

Corrigé du T. D. C2 Variables aléatoires

① Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un univers fini. Démontrer que X est constante si et seulement si sa variance est nulle (utiliser le théorème de transfert.)

Par définition de la variance :

$$V(X) = E((X - E(X))^2)$$

Grâce au théorème de transfert :

$$E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X = x)$$

On peut écrire :

$$V(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - E(X))^2 P(X = x)$$

Tous les termes de cette somme sont positifs : les $(x - E(X))^2$ sont des carrés et les $P(X = x)$ sont des probabilités, donc comprises entre 0 et 1.

La somme de plusieurs nombres positifs est nulle si et seulement si tous les termes sont nuls, donc :

$$V(X) = 0 \quad \iff \quad \forall x \in X(\Omega) \quad (x - E(X))^2 P(X = x) = 0$$

Si $x \in X(\Omega)$ alors $P(X = x)$ est non-nul. En effet, si $P(X = x) = 0$ alors X ne peut prendre la valeur x , et donc x n'appartient pas à $X(\Omega)$.

On peut donc simplifier :

$$\begin{aligned} V(X) = 0 & \iff \forall x \in X(\Omega) \quad (x - E(X))^2 = 0 \\ & \iff \forall x \in X(\Omega) \quad x = E(X) \end{aligned}$$

Cette dernière condition signifie que X est constante égale à $E(X)$, elle est *a fortiori* constante.

Réciproquement, si une variable aléatoire est constante, alors elle ne prend qu'une seule valeur : $X(\Omega) = \{b\}$ avec $b \in \mathbb{R}$. Dans ce cas son espérance est égale à sa valeur : $E(X) = b$. Ainsi une variable aléatoire constante est égale à son espérance, et donc sa variance est nulle d'après l'équivalence ci-dessus.

Nous avons donc démontré qu'une variable aléatoire est de variance nulle si et seulement si elle est constante.

② Soit a et b deux entiers avec $a < b$ et X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'ensemble $\llbracket a, b \rrbracket$.

Déterminer l'espérance et la variance de X .

Si X suit une loi uniforme sur $\llbracket a, b \rrbracket$ alors $X - a + 1$ suit une loi uniforme sur $\llbracket 1, b - a + 1 \rrbracket$.
En effet :

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad a \leq k \leq b \iff 1 \leq k - a + 1 \leq b - a + 1$$

On pose $Y = X - a + 1$. Alors Y suit une loi uniforme $\mathcal{U}(b - a + 1)$, donc par propriété de la loi uniforme :

$$E(Y) = \frac{b - a + 2}{2} \quad V(Y) = \frac{(b - a + 1)^2 - 1}{12}$$

Or $X = Y + a - 1$ donc par linéarité de l'espérance :

$$E(X) = E(Y) + a - 1 = \frac{b - a + 2}{2} + a - 1 = \frac{a + b}{2}$$

La formule $V(aX + b) = a^2V(X)$ donne :

$$V(X) = V(Y + a - 1) = V(Y) = \frac{(b - a)(b - a + 2)}{12}$$

③ Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type d'une variable aléatoire X suivant une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.

Une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ si et seulement si :

$$X(\Omega) = \{0, 1\} \quad \text{et} \quad P(X = 1) = p$$

On note $q = 1 - p$. Alors $P(X = 0) = q$.

L'espérance est :

$$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} kP(X = k) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) = p$$

L'espérance de X^2 est :

$$E(X^2) = \sum_{k \in X(\Omega)} k^2P(X = k) = 0^2 \times P(X = 0) + 1^2 \times P(X = 1) = p$$

La variance est d'après la formule de König-Huyghens :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1 - p) = pq$$

L'écart-type est :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{pq}$$

④ Aldo et Bob jouent à pile ou face avec une pièce truquée qui donne pile avec la probabilité $p \in]0, 1[$.

Bob donne 30 euros à Aldo, puis il jette dix fois la pièce. Il récupère 8 euros à chaque fois qu'il obtient pile.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de piles obtenus, Y la variable aléatoire égale au gain de Bob.

- Justifier que X suit une loi binomiale, donner ses paramètres et son espérance.
- Exprimer Y en fonction de X et calculer $E(Y)$.
- À quelle condition Bob a-t-il intérêt à jouer ?

- a. Bob répète 10 expériences identiques et indépendantes : le lancer de la pièce.

La variable aléatoire X est le nombre d'apparitions de l'événement «Pile» lors de ces expériences, et cet événement est de probabilité p .

Par définition X suit une loi binomiale de paramètres 10 et p , notée $\mathcal{B}(10, p)$.

Son espérance est alors $E(X) = 10p$.

- b. Bob gagne 8 euros à chaque fois qu'il obtient Pile, soit $8X$ euros, et il paye 30 euros à Aldo. Son gain est donc $Y = 8X - 30$.

Par linéarité de l'espérance : $E(Y) = 8E(X) - 30$

Ceci donne $E(Y) = 80p - 30$.

- c. Bob a intérêt à jouer si et seulement si l'espérance de son gain est positive, donc si et seulement si $E(Y) \geq 0$.

Ceci équivaut à $p \geq \frac{3}{8}$.

Par exemple si la pièce est équilibrée alors Bob a intérêt à jouer.

⑤ On possède un sac contenant n jetons numérotés de 1 à n (avec $n \geq 2$).

On pioche l'un après l'autre deux jetons de ce sac, sans les remettre, et on note X et Y les variables aléatoires égales au premier et au second numéro obtenu.

- a. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y) .

En déduire ses lois marginales, ainsi que leurs espérances et leurs variances.

- b. Déterminer directement la loi de X .

Donner, pour tout $i \in X(\Omega)$, la loi de Y conditionnée par $X = i$.

Retrouver ainsi la loi conjointe du couple (X, Y) .

- c. Calculer la covariance du couple (X, Y) et la variance de $X + Y$.

- d. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

- e. Calculer le coefficient de corrélation linéaire du couple (X, Y) .

Que peut-on dire de ses valeurs extrêmes ?

a. Les jetons sont numérotés de 1 à n donc les variables aléatoires X et Y peuvent prendre les valeurs 1 à n :

$$X(\Omega) = Y(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$$

Les éléments de Ω sont les couples (i, j) d'éléments distincts de $\llbracket 1, n \rrbracket$, ils sont au nombre de $n(n - 1)$, et ils sont équiprobables car on suppose les jetons indiscernables.

Soit i et j deux entiers compris entre 1 et n .

Si $i = j$ alors l'événement $(X = i) \cap (Y = j)$ est impossible car on pioche deux jetons distincts. Sinon l'événement $(X = i) \cap (Y = j)$ est l'événement élémentaire $\{(i, j)\}$, donc par équiprobabilité sa probabilité est $\frac{1}{n(n-1)}$.

La loi conjointe du couple est donc :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \quad P((X = i) \cap (Y = j)) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ \frac{1}{n(n-1)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ceci peut être représenté dans un tableau ci-dessous.

$Y \backslash X$	1	n	Loi de Y	
1	0	$\frac{1}{n(n-1)}$	$\frac{1}{n(n-1)}$	$\frac{1}{n}$
.....	$\frac{1}{n(n-1)}$	$\frac{1}{n(n-1)}$
.....	$\frac{1}{n(n-1)}$
n	$\frac{1}{n(n-1)}$	$\frac{1}{n(n-1)}$	0	$\frac{1}{n}$
Loi de X	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$		1

Pour la loi de X on peut écrire :

$$\begin{aligned} \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad P(X = i) &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n P((X = i) \cap (Y = j)) \\ &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{n(n-1)} = (n-1) \times \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

De même pour la loi de Y :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad P(Y = j) = \frac{1}{n}$$

On a donc démontré que X et Y suivent une loi uniforme $\mathcal{U}(n)$ de paramètre n .

On en déduit :

$$E(X) = E(Y) = \frac{n+1}{2} \quad V(X) = V(Y) = \frac{n^2-1}{12}$$

- b. La variable aléatoire X est le numéro du premier jeton pioché. On pioche un jeton parmi n jetons numérotés de 1 à n , donc par équiprobabilité :

$$\forall k \in \{1, \dots, n\} \quad P(X = k) = \frac{1}{n}$$

Ceci justifie que X suit une loi uniforme $\mathcal{U}(n)$.

Si l'événement $(X = i)$ a lieu alors il reste $n - 1$ jetons dans le sac, tous sauf le jeton i , donc par équiprobabilité :

$$P_{X=i}(Y = j) = \begin{cases} \frac{1}{n-1} & \text{si } j \neq i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La formule $P((X = i) \cap (Y = j)) = P(X = i)P_{X=i}(Y = j)$ permet de retrouver la loi conjointe déjà obtenue dans la question a.

