire du compte les applications constantes, au nombre de 3, et les applications surjectives de E dans un sous-ensemble de F à 2 éléments, qui sont au nombre de $3(2^p - 2)$. En effet F a trois éléments dont il admet $\binom{3}{2} = 3$ parties à 2 éléments. Une telle partie étant choisie, il existe $2^p - 2$ surjections de E dans cette partie d'après la question précédente.

Il reste alors les applications surjectives, elles sont donc au nombre de $3^p - 3 \times 2^p + 3$.

On remarque que ce nombre est nul si $p = 1$ ou $p = 2$. En effet si $f : E \to F$ est une surjection entre deux ensembles finis alors le premier a plus d'éléments que le second.

La formule générale donnant le nombre de surjections d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments est :

$$S_{p,n} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \tbinom{n}{k} k^p & \text{si } p \geqslant n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$\boxed{7}$ Soit n et p deux entiers naturels.

a. Combien existe-t-il de p-listes $(x_1, \dots, x_p)$ d'entiers naturels tels que

$$0 \leqslant x_1 < x_2 < \dots < x_p \leqslant n\,?$$

b. Combien existe-t-il de listes strictement croissantes d'entiers naturels inférieurs ou égaux à n ?

On note $\mathscr{L}_p^c(n)$ l'ensemble des p-listes strictement croissantes d'entiers naturels compris entre 0 et n.

a. Soit $\mathscr{P}_p(n)$ l'ensemble des parties de $\{0, \dots, n\}$ à p éléments. Alors les ensembles $\mathscr{L}_p^c(n)$ et $\mathscr{P}_p(n)$ sont en bijection :

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_p^c(n) &\xrightarrow{\sim} \mathscr{P}_p(n) \\ (x_1, \dots, x_p) &\longmapsto \{x_1, \dots, x_p\} \end{aligned}$$

On en déduit $\operatorname{Card} \mathscr{L}_p^c(n) = \operatorname{Card} \mathscr{P}_p(n) = \binom{n+1}{p}$.

b. Soit $\mathscr{L}^c(n)$ l'ensemble des listes strictement croissantes d'entiers naturels compris entre 0 et n. Cet ensemble peu être trié selon le nombre d'éléments des listes :

$$\mathscr{L}^c(n) = \bigcup_{p=0}^{n} \mathscr{L}_p^c(n)$$

Cette union est disjointe, donc :

$$\operatorname{Card} \mathscr{L}^c(n) = \sum_{p=0}^{n} \operatorname{Card} \mathscr{L}_p^c(n) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n+1}{p} = 2^{n+1}$$

8 Soit n et p deux entiers naturels avec p non-nul. On note $C_{n,p}$ le nombre de p-listes d'entiers naturels $(x_1, \dots, x_p)$ telles que $x_1 + \cdots + x_p = n$.

a. Calculer $C_{n,1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $C_{0,p}$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

b. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $p \geqslant 2$:

$$C_{n,p} = \sum_{k=0}^{n} C_{k,p-1}$$

c. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$:

$$C_{n+1,p+1} = C_{n,p+1} + C_{n+1,p}$$

d. Donner une formule générale exprimant $C_{n,p}$ comme coefficient du binôme.

Démontrer cette formule.

a. On obtient $C_{n,1} = C_{0,p} = 1$

b. On note $L_{n,p}$ l'ensemble dont $C_{n,p}$ est le cardinal, et φ_k l'application de $L_{k,p-1}$ dans $L_{n,p}$ qui à une suite $(x_1, \dots, x_{p-1})$ associe la suite $(x_1, \dots, x_{p-1}, n-k)$.

Alors φ_k est une bijection et $L_{n,p}$ est l'union disjointe des $L_{k,p-1}$ pour k allant de 0 à n. On en déduit la formule demandée.

c. Il suffit d'écrire :

$$C_{n+1,p+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{k,p} = \sum_{k=0}^{n} C_{k,p} + C_{n+1,p} = C_{n,p+1} + C_{n+1,p}$$

d. On démontre que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$:

$$C_{n,p} = \binom{n+p-1}{p-1}$$

Ceci par récurrence sur p puis sur n, ou l'inverse.

On peut expliquer ce résultat par le dénombrement.

C'est le nombre de façons de placer $p-1$ boules dans une ligne de $n+p-1$ trous. Il reste alors n trous vides, séparés par les boules, donc regroupés en p suites de trous contigus. Les x_k sont les cardinaux de ces p suites.