- c. Par théorème de transfert généralisé :

$$E(XY) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n ij P((X = i) \cap (Y = j))$$

On calcule :

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n ij \frac{1}{n(n-1)} \right) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \left(i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n j \right) \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \left(i \left(\frac{n(n+1)}{2} - i \right) \right) = \frac{1}{n(n-1)} \left(\frac{n(n+1)}{2} \sum_{i=1}^n i - \sum_{i=1}^n i^2 \right) \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \left(\left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} \right) \\ &= \frac{(n+1)}{2(n-1)} \left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{2n+1}{3} \right) = \frac{(n+1)(3n^2 - n - 2)}{12(n-1)} \\ &= \frac{(n+1)(n-1)(3n+2)}{12(n-1)} = \frac{(n+1)(3n+2)}{12} \end{aligned}$$

On a démontré que :

$$E(XY) = \frac{(n+1)(3n+2)}{12}$$

On peut remarquer que le produit $E(X)E(Y)$ peut s'écrire :

$$E(X)E(Y) = \left(\frac{n+1}{2} \right)^2 = \frac{(n+1)(3n+3)}{12}$$

On en déduit :

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = -\frac{n+1}{12}$$

On calcule maintenant la variance de $X + Y$:

$$\begin{aligned} V(X + Y) &= V(X) + V(Y) + 2 \operatorname{Cov}(X, Y) \\ &= 2 \frac{n^2 - 1}{12} - 2 \frac{n + 1}{12} = \frac{n + 1}{6} (n - 1 - 1) = \frac{(n + 1)(n - 2)}{6} \end{aligned}$$

On a démontré que :

$$V(X + Y) = \frac{(n + 1)(n - 2)}{6}$$

Si $n = 2$ alors $V(X + Y) = 0$, donc $X + Y$ est constante.

En effet, si $n = 2$ alors $(X, Y) = (1, 2)$ ou $(X, Y) = (2, 1)$, et donc $X + Y$ est constante égale à 3.

d. On constate par exemple que :

$$P((X = 1) \cap (Y = 1)) = 0 \quad \text{alors que} \quad P(X = 1) \times P(Y = 1) = \frac{1}{n^2}$$

Ceci montre que X et Y ne sont pas indépendantes.

Aussi $E(XY) \neq E(X)E(Y)$, ce qui confirme que X et Y ne sont pas indépendantes.

Et aussi $\operatorname{Cov}(X, Y) \neq 0$, ce qui justifie encore que X et Y ne sont pas indépendantes.

Ou encore la somme des variances de X et Y peut s'écrire :

$$V(X) + V(Y) = \frac{n^2 - 1}{6} = \frac{(n + 1)(n - 1)}{6} \neq \frac{(n + 1)(n - 2)}{6} = V(X + Y)$$

Ceci montre que $V(X + Y) \neq V(X) + V(Y)$, et donc une fois de plus X et Y ne sont pas indépendantes.

e. On obtient :

$$r(X, Y) = \frac{\operatorname{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = -\frac{n + 1}{12} \frac{12}{n^2 - 1} = -\frac{1}{n - 1}$$

Si $n = 2$ alors $r = -1$, ce qui signifie que X et Y sont liées par une relation affine à coefficient directeur négatif.

Effectivement si $n = 2$ alors le sac ne contient que les jetons 1 et 2, donc X et Y valent l'une 1 et l'autre 2, donc leur somme est égale à 3 : $Y = 3 - X$.

Si n tend vers $+\infty$ alors r tend vers 0 car X et Y se rapprochent de l'indépendance.

En effet si le nombre de jetons est très grand alors le fait de remettre le premier jeton pioché dans l'urne ne modifie pas beaucoup les probabilités de chaque jeton d'être pioché ensuite.

⑥ Soit (X, Y) le couple de variables aléatoires dont la loi est donnée par le tableau suivant :

$Y \backslash X$	0	1	2
0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$

Calculer les espérances de X , Y et XY , puis les variances de X et de Y .

Que peut-on en déduire ?

Considérons un mobile se déplaçant sur un grillage de 3×3 points, en partant du point central de coordonnées $(1, 1)$, effectuant un déplacement par seconde, avec équiprobabilité entre toutes les directions possibles sachant qu'il ne peut sortir du terrain.

Alors ses coordonnées au bout de deux secondes sont les variables aléatoires X et Y de cet exercice.

- On commence par déterminer les lois marginales de X et Y , en additionnant les probabilités de chaque ligne et de chaque colonne :

$Y \backslash X$	0	1	2	loi de Y
0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
Loi de X	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

Le tableau suivant permet de calculer les espérances de X et de X^2 :

k	0	1	2	Σ
$P(X = k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1
$kP(X = k)$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
$k^2P(X = k)$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$

On en déduit :

$$E(X) = \sum_{k=0}^2 kP(X = k) = 1 \quad \text{et} \quad E(X^2) = \sum_{k=0}^2 k^2P(X = k) = \frac{5}{3}$$

Grâce à la formule de König-Huyghens :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{2}{3}$$

Comme Y suit la même loi que X alors :

$$E(X) = 1 \quad \text{et} \quad V(Y) = \frac{2}{3}$$

Remarque. On aurait aussi pu voir que X et Y suivent une loi uniforme sur l'ensemble $\{0, 1, 2\}$. donc $X + 1$ et $Y + 1$ suivent la loi uniforme $\mathcal{U}(3)$, c'est-à-dire la loi uniforme sur l'ensemble $\{1, 2, 3\}$.

Si X suit la loi $\mathcal{U}(n)$ alors $E(X) = \frac{n+1}{2}$ et $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$, donc pour $n = 3$:

$$E(X + 1) = 2 \quad V(X + 1) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

Ceci donne :

$$E(X) = E(X + 1) - 1 = 1 \quad \text{et} \quad V(X) = V(X + 1) = \frac{2}{3}$$

- On constate sur le tableau de la loi conjointe que le produit XY ne prend que les valeurs 0, 1 et 4, avec les probabilités respectives $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{6}$.

En effet le couple (X, Y) prend les valeurs $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$ et $(2, 2)$, donc le produit XY prend les valeurs 0, 1 et 4.

La valeur $XY = 4$ n'est possible que si $(X, Y) = (2, 2)$, ce qui arrive avec la probabilité $\frac{1}{6}$, la valeur $XY = 1$ n'est possible que si $(X, Y) = (1, 1)$, ce qui arrive avec la probabilité $\frac{1}{3}$, et la valeur $XY = 0$ arrive dans tous les autres cas.

On a donc le tableau suivant :

k	0	1	4	Σ
$P(XY = k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1
$kP(XY = k)$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

Il montre que $E(XY) = 1$.

- Comme $E(X) = 1$ et $E(Y) = 1$ alors :

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

Ceci a lieu si X et Y sont indépendantes.

Pourtant X et Y ne sont pas indépendantes, par exemple car :

$$P(X = 0 \cap Y = 1) = 0 \quad \text{alors que} \quad P(X = 0) \times P(Y = 1) = \frac{1}{9}$$

Ce contre-exemple montre que la propriété :

$$\begin{aligned} \text{Si } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes alors } & E(XY) = E(X)E(Y) \\ & \text{et } V(X + Y) = V(X) + V(Y). \end{aligned}$$

n'admet pas de réciproque. Ce n'est qu'une implication, sa réciproque est fautive en général.

1 Soit X une variable aléatoire finie à valeurs dans \mathbb{N} . La *fonction génératrice* de X est définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad G_X(t) = \sum_{k \in X(\Omega)} P(X = k)t^k$$

- Justifier que deux variables aléatoires X et Y suivent la même loi si et seulement si elles ont même fonction génératrice.
- Que valent $G_X(1)$ et $G'_X(1)$?
- Exprimer $V(X)$ en fonction de G_X , G'_X et G''_X .
- On suppose que X suit une loi binomiale.

Utiliser la fonction génératrice de X pour retrouver $E(X)$ et $V(X)$.

- Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N} . Démontrer que si X et Y sont indépendantes alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$.
On pourra remarquer que $G_X(t) = E(t^X)$.

- Deux variables aléatoires X et Y suivent la même loi si et seulement si :

$$X(\Omega) = Y(\Omega) \quad \text{et} \quad \forall x \in k \in X(\Omega) \quad P(X = k) = P(Y = k)$$

Une fonction génératrice est polynomiale en t . Deux fonctions polynomiales sont égales si et seulement si tous leurs coefficients sont égaux. Donc les fonctions génératrices de X et Y sont égales si et seulement si tous leurs coefficients sont égaux, ce qui signifie que X et Y suivent la même loi.

- Par définition de G_X :

$$G_X(1) = \sum_{k \in X(\Omega)} P(X = k) = 1$$

Comme $X(\Omega)$ est fini et inclus dans \mathbb{N} alors la fonction G_X est polynomiale. En effet elle est de la forme :

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$$

où n est un entier naturel et les a_k sont des réels.

La fonction G_X est donc dérivable, et sa dérivée est :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad G'_X(t) = \sum_{k \in X(\Omega)} P(X = k) k t^{k-1}$$

On en déduit :

$$G'_X(1) = \sum_{k \in X(\Omega)} k P(X = k) = E(X)$$

Finalement on a obtenu :

$$G_X(1) = 1 \quad \text{et} \quad G'_X(1) = E(X)$$

- La fonction G_X est deux fois dérivable, de dérivée seconde :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad G''_X(t) = \sum_{k \in X(\Omega)} P(X = k) k(k-1) t^{k-2}$$

Ceci donne pour $t = 1$:

$$G_X''(1) = \sum_{k \in X(\Omega)} k(k-1)P(X=k)$$

Par linéarité de la somme puis théorème de transfert :

$$\begin{aligned} G_X''(1) &= \sum_{k \in X(\Omega)} (k^2 - k)P(X=k) \\ &= \sum_{k \in X(\Omega)} k^2 P(X=k) - \sum_{k \in X(\Omega)} k P(X=k) = E(X^2) - E(X) \end{aligned}$$

On utilise ensuite la formule de König-Huyghens :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = G_X''(1) + G_X'(1) - G_X'(1)^2$$

Ceci est bien une formule de exprimant la variance de X en fonction de G_X' et G_X'' .

d. Supposons que X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$. Alors :

$$X(\Omega) = \{0, \dots, n\} \quad \text{et} \quad \forall k \in X(\Omega) \quad P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

On note ici $q = 1 - p$.

La fonction génératrice de X est alors :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad G_X(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} t^k$$

On peut simplifier celle-ci grâce à la formule du binôme :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad G_X(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (pt)^k q^{n-k} = (pt + q)^n$$

Les deux premières dérivées de G_X sont alors :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad G_X'(t) = np(pt + q)^{n-1} \quad \text{et} \quad G_X''(t) = n(n-1)p^2(pt + q)^{n-2}$$

Comme $p + q = 1$ alors :

$$G_X'(1) = np \quad \text{et} \quad G_X''(1) = n(n-1)p^2$$

On en déduit, d'après les questions a et b ci-dessus :

$$\begin{aligned} E(X) = G_X'(1) &= np \quad \text{et} \quad V(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - G_X'(1)^2 \\ &= n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = -np^2 + np = npq \end{aligned}$$

On a démontré de nouveau les formules pour l'espérance et la variance de la loi binomiale.

e. Une autre définition de la fonction génératrice est :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad G_X(t) = E(t^X)$$

Ceci est conséquence du théorème de Transfert.

De plus, si deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes et f et g sont deux fonctions numériques alors les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

Aussi, si deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes alors $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Supposons que X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$ fixé t^X et t^Y sont indépendantes, donc :

$$E(t^X t^Y) = E(t^X)E(t^Y)$$

Ceci donne $E(t^{X+Y}) = E(t^X)E(t^Y)$ puis $G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t)$, et ceci étant valable pour tout $t \in \mathbb{R}$ on en déduit $G_{X+Y} = G_X G_Y$.

2 Soit X suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Déterminer l'espérance de $\frac{1}{1+X}$.

Grâce au théorème de transfert :

$$E\left(\frac{1}{1+X}\right) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{1+k} P(X=k) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{1+k} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

On remarque que $\frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k+1}$ donc :

$$E\left(\frac{1}{1+X}\right) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} p^k q^{n-k} = \frac{1}{n+1} \left(\sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} p^{j-1} q^{n+1-j} - \frac{q^{n+1}}{p} \right)$$

Finalement :

$$E\left(\frac{1}{1+X}\right) = \frac{1 - q^{n+1}}{(n+1)(1-q)} = \frac{1}{n+1} (1 + q + q^2 + \dots + q^n)$$

3 Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. On pose $U = X + Y$ et $V = X - Y$.

- Déterminer la loi conjointe du couple (U, V) puis ses lois marginales.
- Calculer la covariance du couple (U, V) . Ces variables aléatoires sont-elles indépendantes ?

a. Comme $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{0, 1\}$ alors $U(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ et $V(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$.

L'événement $(U = 1 \cap V = 0)$ est impossible, il donnerait $X + Y = 1$ et $X - Y = 0$, soit $X = Y = \frac{1}{2}$.

L'événement $(U = 1 \cap V = -1)$ donne $X = 0$ et $Y = 1$, donc :

$$(U = 1 \cap V = -1) = (X = 0 \cap Y = 1)$$

Comme X et Y sont indépendantes alors :

$$P(U = 1 \cap V = -1) = P(X = 0)P(Y = 1) = pq$$

On calcule de même les autres valeurs, ce qui donne la loi conjointe du couple (U, V) .

On en déduit les lois marginales du couple (U, V) , c'est-à-dire les lois de U et de V .

Ceci donne le tableau suivant :

$V \backslash U$	0	1	2	loi de V
-1	0	pq	0	pq
0	q^2	0	p^2	$p^2 + q^2$
1	0	pq	0	pq
Loi de U	q^2	$2pq$	p^2	1

b. Le plus simple est d'utiliser la bilinéarité de la covariance :

$$\text{Cov}(U, V) = \text{Cov}(X + Y, X - Y) = \text{Cov}(X, X) - \text{Cov}(X, Y) + \text{Cov}(Y, X) + \text{Cov}(Y, Y)$$

Comme $\text{Cov}(Y, X) = \text{Cov}(X, Y)$ alors :

$$\text{Cov}(U, V) = V(X) - V(Y)$$

Or X et Y suivent la même loi donc $\text{Cov}(U, V) = 0$.

Sinon on peut utiliser la méthode usuelle pour calculer la covariance, à l'aide de la formule de König-Huyghens :

$$\text{Cov}(U, V) = E(UV) - E(U)E(V).$$

Par linéarité de l'espérance :

$$E(U) = E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 2p$$

$$E(V) = E(X - Y) = E(X) - E(Y) = 0.$$

La loi conjointe du couple (U, V) montre que UV prend les valeurs -1 , 0 et 1 avec les probabilités respectives pq , $p^2 + q^2$ et pq . On en déduit que son espérance est $E(UV) = pq - pq = 0$.

Finalement la formule de König-Huyghens donne $\text{Cov}(U, V) = 0$.

Ainsi U et V sont décorrélées.

Mais U et V ne sont pas indépendantes, par exemple car :

$$P(U = 2) = p^2 \quad P(V = 1) = pq \quad P(U = 2 \cap V = 1) = 0$$

SI U et V étaient indépendantes on aurait

$$P(U = 2 \cap V = 1) = P(U = 2) \times P(V = 1).$$

4 Démontrer que deux variables aléatoires de Bernoulli sont indépendantes si et seulement si leur covariance est nulle.

D'après le cours, si X et Y sont indépendantes alors leur covariance est nulle.

Démontrons que si X et Y suivent une loi de Bernoulli alors la réciproque est vraie.

Soit X et Y suivant des lois de Bernoulli $\mathcal{B}(a)$ et $\mathcal{B}(b)$ avec $(a, b) \in [0, 1]^2$.

Comme $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{0, 1\}$ alors $XY(\Omega) = \{0, 1\}$, et ainsi XY suit aussi une loi de Bernoulli.

Soit $p = P(XY = 1)$, *i.e.*, XY suit une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.

Par la formule de König-Huyghens :

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = p - ab$$

Si $\text{Cov}(X, Y) = 0$ alors $p = ab$, donc $P(XY = 1) = P(X = 1) \times P(Y = 1)$.

Or $(XY = 1) = (X = 1 \cap Y = 1)$, et donc :

$$P(X = 1 \cap Y = 1) = P(X = 1) \times P(Y = 1).$$

Les formules :

$$P(X = 1) = P(X = 1 \cap Y = 0) + P(X = 1 \cap Y = 1)$$

$$P(Y = 1) = P(X = 0 \cap Y = 1) + P(X = 1 \cap Y = 1)$$

montrent que :

$$P(X = 1 \cap Y = 0) = a - p = a(1 - b) = P(X = 1) \times P(Y = 0)$$

$$P(X = 0 \cap Y = 1) = b - p = b(1 - a) = P(X = 0) \times P(Y = 1)$$

En fin la formule $P(X = 0) = P(X = 0 \cap Y = 0) + P(X = 0 \cap Y = 1)$ donne :

$$P(X = 0 \cap Y = 0) = 1 - a - b(1 - a) = (1 - a)(1 - b) = P(X = 0) \times P(Y = 0)$$

On a vérifié que :

$$\forall (i, j) \in \{0, 1\}^2 \quad P(X = i \cap Y = j) = P(X = i) \times P(Y = j)$$

donc les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

5 On jette n dés ($n \geq 1$), et on note X et Y les variables aléatoires égales aux nombres de 1 et de 6 obtenus.

- Déterminer les lois suivies par X et Y , leurs espérances et leurs variances.
- Reconnaître, pour tout $j \in Y(\Omega)$, la loi de X sachant $Y = j$.
- En déduire la loi conjointe du couple (X, Y) .
- X et Y sont-elles indépendantes ?
- Déterminer la loi de $Z = X + Y$. Vérifier par le calcul.
- Calculer la covariance du couple (X, Y) puis son coefficient de corrélation linéaire.

a. Les n lancers de dé sont des expériences identiques et indépendantes.