9 Une urne contient 8 boules bleues et 4 boules rouges.

a. On tire simultanément deux boules de l'urne. Quelle est la probabilité de tirer deux bleues ? Deux rouges ? Une boule de chaque couleur ?

b. On tire trois boules maintenant. Quelle est la probabilité de tirer trois boules bleues ? Trois boules rouges ? Au moins une boule bleue et une boule rouge ? Exactement une boule bleue ?

a. On pioche 2 boules parmi 12, le nombre de résultats possibles est donc le nombre de parties à 2 éléments d'un ensemble à 12 éléments, c'est-à-dire $\binom{12}{2} = \frac{12\times 11}{2} = 66$.

On suppose que les boules sont indiscernables au toucher et à la pesée, donc les résultats sont équiprobables.

On note respectivement A, B, C les événements «tirer deux bleues», «tirer deux rouges» et «tirer deux boules de couleurs différentes».

L'événement A contient les sous-ensembles à 2 éléments de l'ensemble des 8 boules bleues, donc il est de cardinal $\binom{8}{2} = \frac{8\times 7}{2} = 28$.

L'événement B contient les sous-ensembles à 2 éléments de l'ensemble des 4 boules rouges, donc il est de cardinal $\binom{4}{2} = \frac{4\times 3}{2} = 6$.

L'événement C contient les sous-ensembles avec une boule bleue parmi les 8 boules bleues et une boule rouge parmi les 4 boules rouges, donc il est de cardinal $\binom{8}{1}\binom{4}{1} = 32$.

Par équiprobabilité :

$$P(A) = \frac{28}{66} = \frac{14}{33} \qquad P(B) = \frac{6}{66} = \frac{3}{33} \qquad P(C) = \frac{32}{66} = \frac{16}{33}$$

On remarque que $P(A) + P(B) + P(C) = 1$. Effectivement la famille (A, B, C) est un système complet d'événements : en piochant deux boules on obtient soit deux boules bleues, soit deux boules rouges, soit une boule de chaque couleur.

b. On pioche 3 boules parmi 12 donc le nombre de résultats possibles est :

$$\binom{12}{3} = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2} = 220$$

On nomme les événements :

- A : «On obtient trois boules bleues.»
- B : «On obtient trois boules rouges.»
- C : «On obtient au moins une boule bleue et une boule rouge.»
- D : «On obtient exactement une boule bleue.»

De même que dans la question précédente :

$$\text{Card}\, A = \binom{8}{3} = 56 \qquad \text{Card}\, B = \binom{4}{3} = 4$$

Par équiprobabilité :

$$P(A) = \frac{56}{220} = \frac{14}{55} \qquad P(B) = \frac{4}{220} = \frac{1}{55}$$

L'événement $\overline{C}$ signifie que l'on obtient trois boules de la même couleur, donc trois boules bleues ou trois boules rouges. Ainsi $\overline{C} = A \cup B$.

De plus A et B sont incompatibles donc $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. On calcule :

$$P(C) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) = \frac{40}{55} = \frac{8}{11}$$

L'événement D est de cardinal $\binom{8}{1}\binom{4}{2} = 8 \times 6 = 48$. En effet on compte les sous-ensembles contenant une boule parmi les 8 boules bleues et 2 boules parmi les 4 rouges. Par équiprobabilité :

$$P(D) = \frac{48}{220} = \frac{12}{55}$$

10 Soit a et n deux entiers tels que $0 \leqslant a \leqslant n$.

Soit k un entier tel que $k \leqslant a$ et $k \leqslant n - a$.

a. Démontrer par dénombrement la formule :

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{a}{i}\binom{n-a}{k-i} = \binom{n}{k}.$$

On possède un sac avec n boules dont a sont blanches. On pioche simultanément k boules dans ce sac. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

b. Déterminer la loi de X. Retrouver ainsi la formule de la question précédente.

c. Calculer son espérance.

a. Considérons un ensemble E à n éléments dont a ont une propriété particulière, par exemple un ensemble de n boules dont a sont blanches.

Soit $\mathscr{P}_k(E)$ l'ensemble des parties à k éléments de E. Cet ensemble est de cardinal $\binom{n}{k}$.

Soit i un entier tel que $0 \leqslant i \leqslant k$. On note $\mathscr{P}_k^i(E)$ l'ensemble des éléments de $\mathscr{P}_k(E)$ contenant exactement i boules blanches. On a alors une union disjointe

$$\mathscr{P}_k(E) = \bigcup_{i=0}^{k} \mathscr{P}_k^i(E).$$

Ceci donne :

$$\operatorname{Card}\left(\mathscr{P}_k(E)\right) = \sum_{i=0}^{k} \operatorname{Card}\left(\mathscr{P}_k^i(E)\right). \tag{1}$$

Tout élément de $F \in \mathscr{P}_k^i(E)$ contient i boules blanches et $k - i$ boules non-blanches, donc est l'union disjointe d'un sous-ensemble à i éléments de l'ensemble des boules blanches et d'un sous-ensemble à $k - i$ éléments de l'ensemble des boules non blanches. Il existe $\binom{a}{i}$ sous-ensembles à i éléments d'un ensemble à a éléments et $\binom{n-a}{k-i}$ sous-ensembles à $k - i$ éléments d'un ensemble à $n - a$ éléments, ce qui montre que l'ensemble $\mathscr{P}_k^i(E)$ est de cardinal $\binom{a}{i} \times \binom{n-a}{k-i}$.

On peut être plus précis dans la justification : soit E_1 l'ensemble des boules blanches de E, et E_2 celui des boules non-blanches de E, si bien que $E = E_1 \cup E_2$, cette union étant disjointes. Alors l'application :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathscr{P}_k^i(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}_i(E_1) \times \mathscr{P}_{k-i}(E_2) \\ F & \longmapsto & (F \cap E_1, F \cap E_2) \end{array}$$

est bijective, de réciproque :

$$g : \begin{array}{rcl} \mathscr{P}_i(E_1) \times \mathscr{P}_{k-i}(E_2) & \longrightarrow & \mathscr{P}_k^i(E) \\ (F_1, F_2) & \longmapsto & F_1 \cup F_2. \end{array}$$

On peut démontrer que ces deux applications sont bien définies et vérifient $f \circ g = \mathrm{id}$, $g \circ f = \mathrm{id}$.

Comme f est bijective alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{Card}\left(\mathscr{P}_k^i(E)\right) &= \mathrm{Card}\left(\mathscr{P}_i(E_1) \times \mathscr{P}_{k-i}(E_2)\right) \\ &= \mathrm{Card}\left(\mathscr{P}_i(E_1)\right) \times \mathrm{Card}\left(\mathscr{P}_{k-i}(E_2)\right) = \binom{a}{i} \times \binom{n-a}{k-i}. \end{aligned}$$

L'égalité (1) donne donc :

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{a}{i}\binom{n-a}{k-i}.$$

b. Déterminons d'abord $X(\Omega)$.

Pour tout entier i, l'événement $(X = i)$ peut avoir lieu si $0 \leqslant i \leqslant k$ car on pioche k boules.

De plus X est le nombre de boules blanches obtenues et $k - X$ est le nombre de boules non blanches obtenues, donc $0 \leqslant i \leqslant a$ et $0 \leqslant k - i \leqslant n - a$, ce qui donne $k - n + a \leqslant i \leqslant k$. Comme $k \leqslant a$ et $k \leqslant n - a$ alors cei est le cas pour tout i tel que $0 \leqslant i \leqslant k$, et ainsi $X(\Omega) = \{0, \dots, k\}$.

Il s'agit du schéma hypergéométrique, donc la loi de X est :

$$\forall i \in X(\Omega) \qquad P(X = i) = \frac{\binom{a}{i}\binom{n-a}{k-i}}{\binom{n}{k}}.$$

Par propriété :

$$\sum_{i \in X(\Omega)} P(X = i) = 1.$$

Ceci démontre de nouveau la formule de la question précédente.

c. Par définition l'espérance de X est :

$$E(X) = \sum_{i \in X(\Omega)} i P(X = i).$$

Ainsi :

$$E(X) = \frac{1}{\binom{n}{k}} \sum_{i=0}^{k} i \binom{a}{i}\binom{n-a}{k-i}$$

Soit $i \in \{0, \dots, k\}$. Comme $i \leqslant k$ alors $i \leqslant a$ et donc :

$$i\binom{a}{i} = i\frac{a!}{i!(a-i)!} = \begin{cases} \frac{a!}{(i-1)!(a_i)!} & \text{si } i > 0 \\ 0 & \text{si } i = 0 \end{cases}$$

Si $i > 0$ alors :

$$i\binom{a}{i} = a\frac{(a-1)!}{(i-1)!(a-i)!} = a\binom{a-1}{i-1}.$$

Il s'agit de la formule du capitaine.

On en déduit :

$$\sum_{i=0}^{k} i\binom{a}{i}\binom{n-a}{k-i} = \sum_{i=1}^{k} a\binom{a-1}{i-1}\binom{n-a}{k-i} = a\sum_{j=0}^{k-1}\binom{a-1}{j}\binom{n-a}{k-j-1}$$

D'après la formule de la question a :

$$\sum_{j=0}^{k-1}\binom{a-1}{j}\binom{n-a}{k-j-1} = \binom{n-1}{k-1}.$$

Donc :

$$E(X) = a\frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}}$$

On obtient finalement :

$$E(X) = k\frac{a}{n}.$$

<u>Remarques</u>

Tout ce qui précède est valable sans les conditions $k \leqslant a$ et $k \leqslant n - a$, mais alors les bornes des sommes ne sont pas les mêmes.