Les variables aléatoires X et Y sont le nombre d'apparitions du 1 et du 6 respectivement, donc elles suivent des lois binomiales de paramètres n et $p = \frac{1}{6}$, notées $\mathcal{B}(n, \frac{1}{6})$.

On en déduit :

$$E(X) = E(Y) = \frac{n}{6} \quad V(X) = V(Y) = \frac{5n}{36}$$

b. Si l'événement $Y = j$ a lieu alors j lancers ont donné un 6.

Les $n - j$ autres lancers ont donné un nombre entre 1 et 5, avec équiprobabilité.

La probabilité, lors de chacun de ces $n - j$ lancers, qu'un 1 apparaisse est $\frac{1}{5}$.

Ces $n - j$ lancers sont des expériences identiques et indépendantes, X compte le nombre d'apparitions d'un événement de probabilité $\frac{1}{5}$, donc X sachant $Y = j$ suit une loi binomiale de paramètres $n - j$ et $\frac{1}{5}$ notée $\mathcal{B}(n - j, \frac{1}{5})$.

c. La réponse à la question précédente montre que :

$$\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$$

$$P_{Y=j}(X = i) = \begin{cases} \binom{n-j}{i} \left(\frac{1}{5}\right)^i \left(\frac{4}{5}\right)^{n-j-i} & \text{si } 0 \leq i \leq n - j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De plus, comme Y suit une loi $\mathcal{B}(n, \frac{1}{6})$ alors :

$$\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad P(Y = j) = \binom{n}{j} \left(\frac{1}{6}\right)^j \left(\frac{5}{6}\right)^{n-j}$$

On applique alors la formule $P(A \cap B) = P_B(A)P(B)$, en remarquant que la condition $i \leq n - j$ équivaut à la condition $i + j \leq n$. On obtient :

$$\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$$

$$P((X = i) \cap (Y = j)) = \begin{cases} \binom{n-j}{i} \binom{n}{j} \left(\frac{1}{5}\right)^i \left(\frac{4}{5}\right)^{n-j-i} \left(\frac{1}{6}\right)^j \left(\frac{5}{6}\right)^{n-j} & \text{si } 0 \leq i + j \leq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On simplifie :

$$\begin{aligned} \binom{n-j}{i} \binom{n}{j} \left(\frac{1}{5}\right)^i \left(\frac{4}{5}\right)^{n-j-i} \left(\frac{1}{6}\right)^j \left(\frac{5}{6}\right)^{n-j} &= \frac{(n-j)!}{i!(n-i-j)!} \frac{n!}{j!(n-j)!} \left(\frac{1}{4}\right)^i \left(\frac{1}{4}\right)^j \left(\frac{1}{6}\right)^n \\ &= \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} \left(\frac{1}{6}\right)^{i+j} \left(\frac{4}{6}\right)^{n-i-j} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$$

$$P((X = i) \cap (Y = j)) = \begin{cases} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} \left(\frac{1}{6}\right)^i \left(\frac{1}{6}\right)^j \left(\frac{4}{6}\right)^{n-i-j} & \text{si } 0 \leq i + j \leq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans cette dernière écriture on a modifié l'expression pour montrer que cette loi généralise la loi binomiale. Il s'agit ici d'une loi trinomiale.

d. Comme X et Y suivent une loi $\mathcal{B}(n, \frac{1}{6})$ alors :

$$P(X = n) = P(Y = n) = \left(\frac{1}{6}\right)^n$$

Ceci montre que :

$$P(X = n) \times P(Y = n) = \left(\frac{1}{6}\right)^{2n}$$

Par contre, comme $n + n = 2n > n$ alors d'après la question précédente :

$$P((X = n) \cap (Y = n)) = 0$$

On pouvait remarquer ceci dès le début : si on jette n dés on ne peut obtenir n fois le 1 et n fois le 6. En conclusion, comme :

$$P((X = n) \cap (Y = n)) \neq P(X = n) \times P(Y = n)$$

alors X et Y ne sont pas indépendantes.

e. Les n lancers de dé sont des expériences identiques et indépendantes, X compte le nombre d'apparitions du 1, Y compte le nombre d'apparitions du 6, donc $X + Y$ compte le nombre d'apparitions du 1 ou du 6. La probabilité à chaque lancer qu'un 1 ou un 6 apparaisse est $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

Donc la variable aléatoire $Z = X + Y$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{3})$.

Retrouvons ce résultat par le calcul.

A priori, comme $X(\Omega) = Y(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ alors :

$$Z(\Omega) = \llbracket 0, 2n \rrbracket$$

Soit k un élément de $Z(\Omega)$. Par propriété la probabilité de l'événement $Z = k$ est :

$$P(Z = k) = P(X + Y = k) = \sum_{i=0}^k P((X = i) \cap (Y = k - i))$$

On sait que la probabilité de l'événement $(X = i) \cap (Y = j)$ est nulle si $i + j \geq n$, donc ici la probabilité de $(X = i) \cap (Y = k - i)$ est nulle si $k > n$. On en déduit :

$$P(Z = k) = 0 \quad \text{si} \quad k > n$$

Ceci montre que $Z(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$

Pour k appartenant à $\llbracket 0, n \rrbracket$ on obtient, grâce à la question c :

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= \sum_{i=0}^k P((X = i) \cap (Y = k - i)) \\ &= \sum_{i=0}^k \frac{n!}{i!(k-i)!(n-i-(k-i))!} \left(\frac{1}{6}\right)^i \left(\frac{1}{6}\right)^{k-i} \left(\frac{4}{6}\right)^{n-i-(k-i)} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!} \sum_{i=0}^k \frac{1}{i!(k-i)!} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{4}{6}\right)^{n-k} \end{aligned}$$

On introduit $k!$ pour faire apparaître des coefficients du binôme :

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= \frac{n!}{(n-k)!k!} \sum_{i=0}^k \frac{k!}{i!(k-i)!} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{4}{6}\right)^{n-k} \\ &= \binom{n}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{4}{6}\right)^{n-k} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \\ &= \binom{n}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{4}{6}\right)^{n-k} 2^k = \binom{n}{k} \left(\frac{2}{6}\right)^k \left(\frac{4}{6}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k} \end{aligned}$$

On a prouvé que :

$$Z(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad P(Z = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}$$

Ceci montre que Z suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{3}$, notée $\mathcal{B}(n, \frac{1}{3})$.

f. On utilise la formule :

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{2}(V(X + Y) - V(X) - V(Y))$$

Comme X, Y suivent des lois binomiales alors leurs variances sont :

$$V(X) = V(Y) = \frac{5n}{36} \quad V(X + Y) = \frac{2n}{9}$$

En on déduit la covariance et le coefficient de corrélation linéaire du couple (X, Y) :

$$\text{Cov}(X, Y) = -\frac{n}{36} \quad \text{et} \quad r(X, Y) = -\frac{1}{5}$$

6 On pioche deux boules successivement et sans remise dans une urne contenant n boules dont a noires, avec $0 < a < n$, les autres étant blanches.

On note X_1 et X_2 les variables aléatoires égales à 1 si la première boule, respectivement la seconde, est noire, et à 0 sinon.

- Déterminer la loi du couple (X_1, X_2) , ainsi que ses lois marginales.
- Démontrer que X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.
- Calculer la covariance du couple (X_1, X_2) .
- Soit $X = X_1 + X_2$. Quel sens donner à X ?

Calculer la loi de X , son espérance et sa variance.

- a. Les variables aléatoires X_1 et X_2 prennent uniquement les valeurs 0 et 1, donc elles suivent des lois de Bernoulli.

Pour calculer la loi du couple (X_1, X_2) on définit l'univers Ω contenant les possibilités pour les deux premiers tirages. Il contient les couples de deux éléments distincts de l'urne, donc il contient $n(n-1)$ éléments. Ces éléments sont équiprobables.

Parmi ces couples, ceux qui contiennent deux boules noires sont au nombre de $a(a-1)$, ceux qui contiennent deux boules blanches sont au nombre de $b(b-1)$, ceux qui contiennent une boule noire puis une boule blanche sont au nombre de ab et enfin ceux qui contiennent une boule blanche puis une boule noire sont au nombre de ba .

Par équiprobabilité on obtient :

$$\begin{aligned} P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)) &= \frac{a(a-1)}{n(n-1)} & P((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0)) &= \frac{b(b-1)}{n(n-1)} \\ P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 0)) &= \frac{ab}{n(n-1)} & P((X_1 = 0) \cap (X_2 = 1)) &= \frac{ba}{n(n-1)} \end{aligned}$$

ces résultats peuvent être placés dans le tableau suivant :

$X_2 \backslash X_1$	0	1	Loi de X_2
0	$\frac{b(b-1)}{n(n-1)}$	$\frac{ab}{n(n-1)}$	$\frac{b}{n}$
1	$\frac{ab}{n(n-1)}$	$\frac{a(a-1)}{n(n-1)}$	$\frac{a}{n}$
Loi de X_1	$\frac{b}{n}$	$\frac{a}{n}$	1

Pour les lois marginales on a utilisé le fait que $a+b=n$, qui donne $a+b-1=n-1$.
Par exemple :

$$\begin{aligned} P(X_2 = 0) &= P((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0)) + P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 0)) \\ &= \frac{b(b-1)}{n(n-1)} + \frac{ab}{n(n-1)} = \frac{b(a+b-1)}{n(n-1)} = \frac{b}{n} \end{aligned}$$

On constate finalement que X_1 et X_2 suivent des lois de Bernoulli de paramètre $\frac{a}{n}$, notées $\mathcal{B}\left(\frac{a}{n}\right)$ ou $\mathcal{B}\left(1, \frac{a}{n}\right)$.

- b. On constate que

$$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)) = \frac{a(a-1)}{n(n-1)} \quad \text{alors que} \quad P(X_1 = 1) \times P(X_2 = 1) = \left(\frac{a}{n}\right)^2$$

On procède par équivalences successives.

$$\begin{aligned} P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)) = P(X_1 = 1) \times P(X_2 = 1) &\iff \frac{a(a-1)}{n(n-1)} = \frac{a^2}{n^2} \\ &\iff a(a-1)n = an(n-1) \\ &\iff an(n-a) = 0 \end{aligned}$$

Par hypothèse $0 < a < n$, donc a , n et $n - a$ sont non-nuls, et ainsi l'égalité n'a jamais lieu :

$$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)) \neq P(X_1 = 1) \times P(X_2 = 1)$$

Ceci montre que X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

- c. Comme X_1 et X_2 ne prennent que les valeurs 0 et 1 alors leur produit X_1X_2 ne prend que les valeurs 0 et 1, et il vaut 1 si et seulement si X_1 et X_2 valent 1 toutes les deux :

$$P(X_1X_2 = 1) = P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)) = \frac{a(a-1)}{n(n-1)}$$

La variable aléatoire X_1X_2 suit donc une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{a(a-1)}{n(n-1)}$. On en déduit son espérance :

$$E(X_1X_2) = \frac{a(a-1)}{n(n-1)}$$

Or X_1 et X_2 suivent des lois de Bernoulli de paramètres $\frac{a}{n}$, donc

$$E(X_1)E(X_2) = \frac{a}{n} \times \frac{a}{n} = \frac{a^2}{n^2}$$

On peut donc calculer la covariance :

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = E(X_1X_2) - E(X_1)E(X_2) = -\frac{a(n-a)}{n^2(n-1)}$$

Cette covariance est non-nulle car $0 < a < n$, ce qui confirme que X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

- d. La variable aléatoire X_1 prend la valeur 1 si une boule noire est piochée au premier tirage, et 0 sinon. Elle est donc égale au nombre de boules noires piochées lors du premier tirage.

De même X_2 est le nombre de boules noires piochées lors du second tirage.

La somme $X = X_1 + X_2$ est donc le nombre de boules noires piochées lors des deux tirages.

Déterminons la loi de X .

Comme $X_1 = X_2 = \{0, 1\}$ alors $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$. De plus :

$$P(X = 0) = P((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0))$$

$$P(X = 1) = P((X_1 = 0) \cap (X_2 = 1)) + P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 0))$$

$$P(X = 2) = P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1))$$

Ceci complète la loi de X :

$$P(X = 0) = \frac{b(b-1)}{n(n-1)} \quad P(X = 1) = \frac{2ab}{n(n-1)} \quad P(X = 2) = \frac{a(a-1)}{n(n-1)}$$

On peut vérifier que la somme de ces trois probabilités est égale à 1.

On calcule également :

$$E(X) = \sum_{k=0}^2 kP(X = k) = \frac{2ab}{n(n-1)} + \frac{2a(a-1)}{n(n-1)} = \frac{2a}{n}$$

Ce résultat aurait pu être obtenu par linéarité de l'espérance :

$$E(X) = E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) = \frac{a}{n} + \frac{a}{n} = \frac{2a}{n}$$

Pour la variance on commence par l'espérance de X^2 :

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^2 k^2 P(X = k) = \frac{2ab}{n(n-1)} + \frac{4a(a-1)}{n(n-1)} = \frac{2a(n+a-2)}{n(n-1)}$$

Puis par la formule de König-Huygens :

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 = \frac{2a(n+a-2)}{n(n-1)} - \left(\frac{2a}{n}\right)^2 \\ &= \frac{2an(n+a-2) - 4a^2(n-1)}{n^2(n-1)} \\ &= \frac{2a(n^2 - na - 2n + 2a)}{n^2(n-1)} = \frac{2ab(n-2)}{n^2(n-1)} \end{aligned}$$

Un autre possibilité de calcul de cette variance aurait été d'utiliser les données connues sur X_1 et X_2 . Comme $X = X_1 + X_2$ alors

$$V(X) = V(X_1 + X_2)$$

On en déduit :

$$V(X) = V(X_1) + V(X_2) + 2 \operatorname{Cov}(X, Y)$$

Comme X_1 et X_2 suivent des lois de Bernoulli de paramètre $\frac{a}{n}$ alors :

$$V(X_1) = V(X_2) = \frac{a}{n} \left(1 - \frac{a}{n}\right) = \frac{ab}{n^2}$$

Donc :

$$V(X) = \frac{ab}{n^2} + \frac{ab}{n^2} - 2 \left(\frac{ab}{n^2(n-1)}\right)$$

On aboutit à :

$$V(X) = \frac{2ab}{n^2} \frac{n-2}{n-1}$$

On remarque que cette variance est nulle si $n = 2$. Effectivement, dans ce cas l'urne contient deux boules, donc on les pioche toutes les deux, et le nombre de boules noires obtenues est constant égal à a .

Remarque.

Si les deux tirages avaient été effectués avec remise, alors les variables aléatoires X_1 et X_2 auraient suivi les mêmes lois, à savoir $\mathcal{B}\left(\frac{a}{n}\right)$, mais cette fois elles auraient été indépendantes.

De plus, comme les expériences de tirage d'une boule auraient été identiques et indépendantes alors X aurait suivi une loi binomiale $\mathcal{B}(2, \frac{a}{n})$.

On aurait alors obtenu :

$$E(X) = \frac{2a}{n} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{2ab}{n^2}$$

Ainsi le fait de ne pas remettre la première boule dans l'urne multiplie la variance par un coefficient réducteur $\frac{n-2}{n-1}$.

si n est grand alors ce coefficient tend vers 1, le fait de ne pas remettre la boule modifie de moins en moins le résultat.

7 On pioche une par une et sans remise des boules d'une urne contenant n boules indiscernables ($n \geq 2$) dont une est blanche, une est noire, et les autres sont rouges. Soit X et Y les variables aléatoires égales aux rangs d'arrivée respectifs de la boule blanche et de la boule noire.

- Donner les lois de X , Y , leurs espérances et leurs variances.
- Donner la loi conjointe du couple (X, Y) .
- Donner la loi de $Z = X - Y$, puis son espérance et sa variance.
- En déduire la covariance du couple (X, Y) , puis la variance de $X + Y$.
- Donner la loi de $D = |X - Y|$, puis son espérance et sa variance.

- a. Chaque boule peut arriver lors de l'un des n tirages, donc $X(\Omega) = Y(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$.

En piochant les n boules on obtient une permutation de l'ensemble des boules, donc Ω est l'ensemble de ces permutations, et $\text{Card } \Omega = n!$.

Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ l'événement $(X = k)$ est l'ensemble des permutations des n boules où la boule blanche est en position k , ce qui montre que $\text{Card}(X = k) = (n - 1)!$.

Par équiprobabilité sur Ω on obtient $P(X = k) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$.

La variable aléatoire X suit donc une loi uniforme $\mathcal{U}(n)$, et de même pour Y .