La formule pour l'espérance est cohérente si $k = 0$, $k = 1$ et $k = n$.

En effet dans ce dernier cas on pioche toutes les boules de l'urne, donc la variable aléatoire X est constante égale à a.

De plus cette espérance est la même que lorsque les k tirages sont effectués avec remise. En effet dans ce cas X suit une loi binomiale $\mathscr{B}\left(k, \frac{a}{n}\right)$, d'espérance $E(X) = k\frac{a}{n}$. Voir chapitre C3 pour cette loi.

11 Combien faut-il piocher de cartes dans un jeu de 52 cartes pour avoir au moins une chance sur deux d'obtenir l'as de pique :

a. si on pioche les cartes successivement en les gardant ?

b. si on les pioche en les remettant après chaque tirage ?

On pioche n cartes dans le jeu. On note A_n l'événement : «on obtient l'as de pique».

a. Si on pioche simultanément les cartes alors Ω est l'ensemble des parties à n éléments du jeu de 52 cartes, et A_n est l'ensemble des parties composées de l'as de pique et de $n-1$ cartes parmi les 51 autres cartes.

Ainsi Ω est de cardinal $\binom{52}{n}$ et A_n est de cardinal $\binom{51}{n-1}$. Par équiprobabilité sur Ω :

$$P(A_n) = \frac{\operatorname{Card} A_n}{\operatorname{Card} \Omega} = \frac{\binom{51}{n-1}}{\binom{52}{n}} = \frac{51!\, n!\, (52-n)!}{(n-1)!\, (52-n)!\, 52!} = \frac{n}{52}$$

On cherche n tel que $P(A_n) \geqslant \frac{1}{2}$. Cette équation donne $n \geqslant 26$.

Il faut donc piocher au moins 26 cartes pour avoir plus d'une chance sur deux d'obtenir l'as de pique.

b. Si on pioche les n cartes successivement avec remise alors Ω est l'ensemble des listes de n éléments parmi les 52 cartes. Il est de cardinal 52^n.

L'événement $\overline{A}_n$ signifie «aucune carte parmi les n cartes piochées n'est l'as de pique». C'est l'ensemble des listes de n cartes parmi les 51 cartes qui ne sont pas l'as de pique. Il est de cardinal 51^n. Ainsi, par équiprobabilité sur Ω :

$$P(\overline{A}_n) = \frac{\operatorname{Card} \overline{A}_n}{\operatorname{Card} \Omega} = \left(\frac{51}{52}\right)^n$$

On obtient donc : $P(A_n) = 1 - \left(\frac{51}{52}\right)^n$

Cherchons à quelle condition cette probabilité est supérieur ou égale à $\frac{1}{2}$. Pour ceci on résout l'inéquation $P(A_n) \geqslant \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} P(A_n) \geqslant \frac{1}{2} \quad &\iff \quad 1 - \left(\frac{51}{52}\right)^n \geqslant \frac{1}{2} \quad \iff \quad \left(\frac{51}{52}\right)^n \leqslant \frac{1}{2} \\ &\iff \quad n \ln \frac{51}{52} \leqslant \ln \frac{1}{2} \quad \iff \quad n \geqslant \frac{\ln 2}{\ln \frac{52}{51}} \simeq 35{,}7 \end{aligned}$$

Pour la dernière équivalence on a divisé l'inégalité par $\ln \frac{51}{52}$, lequel est négatif car $\frac{51}{52} < 1$, donc le signe est inversé.

La calculatrice montre que $\frac{\ln 2}{\ln \frac{52}{51}} \simeq 35{,}7$ donc il faut piocher au moins 36 cartes pour avoir au moins une chance sur 2 d'obtenir l'as de pique.

12 On possède un jeu de $2n$ cartes ($n \geqslant 1$) composé de n paires d'animaux.

a. Quelle est la probabilité d'obtenir une paire si on pioche deux cartes dans ce jeu ?

b. Et si on en pioche trois (avec $n \geqslant 2$) ?

On note A l'événement : «On obtient une paire.»

a. Dans le cas où on pioche deux cartes dans le jeu, l'univers Ω contient les sous-ensembles à deux éléments du jeu de $2n$ cartes, il est donc de cardinal $\binom{2n}{2}$:

$$\operatorname{Card}\Omega = \binom{2n}{2} = \frac{2n(2n-1)}{2} = n(2n-1)$$

On suppose que le dos des cartes sont tous identiques, donc les éléments de Ω sont équiprobables.

L'événement A contient les sous-ensembles à deux éléments contenant une paire. Or il y a exactement n paires par définition du jeu de cartes. Par équiprobabilité :

$$P(A) = \frac{\operatorname{Card} A}{\operatorname{Card}\Omega} = \frac{n}{n(2n-1)} = \frac{1}{2n-1}$$

Cette probabilité peut être comprise différemment de la façon suivante : on peut supposer que l'on pioche une carte puis une carte. La première carte appartient à une certaine paire, et il reste après l'avoir piochée $(2n-1)$ cartes dans le jeu. Une seule carte complète la paire de la première carte, donc la probabilité de l'obtenir au second tirage est de $\frac{1}{2n-1}$.

On peut remarquer que dans le cas minimal, si $n = 1$, cette probabilité est égale à 1. Effectivement, le jeu contient deux cartes qui constituent une paire, on pioche deux cartes, donc on obtient la paire.

b. Dans le cas où on pioche trois cartes dans le jeu l'univers Ω contient les sous-ensembles à trois éléments du jeu de $2n$ cartes, il est donc de cardinal $\binom{2n}{3}$:

$$\operatorname{Card}\Omega = \binom{2n}{3} = \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{3!} = \frac{n(2n-1)(2n-2)}{3}$$

L'événement A est composé d'une paire, ce qui laisse n possibilités, puis d'une carte parmi les $2n-2$ restantes, donc il est de cardinal $n(2n-2)$. Par équiprobabilité :

$$P(A) = \frac{\operatorname{Card} A}{\operatorname{Card}\Omega} = \frac{n(2n-2)}{\frac{n(2n-1)(2n-2)}{3}} = \frac{3}{2n-1}$$

On peut remarquer que dans le cas minimal où $n = 2$ cette probabilité est égale à 1. Effectivement, le jeu contient quatre cartes séparées en deux paires. Si on pioche trois cartes alors on obtient une paire.

13 On pioche deux jetons au hasard dans un sac contenant 10 jetons numérotés de 1 à 10. Soit p la probabilité que la somme des deux numéros obtenus soit paire.

a. Calculer p si les deux tirages sont simultanés.

b. Calculer p si les deux tirages sont successifs avec remise entre les deux.

c. Répondre aux mêmes questions en supposant que le sac contient 11 jetons numérotés de 1 à 11.

On note A l'événement : «la somme des numéros est paire.»

a. On pioche simultanément deux jetons dans un sac contenant 10 jetons. Le nombre de résultats possibles est donc $\binom{10}{2}$.

La somme des numéros est paire si les deux numéros sont pairs ou si les deux numéros sont impairs.

On note B l'événement «les deux numéros sont pairs» et C l'événement «les deux numéros sont impairs».

Alors $A = B \cup C$, et de plus B et C sont incompatibles. Ainsi par additivité :

$$P(A) = P(B) + P(C)$$

La sac contient 5 numéros pairs et 5 numéros impairs. L'événement B est donc de cardinal $\binom{5}{2}$ (on pioche 2 numéros parmi les 5 pairs) et l'événement C est également de cardinal $\binom{5}{2}$.

Par équiprobabilité :

$$P(A) = \frac{\operatorname{Card} B}{\operatorname{Card} \Omega} + \frac{\operatorname{Card} C}{\operatorname{Card} \Omega} = \frac{\binom{5}{2} + \binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{2 \times \frac{5\times 4}{2}}{\frac{10\times 9}{2}} = \frac{4}{9}$$

b. Dans le cas de tirages avec remise l'univers Ω contient les listes de deux numéros entre 1 et 10, soit $10^2 = 100$ éléments. Ses éléments sont toujours équiprobables.

On peut toujours écrire $A = B \cup C$ avec B et C incompatibles.

Les événements B et C sont de cardinaux 5^2 tous les deux, ce sont les listes de deux numéros pairs ou de deux numéros impairs, et le sac contient 5 numéros pairs et 5 numéros impairs. On en déduit

$$P(A) = \frac{5^2 + 5^2}{10^2} = \frac{1}{2}$$

On a donc obtenu $p = \frac{4}{9} = 0{,}444\ldots$ si le tirage est sans remise et $p = \frac{1}{2} = 0{,}5$ sinon.

c. Dans le cas où le sac contient les jetons de 1 à 11, il contient 5 numéros pairs et 6 numéros impairs. Les calculs deviennent, dans le cas du tirage simultané :

$$P(A) = \frac{\binom{5}{2} + \binom{6}{2}}{\binom{11}{2}} = \frac{\frac{5\times 4}{2} + \frac{6\times 5}{2}}{\frac{11\times 10}{2}} = \frac{5}{11}$$

Dans le cas du tirage avec remise :

$$P(A) = \frac{5^2 + 6^2}{11^2} = \frac{61}{121}$$

On a donc obtenu $p = \frac{5}{11} = 0{,}4545\ldots$ si le tirage est sans remise et $p = \frac{61}{121} \simeq 0{,}5041$ sinon.