Par propriété :

$$E(X) = E(Y) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = V(Y) = \frac{n^2-1}{12}.$$

- b. Soit i et j deux éléments de l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Si $i = j$ alors l'événement $(X = i \cap Y = j)$ est impossible car la boule blanche et la boule noire ne peuvent être piochées au même tirage.

Si $i \neq j$ alors l'événement $(X = i \cap Y = j)$ est l'ensemble des permutations des n boules où la boule blanche est en position i et la boule noire est en position j , cet ensemble est de cardinal $(n - 2)!$ donc par équiprobabilité $P(X = i \cap Y = j) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$.

Finalement :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \quad P(X = i \cap Y = j) = \begin{cases} \frac{1}{n(n-1)} & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases}$$

c. On pose $Z = X - Y$. Comme $X(\Omega) = Y(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$ alors $Z(\Omega) = \llbracket -(n-1), n-1 \rrbracket$.

On peut ajouter que Z ne peut prendre la valeur 0 car les événements $(X = i \cap Y = i)$ sont impossibles, donc

$$Z(\Omega) = \llbracket -(n-1), -1 \rrbracket \cup \llbracket 1, n-1 \rrbracket.$$

Soit $k \in Z(\Omega)$. Déterminons $P(Z = k)$.

La famille $(X = i \mid 1 \leq i \leq n)$ est un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(Z = k) = \sum_{i=1}^n P(X = i)P_{X=i}(Z = k)$$

Ceci donne :

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= \sum_{i=1}^n P(X = i \cap Z = k) \\ &= \sum_{i=1}^n P(X = i \cap (X - Y) = k) = \sum_{i=1}^n P(X = i \cap Y = i - k) \end{aligned}$$

L'événement $Y = i - k$ est possible si et seulement si $1 \leq i - k \leq n$, ce qui donne $k + 1 \leq i \leq n + k$.

On sépare deux cas : $k < 0$ ou $k > 0$.

Si $k < 0$ alors les encadrements $1 \leq i \leq n$ et $k + 1 \leq i \leq n + k$ donnent $1 \leq i \leq n + k$, donc :

$$P(Z = k) = \sum_{i=1}^{n+k} P(X = i \cap Y = i - k) = \sum_{i=1}^{n+k} \frac{1}{n(n-1)} = \frac{n+k}{n(n-1)}.$$

Si $k > 0$ alors les encadrements $1 \leq i \leq n$ et $k + 1 \leq i \leq n + k$ donnent $k + 1 \leq i \leq n$, donc :

$$P(Z = k) = \sum_{i=k+1}^n P(X = i \cap Y = i - k) = \sum_{i=k+1}^n \frac{1}{n(n-1)} = \frac{n-k}{n(n-1)}.$$

On en déduit la loi de Z :

$$\forall k \in \llbracket -(n-1), -1 \rrbracket \cup \llbracket 1, n-1 \rrbracket \quad P(Z = k) = \frac{n - |k|}{n(n-1)}.$$

Pour l'espérance de Z on utilise la linéarité :

$$E(Z) = E(X - Y) = E(X) - E(Y) = 0$$

Pour la variance on utilise la formule de König-Huyghens :

$$V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = E(Z^2).$$

Connaissant la loi de Z :

$$E(Z^2) = \sum_{k \in Z(\Omega)} k^2 P(Z = k) = \sum_{k=-(n-1)}^{-1} k^2 \frac{n+k}{n(n-1)} + \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \frac{n-k}{n(n-1)}$$

Par changement d'indice $j = -k$ dans la première somme :

$$\begin{aligned} E(Z^2) &= \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \left(\frac{n-k}{n(n-1)} + \frac{n-k}{n(n-1)} \right) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} (nk^2 - k^3) \\ &= \frac{2}{n(n-1)} \left(n \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} - \frac{n^2(n-1)^2}{4} \right) = \frac{n(n+1)}{6} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$V(Z) = \frac{n(n+1)}{6}.$$

d. Par bilinéarité de la covariance :

$$V(X - Y) = \text{Cov}(X - Y, X - Y) = V(X) + V(Y) - 2 \text{Cov}(X, Y)$$

On en déduit :

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{2}(V(X) + V(Y) - V(Z))$$

Ceci donne :

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{2} \left(\frac{(n-1)(n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{6} \right) = -\frac{n+1}{12}$$

Toujours par bilinéarité de la covariance :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2 \text{Cov}(X, Y)$$

Ceci donne :

$$V(X + Y) = \frac{(n-1)(n+1)}{6} - \frac{n+1}{6} = \frac{(n+1)(n-2)}{6}$$

On peut remarquer que cette variance est nulle si $n = 2$. En effet dans ce cas l'urne ne contient que la boule blanche et la boule noire, donc le couple (X, Y) ne peut prendre que les valeurs $(1, 2)$ et $(2, 1)$, donc $X + Y$ est constante égale à 3, et sa variance est nulle.

e. Par définition $D = |Z|$. Comme $Z(\Omega) = \llbracket -(n-1), -1 \rrbracket \cup \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ alors $D(\Omega) = \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

De plus :

$$\begin{aligned} \forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \quad P(D = k) &= P(Z = k) + P(Z = -k) \\ &= \frac{n-k}{n(n-1)} + \frac{n+(-k)}{n(n-1)} = \frac{2(n-k)}{n(n-1)} \end{aligned}$$

On peut donc calculer :

$$\begin{aligned} E(D) &= \sum_{k=1}^{n-1} k P(D = k) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} (nk - k^2) \\ &= \frac{2}{n(n-1)} \left(n \frac{n(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \right) = \frac{n+1}{3} \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} E(D^2) &= \sum_{k=1}^{n-1} k^2 P(D = k) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} (nk^2 - k^3) \\ &= \frac{2}{n(n-1)} \left(n \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} - \frac{n^2(n-1)^2}{4} \right) = \frac{n(n+1)}{6} \end{aligned}$$

Finalement :

$$V(D) = E(D^2) - E(D)^2 = \frac{(n+1)(n-2)}{18}$$

On constate que si $n = 2$ alors cette variance est nulle, car dans ce cas D est constante égale à 1.

8 Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires. On suppose que X suit une loi binomiale de paramètres (n, p) et que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, si $X = k$ a lieu alors Y suit une loi binomiale de paramètres (k, a) .

- Déterminer la loi de Y .
- Reconnaître cette loi et expliquer.

a. Par définition, comme X suit une loi $\mathcal{B}(n, p)$ alors :

$$X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket \quad P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad \text{avec } q = 1 - p$$

De plus Y sachant $X = k$ suit une loi binomiale de paramètre k et a , donc :

$$\forall i \in \llbracket 0, k \rrbracket \quad P_{X=k}(Y = i) = \binom{k}{i} a^i b^{k-i} \quad \text{avec } b = 1 - a$$

Comme $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et $0 \leq i \leq k$ alors $0 \leq i \leq n$ et donc $Y(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$.

La famille $(X = k \mid 0 \leq k \leq n)$ est un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad P(Y = i) = \sum_{k=0}^n P(X = k) P_{X=k}(Y = i)$$

Si $i > k$ alors $P_{X=k}(Y = i) = 0$ donc :

$$P(Y = i) = \sum_{k=i}^n P(X = k) P_{X=k}(Y = i)$$

D'après les formules ci-dessus :

$$P(Y = i) = \sum_{k=i}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \binom{k}{i} a^i b^{k-i}$$

On calcule donc :

$$P(Y = i) = \frac{n!}{i!} a^i \sum_{k=i}^n \frac{1}{(n-k)!(k-i)!} p^k q^{n-k} b^{k-i}$$

Le changement d'indice $j = k - i$ donne :

$$\begin{aligned} P(Y = i) &= \frac{n!}{i!} a^i \sum_{j=0}^{n-i} \frac{1}{(n-i-j)!j!} p^{i+j} q^{n-i-j} b^j \\ &= \frac{n!}{i!(n-i)!} (ap)^i \sum_{j=0}^{n-i} \frac{(n-i)!}{1} (n-i-j)! j! (pb)^j q^{n-i-j} \end{aligned}$$

D'après la formule du binôme :

$$P(Y = i) = \binom{n}{i} (ap)^i (pb + q)^{n-i}$$

On remarque que $bp + q = (1-a)p + 1 - p = 1 - ap$, et donc finalement :

$$Y(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad P(Y = i) = \binom{n}{i} (ap)^i (1 - ap)^{n-i}.$$

b. On constate que Y suit une loi binomiale de paramètres (n, pa) .

On peut expliquer ceci de la façon suivante :

On réalise n expériences identiques et indépendantes, dont un événement A peut résulter, de probabilité p . En cas de réussite on réalise une autre expérience dont un événement B peut résulter, de probabilité a .