14 Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$.

On pioche simultanément k lettres d'un sac contenant les 26 lettres de l'alphabet.

a. Calculer la probabilité que l'on obtienne le A, puis celle que l'on obtienne le B, et enfin celle que l'on obtienne le A et le B.

b. Les événements «obtenir le A» et «obtenir le B» sont-ils indépendants ?

c. Calculer la probabilité que l'on obtienne le B sachant que l'on a obtenu le A.

d. On suppose $k < 26$. Calculer la probabilité que l'on obtienne le B sachant que l'on n'a pas obtenu le A.

a. On peut supposer que l'on pioche les k lettres simultanément : à la fin de l'expérience on a k lettres distinctes dans les mains, et on s'intéresse juste aux événements «avoir le A» et «avoir le B», sans se préoccuper de leur ordre d'arrivée.

On notera A et B ces deux événements. On choisit donc pour univers Ω l'ensemble des parties à k éléments de l'ensemble des 26 lettres. Il est de cardinal $\binom{26}{k}$, et on suppose que les lettres du sac sont indiscernables au toucher, ce qui implique que les éléments de Ω sont équiprobables.

L'événement A contient les parties à k éléments dont le A. Il s'agit donc des parties à $k-1$ éléments de l'alphabet privé du A, auxquelles on ajoute le A. Le cardinal de A est donc $\binom{1}{1}\binom{25}{k-1}$: 1 élément parmi 1 pour le A et $k-1$ éléments parmi 25 pour les autres.

De même l'événement B est de cardinal $\binom{1}{1}\binom{25}{k-1}$.

L'événement $A \cap B$, qui s'énonce «on obtient le A et le B», est l'ensemble des parties à k éléments dont le A et le B, il est de cardinal $\binom{2}{2}\binom{24}{k-2}$: 2 éléments parmi l'ensemble $\{\mathrm{A}, \mathrm{B}\}$ et $k-2$ éléments de l'ensemble de 24 lettres différentes de A et de B.

Par équiprobabilités :

$$P(A) = \frac{\operatorname{Card} A}{\operatorname{Card} \Omega} = \frac{25!}{(k-1)!(26-k)!} \frac{k!(26-k)!}{26!} = \frac{k}{26}$$

$$P(B) = P(A) = \frac{k}{26}$$

$$P(A \cap B) = \frac{\operatorname{Card}(A \cap B)}{\operatorname{Card} \Omega} = \frac{24!}{(k-2)!(26-k)!} \frac{k!(26-k)!}{26!} = \frac{k(k-1)}{26 \times 25}$$

On remarque que cette dernière probabilité est nulle si $k = 1$: effectivement si on pioche une seule lettre on ne peut recevoir le A et le B.

On remarque également que si $k = 26$ alors les trois probabilités valent 1 : si on pioche toutes les lettres alors on est certain de recevoir le A et le B.

b. On cherche une condition nécessaire et suffisante pour que A et B soient indépendants :

$$\begin{aligned} P(A\cap B)=P(A)P(B) &\iff \frac{k(k-1)}{26\times 25}=\left(\frac{k}{26}\right)^2 \\ &\iff \frac{k-1}{25}=\frac{k}{26} \qquad \text{car } k\neq 0 \\ &\iff 26(k-1)=25k \\ &\iff k=26 \end{aligned}$$

Ainsi A et B sont indépendants si et seulement si $k=26$, c'est-à-dire si on pioche toutes les lettres. Effectivement dans ce cas, les événements A et B sont certains, donc ils sont indépendants.

Par contre si on ne pioche pas toutes les lettres alors les événements A et B ne sont pas indépendants.

c. On cherche la probabilité $P_A(B)$. Pour ceci on applique la définition :

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{k(k-1)}{26\times 25}\frac{26}{k}=\frac{k-1}{25}$$

d. On cherche la probabilité $P_{\overline{A}}(B)$. Pour ceci on applique la formule d'inversion cause-effet :

$$P_{\overline{A}}(B)=\frac{P_B(\overline{A})P(B)}{P(\overline{A})}$$

Elle donne :

$$\begin{aligned} P_{\overline{A}}(B)=\frac{(1-P_B(A))P(B)}{1-P(A)} &= \frac{P(B)-P(A\cap B)}{1-P(A)} \\ &= \frac{\left(\frac{k}{26}-\frac{k(k-1)}{26\times 25}\right)}{1-\frac{k}{26}}=\frac{26k-k^2}{25(26-k)}=\frac{k}{25} \end{aligned}$$

On peut mettre les trois probabilités de B sous le même dénominateur pour les comparer :

$$P(B)=\frac{25k}{26\times 25}=\frac{26k-k}{26\times 25} \qquad P_A(B)=\frac{26k-26}{26\times 25} \qquad P_{\overline{A}}(B)=\frac{26k}{26\times 25}$$

On constate que $P_A(B)\leqslant P(B)\leqslant P_{\overline{A}}(B)$. Effectivement on a plus de chance d'obtenir le B si on n'a pas obtenu le A, mais moins de chance si on a eu le A.

15 On possède un sac contenant n jetons numérotés de 1 à n (avec $n \geqslant 2$). On pioche un jeton, on note son numéro k, puis on le remet dans le sac. On pioche ensuite simultanément k jetons dans le sac.

a. Soit i un entier compris entre 1 et n. Quelle est la probabilité que le jeton numéro i soit obtenu au second tirage ?

b. Soit i et j deux entiers distincts compris entre 1 et n. Quelle est la probabilité que les jetons i et j soient présents parmi les jetons tirés au second tirage ?

On définit les événements :

- Pour tout $k = 1, \dots, n$ $\qquad A_k$: «on obtient le jeton numéro k au premier tirage»
- Pour tout $i = 1, \dots, n$ $\qquad B_i$: «on obtient le jeton numéro i au second tirage»

a. Au premier tirage on pioche un jeton parmi les k jetons, lesquels sont supposés indiscernables. La probabilité d'obtenir chacun d'entre eux est donc de $\frac{1}{n}$:

$$\forall k = 1, \dots, n \qquad P(A_k) = \frac{1}{n}$$

Au second tirage on pioche k jetons parmi n simultanément. Le nombre de résultats possibles est donc $\binom{n}{k}$.

Parmi ces résultats, ceux qui contiennent le i sont composés du i et d'un ensemble de $k-1$ jetons parmi les $n-1$ autres jetons. Le cardinal de B_i dans le cas où A_k a lieu est donc $\binom{1}{1}\binom{n-1}{k-1}$. Par équiprobabilité sur les $\binom{n}{k}$ résultats du second tirage :

$$P_{A_k}(B_i) = \frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}\frac{k!(n-k)!}{n!} = \frac{k}{n}$$

Pour calculer la probabilité de l'événement B_i on applique la formule des probabilités totales.

La famille $(A_1, \dots, A_n)$ est un sytème complet d'événements, car au premier tirage on pioche un et un seul jeton numéroté entre 1 et n.

La formule des probabilités totales donne, pour i quelconque :

$$P(B_i) = \sum_{k=1}^{n} P_{A_k}(B_i)P(A_k)$$

On calcule :

$$P(B_i) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n}$$

Tout ceci est valable dans le cas particulier où $n = 1$. On obtient alors $P(B_1) = 1$, car il est certain que l'on pioche le jeton numéro 1 à chaque tirage.

b. On procède de même pour calculer la probabilité de l'événement $B_i \cap B_j$, où $i \neq j$.

Au second tirage on pioche k jetons parmi n. Les résultats sont au nombre de $\binom{n}{k}$. Ceux qui contiennent le i et le j sont composés du i, du j, et d'un ensemble de $k-2$ jetons parmi les $n-2$ autres jetons. Le cardinal de $B_i \cap B_j$ dans le cas où A_k a lieu est donc $\binom{2}{2}\binom{n-2}{k-2}$: 2 jetons parmi $\{i, j\}$, $k-2$ jetons parmi les autres.

Par équiprobabilité sur les résultats du second tirage :

$$P_{A_k}(B_i \cap B_j) = \frac{\binom{n-2}{k-2}}{\binom{n}{k}} = \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!}\frac{k!(n-k)!}{n!} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$$

La famille $(A_1, \ldots, A_n)$ est un sytème complet d'événements. On applique la formule des probabilités totales :

$$P(B_i \cap B_j) = \sum_{k=1}^{n} P_{A_k}(B_i \cap B_j)P(A_k)$$

On calcule :

$$\begin{aligned} P(B_i \cap B_j) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k-1)}{n^2(n-1)} = \frac{1}{n^2(n-1)}\sum_{k=1}^{n}\left(k^2 - k\right) \\ &= \frac{1}{n^2(n-1)}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}\right) \\ &= \frac{n+1}{n(n-1)}\left(\frac{2n+1}{6} - \frac{1}{2}\right) = \frac{(n+1)(2n-2)}{6n(n-1)} = \frac{n+1}{3n} \end{aligned}$$

Par exemple dans le cas où $n = 2$, l'événement $B_1 \cap B_2$ a lieu si et seulement si on pioche deux jetons au second tirage, ce qui a lieu si et seulement si on obtient le jeton numéro 2 au premier tirage, ce qui a lieu avec la probabilité $\frac{1}{2}$. Et effectivement dans ce cas $P(B_i \cap B_j) = \frac{1}{2}$.