Si X est le nombre d'occurrences de l'événement A , et Y est le nombre d'occurrences de l'événement B , alors X suit une loi $\mathcal{B}(n, p)$ et Y sachant $X = k$ suit une loi $\mathcal{B}(k, a)$, c'est la situation de l'exercice. En conséquence Y suit une loi $\mathcal{B}(n, ap)$.

Effectivement, Y est le nombre d'occurrences de l'événement $A \cap B$, c'est-à-dire le nombre de fois où les événements A puis B se produisent. Comme $p = P(A)$ et $a = P_A(B)$ alors $P(A \cap B) = pa$, et donc Y suit une loi $\mathcal{B}(n, ap)$.

9 On tire simultanément trois boules d'une urne contenant a boules rouges, b boules jaunes et c boules bleues, avec a, b, c strictement supérieurs à 1. On note X, Y, Z les variables aléatoires égales aux nombres de boules rouges, jaunes et bleues respectivement.

- Démontrer que X, Y, Z ne sont pas deux-à-deux indépendantes.
- Calculer $E(X) + E(Y) + E(Z)$.
- Démontrer que $V(X + Y) = V(Z)$.

- a. L'urne contient au moins deux boules de chaque couleur et on pioche trois boules, donc il est possible d'obtenir deux boules rouges, deux boules jaunes ou deux boules bleues :

$$P(X = 2) \neq 0 \quad P(Y = 2) \neq 0 \quad P(Z = 2) \neq 0$$

Par contre comme on pioche trois boules alors on ne peut obtenir simultanément deux boules rouges et deux boules jaunes, ni deux boules rouges et deux boules bleues, etc. Ainsi :

$$P((X = 2) \cap (Y = 2)) = P((X = 2) \cap (Z = 2)) = P((Y = 2) \cap (Z = 2)) = 0$$

On en déduit :

$$P((X = 2) \cap (Y = 2)) \neq P(X = 2) \times P(Y = 2)$$

Les variables aléatoires X et Y ne sont donc pas indépendantes, et de même pour les variables aléatoires X et Z puis Y et Z .

- b. La variable aléatoire $X + Y + Z$ est le nombre de boules rouges, jaunes ou bleues. Or l'urne ne contient que des boules de ces couleurs, et on pioche trois boules, donc $X + Y + Z$ est constante égale à 3. Par linéarité :

$$E(X) + E(Y) + E(Z) = E(X + Y + Z) = 3$$

- c. Comme $Z = 3 - (X + Y)$ alors la formule $V(aX + b) = a^2V(X)$ donne :

$$V(Z) = V(-(X + Y) + 3) = (-1)^2V(X + Y) = V(X + Y)$$

10 On lance d fois un dé équilibré ($d \in \mathbb{N}^*$) et on note n le nombre de six obtenus. On lance n fois une pièce qui donne pile avec la probabilité $p \in]0, 1[$. On définit les variables aléatoires :

Z : le nombre de six obtenus aux lancers du dé,

X : le nombre de piles obtenus,

Y : le nombre de faces obtenus.

- Quelle est la loi de Z ?
- Pour n fixé quelle est la loi de X sachant $Z = n$?
- En déduire la loi de X . Reconnaître cette loi, décrire de même la loi de Y .
- Calculer la covariance du couple (X, Y) , puis son coefficient de corrélation linéaire.

Réponses :

a. Z suit une loi $\mathcal{B}(d, \frac{1}{6})$.

b. X sachant $Z = n$ suit une loi $\mathcal{B}(n, p)$.

c. X suit une loi $\mathcal{B}(d, \frac{p}{6})$ Y suit une loi $\mathcal{B}(d, \frac{q}{6})$.

d. $\text{Cov}(X, Y) = -\frac{dpq}{36}$ $r = -\sqrt{\frac{pq}{(6-p)(6-q)}} = -\frac{1}{\sqrt{1+\frac{30}{pq}}}$

Si $p = \frac{1}{2}$ alors $r = -\frac{1}{11}$, c'est la valeur minimale.

11 Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires tel que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ avec $n \geq 1$, et pour tout couple (i, j) de $X(\Omega) \times Y(\Omega)$:

$$P(X = i \cap Y = j) = \begin{cases} \lambda & \text{si } 0 \leq i + j \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Calculer la valeur de λ .
- Calculer les lois de X et de Y . Ces variables sont-elles indépendantes ?
- Calculer la loi de $Z = X + Y$.
- Calculer les espérances de X , Y et Z .
- Démontrer qu'il existe deux réels a et b tels que Z suit la même loi que $aX + b$.
- En déduire la valeur du coefficient de corrélation linéaire entre X et Y .

a. La somme de tous les $P((X = i) \cap (Y = j))$ doit être égale à 1 :

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n P((X = i) \cap (Y = j)) = 1$$

Pour chaque valeur de i fixé, $P((X = i) \cap (Y = j))$ est non nul si et seulement si $0 \leq j \leq n - i$, donc on peut écrire :

$$\sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^{n-i} \lambda \right) = 1$$

FIGURE 1 – Loi conjointe du couple (X, Y)

$Y \backslash X$	0	n	Loi de Y
0	λ	λ	$(n+1)\lambda$
\vdots	\vdots	\ddots	0	\vdots
\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots
\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots
n	λ	0	0
Loi de X	$(n+1)\lambda$	λ	1

On calcule :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^{n-i} \lambda \right) &= \lambda \sum_{i=0}^n (n-i+1) = \lambda \left(\sum_{i=0}^n (n+1) - \sum_{i=0}^n i \right) \\ &= \lambda \left((n+1)^2 - \frac{n(n+1)}{2} \right) = \lambda(n+1) \frac{2n+2-n}{2} = \lambda \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

On en conclut que la valeur de λ est :

$$\lambda = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$$

La loi conjointe du couple (X, Y) ainsi que les lois marginales peuvent être représentées dans le tableau figure 1.

b. Par propriété de la loi conjointe :

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad P(X = i) = \sum_{j=0}^n P((X = i) \cap (Y = j))$$

Comme $P((X = i) \cap (Y = j))$ est nul si $0 \leq j \leq n - i$ et égal à λ sinon, donc on calcule :

$$P(X = i) = \sum_{j=0}^{n-i} \lambda = \lambda(n-i+1)$$

Pour la loi marginale de Y on obtient de la même façon :

$$\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad P(Y = j) = (n-j+1)\lambda$$

On constate que $P((X = n) \cap (Y = n)) = 0$ car $n+n = 2n > n$, alors que :

$$P(X = n) \times P(Y = n) = \lambda^2 \neq 0$$

On en déduit que X et Y ne sont pas indépendantes.

c. Comme $X(\Omega) = Y(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ alors *a priori* :

$$Z(\Omega) = \llbracket 0, 2n \rrbracket$$

Soit k un entier. Alors par propriété de la somme de deux variables aléatoires :

$$P(Z = k) = \sum_{i=0}^k P((X = i) \cap (Y = k - i)) \quad (1)$$

On sait que :

$$P((X = i) \cap (Y = j)) = 0 \quad \text{si} \quad i + j > n$$

Donc ici :

$$P((X = i) \cap (Y = k - i)) = 0 \quad \text{si} \quad k > n$$

Ainsi d'après (1) :

$$\forall k = n + 1, \dots, 2n \quad P(Z = k) = 0$$

On en déduit :

$$Z(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket \quad (2)$$

Si $0 \leq k \leq n$ alors $i + (k - i) \leq n$ donc $P((X = i) \cap (Y = k - i)) = \lambda$ puis d'après (1) :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad P(Z = k) = \sum_{i=0}^k \lambda = \lambda(k + 1) \quad (3)$$

La loi de Z est donnée par (2) et (3).

d. L'espérance de X est :

$$E(X) = \sum_{i=0}^n iP(X = i)$$

On calcule :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=0}^n i(n + 1 - i)\lambda = \lambda \left((n + 1) \sum_{i=0}^n i - \sum_{i=0}^n i^2 \right) \\ &= \lambda \left(\frac{n(n + 1)^2}{2} - \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6} \right) = \lambda \frac{n(n + 1)}{6} (3(n + 1) - (2n + 1)) \\ &= \frac{2}{(n + 1)(n + 2)} \frac{n(n + 1)(n + 2)}{6} = \frac{n}{3} \end{aligned}$$

Comme la loi de Y est égale à celle de X alors on obtient aussi :

$$E(Y) = \frac{n}{3}$$

Comme $Z = X + Y$ alors par linéarité de l'espérance :

$$E(Z) = E(X) + E(Y) = \frac{2n}{3}$$

- e. On montre que Z et $n - X$ ont même loi. En effet, comme $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ alors $(n - X)$ prend les mêmes valeurs, donc $(n - X)(\Omega) = Z(\Omega)$, puis :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad P(n - X = k) = P(X = n - k) = \lambda(k + 1) = P(Z = k)$$

On retrouve ainsi l'espérance de Z : $E(Z) = n - E(X)$ par linéarité.