16 Une urne contient 1 boule d'or, 2 boules d'argent et 7 boules de bronze, toutes indiscernables au toucher et à la pesée. On pioche ces dix boules une par une, sans les remettre. On souhaite calculer la probabilité de l'événement B : «la boule d'or arrive avant les boules d'argent».

a. Modéliser cette expérience par un univers Ω uniformément probabilisé. Donner son cardinal.
b. Soit k un entier tel que $1 \leqslant k \leqslant 10$. Calculer la probabilité de l'événement A_k : «la boule d'or est tirée au k-ème tirage».
c. Calculer les probabilités des événements $A_k \cap B$.
d. En déduire la probabilité de l'événement B.

a. On choisit pour univers Ω l'ensemble des permutations des 10 boules, il est de cardinal 10!.

Comme les boules sont indiscernables alors les éléments de Ω sont équiprobables.

b. L'événement A_k contient les permutations des 10 boules où la boule d'or est placée en position k. Cette boule étant placée il reste $9!$ permutations possibles des 9 autres boules. Ainsi $\operatorname{Card} A_k = 9!$ puis par équiprobabilité :

$$\forall k = 1, \ldots, 10 \qquad P(A_k) = \frac{\operatorname{Card} A_k}{\operatorname{Card} \Omega} = \frac{9!}{10!} = \frac{1}{10}$$

c. Pour obtenir le cardinal de l'événement $A_k \cap B$ on compte les permutations des 10 boules où la boule d'or est placée en position k et les positions 1 à $k-1$ contiennent des boules de bronze.

Le nombre de listes de $k-1$ éléments distincts parmi 7 est $\frac{7!}{(8-k)!}$ si $1 \leqslant k \leqslant 8$, et 0 sinon. Le nombre de permutations des boules restantes est $(10-k)!$, il s'agit des boules placées après la boule d'or, donc en positions $k+1$ à 10.

Ainsi $\operatorname{Card}(A_k \cap B) = \frac{7!}{(8-k)!} \times (10-k)!$ et par équiprobabilité :

$$\forall k = 1, \ldots, 8 \qquad P(A_k \cap B) = \frac{\operatorname{Card}(A_k \cap B)}{\operatorname{Card} \Omega} = \frac{7!(10-k)!}{(8-k)!10!} = \frac{(10-k)(9-k)}{10 \times 9 \times 8}$$

On remarque que cette formule est valable également pour $k = 9$ et $k = 10$.

d. Comme la boule d'or est obtenue à l'un des tirages 1 à 10 et à un seul de ces tirages alors la famille $A_1, \ldots, A_{10}$ est un système complet d'événements. La formule des probabilités totales donne alors :

$$P(B) = \sum_{k=1}^{10} P(A_k) P_{A_k}(B) = \sum_{k=1}^{10} P(A_k \cap B)$$

On calcule donc :

$$P(B) = \sum_{k=1}^{10} P(A_k \cap B) = \sum_{k=1}^{10} \frac{(10-k)(9-k)}{10 \times 9 \times 8}$$

Le changement d'indice $j = 9 - k$ donne :

$$P(B) = \sum_{k=1}^{8} \frac{(10-k)(9-k)}{10 \times 9 \times 8} = \sum_{j=1}^{8} \frac{j(j+1)}{10 \times 9 \times 8}$$

Finalement :

$$\begin{aligned} P(B) &= \frac{1}{10 \times 9 \times 8} \left(\sum_{j=1}^{8} j^2 + \sum_{j=1}^{8} j \right) = \frac{1}{10 \times 9 \times 8} \left(\frac{8 \times 9 \times 17}{6} + \frac{8 \times 9}{2} \right) \\ &= \frac{1}{10} \left(\frac{17}{6} + \frac{3}{6} \right) = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Cette probabilité de $\frac{1}{3}$ s'explique de la façon suivante : si on considère juste les boules d'or et d'argent alors l'une de ces trois boules arrivera avant les autres, et par équiprobabilité on a une chance sur 3 que ce soit la boule d'or.