- f. Par propriété, comme $Z = n - X$ alors $V(Z) = V(X)$.

Comme X et Y suivent la même loi alors $V(Y) = V(X)$.

La formule $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2 \operatorname{Cov}(X, Y)$ montre donc que :

$$\operatorname{Cov}(X, Y) = -\frac{1}{2}V(X)$$

On en déduit le coefficient de corrélation linéaire : $r(X, Y) = -\frac{1}{2}$

On peut aussi calculer la covariance : $\operatorname{Cov}(X, Y) = -\frac{n(n+3)}{36}$.

12 Un repas réunit n convives ($n \geq 2$) portant tous un chapeau. En partant chacun prend un chapeau au hasard.

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on note A_i l'événement «le convive i part avec son propre chapeau».

- a. Déterminer la probabilité des événements A_i et $A_i \cap A_j$ pour tous $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$.
 b. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de convives qui partent avec leurs propres chapeaux.

Calculer l'espérance de X puis sa variance.

- a. Selon l'énoncé chaque convive peut récupérer un des n chapeaux avec équiprobabilité, donc :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad P(A_i) = \frac{1}{n}.$$

Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$.

Si $i = j$ alors $A_i \cap A_j = A_i$, donc $P(A_i \cap A_j) = \frac{1}{n}$.

Supposons que $i \neq j$. Si l'événement A_i a lieu alors il reste $n - 1$ chapeaux dont celui du convive j . Il a donc, par équiprobabilité, une chance sur $n - 1$ de récupérer son propre chapeau. Ainsi $P_{A_i}(A_j) = \frac{1}{n-1}$.

On en déduit : $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P_{A_i}(A_j) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n(n-1)}$.

Finalement :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \quad P(A_i \cap A_j) = \begin{cases} \frac{1}{n(n-1)} & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases}$$

- b. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, notons X_i la variable aléatoire égale à 1 si le convive i récupère son propre chapeau, et à 0 sinon.

La variable aléatoire X_i est la variable aléatoire indicatrice de l'événement A_i , c'est-à-dire qu'elle suit une loi de Bernoulli de paramètre $P(A_i) = \frac{1}{n}$.

Par propriété :

$$E(X_i) = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad V(X_i) = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{n-1}{n^2}$$

La variable aléatoire X est le nombre de convives qui reçoivent leurs propres chapeaux, donc le nombre de variables aléatoires X_i qui valent 1. Ainsi :

$$X = \sum_{i=1}^n X_i.$$

Par linéarité de l'espérance :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = n \times \frac{1}{n} = 1.$$

La covariance est bilinéaire donc :

$$V(X) = \text{Cov} \left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{j=1}^n X_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{Cov}(X_i, X_j).$$

Si $i = j$ alors $\text{Cov}(X_i, X_i) = V(X_i) = \frac{n-1}{n^2}$.

Si $i \neq j$ alors par formule de König-Huyghens :

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j)$$

Comme $X_i(\Omega) = X_j(\Omega) = \{0, 1\}$ alors $X_i X_j(\Omega) = \{0, 1\}$ avec :

$$P(X_i X_j = 1) = P((X_i = 1) \cap (X_j = 1)) = P(A_i \cap A_j) = \frac{1}{n(n-1)}.$$

Ainsi la variable aléatoire $X_i X_j$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{n(n-1)}$, et donc $E(X_i X_j) = \frac{1}{n(n-1)}$. Ainsi :

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j) = \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2(n-1)}.$$

On peut alors calculer :

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_{i=1}^n \text{Cov}(X_i, X_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \text{Cov}(X_i, X_j) \\ &= n \times \frac{n-1}{n^2} + \sum_{i=1}^n (n-1) \times \frac{1}{n^2(n-1)} = \frac{n-1}{n} + n \times \frac{1}{n^2} = 1. \end{aligned}$$

On a donc prouvé que $E(X) = 1$ et $V(X) = 1$, ceci quelle que soit la valeur de n .

13 Soit N et a entiers tels que $0 < a < N$. On possède une urne contenant N boules, dont a sont noires et $b = N - a$ sont blanches.

On pioche sans remise n boules successivement dans l'urne, avec $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$.

Pour tout $k = 1, \dots, n$ on note X_k la variable aléatoire égale à 1 si la k -ème boule est noire, et à 0 sinon.

a. Déterminer, pour tout $k = 1, \dots, n$, la loi de X_k .

b. Déterminer, pour tout $i, j = 1, \dots, n$, la loi de $X_i X_j$.

c. Soit $X = X_1 + \dots + X_n$.

Calculer l'espérance et la variance de X .

d. Reproduire l'exercice en supposant que l'on remet la boule obtenue après chaque tirage.

Que retrouve-t-on ?

Comparer l'espérance et la variance obtenues avec celles de la partie précédente.

Réponses :

$$\text{a. } P(X_k = 1) = \frac{a \frac{(N-1)!}{(N-n)!}}{\frac{N!}{(N-n)!}} = \frac{a}{N}$$

$$\text{b. Si } i \neq j : P(X_i X_j = 1) = \frac{a(a-1) \frac{(N-2)!}{(N-n)!}}{\frac{N!}{(N-n)!}} = \frac{a(a-1)}{N(N-1)}.$$

Si $i = j$: $X_i^2 = X_i$.

c. On pose $p = \frac{a}{N}$ et $q = \frac{b}{N}$.

$$E(X) = np \quad V(X_k) = pq \quad \text{Si } i \neq j : \text{Cov}(X_i, X_j) = -\frac{a(N-a)}{N^2(N-1)} = -\frac{pq}{N-1}$$

$$V(X) = npq \frac{N-n}{N-1}$$

Si $n = N$ alors $V(X) = 0$. En effet on pioche toutes les boules donc X est constante égale à a .

$$\text{d. } P(X_k = 1) = \frac{a N^{n-1}}{N^n} = \frac{a}{N}. \quad P(X_i X_j = 1) = \frac{a^2 N^{n-2}}{N^n} = \frac{a^2}{N^2}$$

$E(X) = np$ comme précédemment.

$V(X) = npq$: on retrouve la variance de la loi binomiale.

14 Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires identiques et indépendantes, d'espérance m et d'écart-type σ .

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose :

$$T_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n).$$

- Déterminer l'espérance et l'écart-type de T_n en fonction de m , σ et n .
- Démontrer que pour tout $a > 0$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|T_n - m| \geq a) = 0$$

- Calculer l'espérance de la variable aléatoire :

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - T_n)^2$$

Réponses :

- On obtient :

$$E(T_n) = m \quad \sigma(T_n) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- Il s'agit de la loi faible des grands nombres.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne :

$$P(|T_n - m| \geq a) \leq \frac{V(T_n)}{a^2} = \frac{\sigma^2}{na^2}$$

Le résultat en découle.

- On obtient :

$$E(S_n) = \frac{n-1}{n} \sigma^2$$

Pour ceci on remarque que $E(X_i^2) = V(X_i) + E(X_i)^2$ et de même pour $E(T_n^2)$.

15 Soit X une variable aléatoire, d'espérance m et d'écart-type σ . Soit a un réel strictement positif.

a. Démontrer que pour tout $t > 0$:

$$E((X - m + t)^2) = \sigma^2 + t^2$$

b. En déduire que pour tout $t > 0$:

$$P(X - m \geq a) \leq \frac{\sigma^2 + t^2}{(a + t)^2}$$

c. Démontrer que :

$$P(X - m \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$$

d. En considérant la variable aléatoire $-X$, démontrer que :

$$P(|X - m| \geq a) \leq \frac{2\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$$

Cette majoration est-elle meilleure que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ?

Réponses :

a. On applique la formule de König-Huyghens pour la variable aléatoire $Y = X - m + t$.

b. On applique l'inégalité de Markhov à Y^2 , qui est bien positive, avec $(a + t)^2$, qui est bien strictement positif.

Ensuite on remarque que :

$$(X - m \geq a) \subseteq ((X - m + t)^2 \geq (a + t)^2)$$

c. La fonction $t \mapsto \frac{\sigma^2 + t^2}{(a + t)^2}$ admet un minimum en $t = \frac{\sigma^2}{a}$, de valeur $\frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$.

d. L'égalité précédente est valable pour $-X$, qui admet pour espérance $-m$.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev majore la même probabilité par $\frac{\sigma^2}{a^2}$, et n'a pas d'intérêt si $a \leq \sigma$.

La nouvelle est meilleure pour $a \in]0, \sigma[$.

Par contre dans ce cas on obtient une probabilité plus grande que 1, donc c'est inutile.

C'est en fait l'inégalité de la question c qui est utile.