

Feuille de T. D. B11
Matrices et applications linéaires

Exercices de cours

① Soit n et p deux entiers naturels non-nuls.
Soit $X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$, $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $Y \in \mathcal{M}_{p1}(\mathbb{K})$.
Justifier que tXAY et ${}^tY{}^tAX$ sont bien définies et égales.

② On définit l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \longmapsto (y + 3z, x - 2y + 2z)$$

et on note : $\mathcal{B} = ((1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1))$

$$\mathcal{B}' = ((1, 1), (1, -1))$$

- a. Démontrer que \mathcal{B} est une base de \mathbb{R}^3 et que \mathcal{B}' est une base de \mathbb{R}^2 .
b. Donner la matrice de f dans les bases canoniques, puis dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' .

③ Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}^2$
 $P \longmapsto (P(1), P'(-1))$

puis : $P_1 = X - 1$ $P_2 = X + 1$ $P_3 = (X + 1)^2$

- a. Justifier que f est linéaire.
b. Démontrer que la famille $\mathcal{B} = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
c. Donner la matrice A de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et de \mathbb{R}^2 .
d. Donner la matrice de f dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}_2 (\mathcal{B}_2 étant la base canonique de \mathbb{R}^2).

④ Soit E un espace vectoriel de dimension finie et p un projecteur de E .

Donner la matrice de p dans une base adaptée à la somme directe $E = \text{im } p \oplus \ker p$.

⑤ Soit $E = \mathbb{R}^2$, puis $u_1 = (2, 1)$ et $u_2 = (2, -1)$.

La famille $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ est une base de \mathbb{R}^2 .

Donner les matrices de passage de la base canonique à la base \mathcal{B} et de la base \mathcal{B} à la base canonique.

⑥ Reproduire l'exercice précédent pour $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ avec :

$$u_1 = (1, 1, 1) \quad u_2 = (1, 1, 0) \quad u_3 = (1, 0, 0)$$

⑦ (Suite des deux exercices précédents.)

Dans les deux cas suivants donner la matrice de f dans la base canonique, puis dans la base \mathcal{B} .

Vérifier ensuite la formule reliant ces matrices.

a. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \longmapsto (x - 2y, 2x + 2y)$$

b. $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x, y, z) \longmapsto (x, x - z, x - y)$$

⑧ On définit les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- a. Déterminer le noyau et l'image de A .
b. Démontrer qu'il existe une base de \mathbb{R}^2 dans laquelle la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à A est B .
c. En déduire que A et B sont semblables.

⑨ Soit E un espace vectoriel de dimension finie et p un projecteur de E . Démontrer que $\text{tr } p = \text{rg } p$.

⑩ Calculer le rang des objets suivants.

$$\mathcal{F}_1 = ((6, 9), (-2, -3)) \quad M_1 = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$S : \begin{cases} x - 2y = -1 \\ 7x + 3y = 10 \\ 2x + 4y = 5 \end{cases} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{F}_2 = ((i, 1 + 2i), (2 + 3i, 1 + i))$$

$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^5$

$$(x, y, z, t) \longmapsto (y + z, x + t, 0, y + z, z + t)$$

Travaux dirigés

① Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Soit u_1, u_2 et u_3 les vecteurs de coordonnées respectives $(2, 1, -1)$, $(2, -1, 1)$ et $(0, 2, 2)$.

- a. Démontrer que la famille $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .
b. Calculer $f(u_3) + 5u_2$, puis exprimer la matrice A' de f dans la base \mathcal{B} .
c. Déterminer le rang de f ainsi qu'une base de son noyau.
d. Démontrer que $f^3 = 0$ (où $f^3 = f \circ f \circ f$).

2 On note :

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- Justifier que P est la matrice de passage de la base canonique à une base \mathcal{B} et calculer la matrice de passage dans l'autre sens.
- On note f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 défini par :

$$f(x, y, z) = (2x + 2y + z, -2x - y, x + y - z)$$
 Donner la matrice de f dans la base canonique, puis dans la base \mathcal{B} .
- Démontrer que : $f \circ f \circ f = -3\text{Id}_{\mathbb{R}^3}$

3 On note : $A = \begin{pmatrix} 3 & -10 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$ $u_1 = (5, 2)$
 $u_2 = (2, 1)$

- Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A .
- Démontrer que $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ est une base de \mathbb{R}^2 .
Donner la matrice de passage de la base canonique à la base \mathcal{B} et sa matrice inverse.
 - Exprimer la matrice B de f dans la base \mathcal{B} .
 - Calculer B^n pour tout entier n .
 - En déduire A^n pour tout entier n .

4 Reproduire l'exercice précédent avec :

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -25 \\ 4 & -9 \end{pmatrix}$$

5 Déterminer une base du noyau et de l'image de chacune des matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 8 & 10 & 7 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

6 Calculer le rang des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & -7 & 3 \\ 2 & 1 & -6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 10 \\ 17 & 8 & 9 \\ -13 & 5 & 9 \\ 5 & 11 & 15 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & 5 & 2 \\ 5 & 6 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 35 & 15 & 5 & 1 \\ 20 & 10 & 4 & 1 \\ 10 & 6 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

7 On définit les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 12 & -8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 7 & -6 \end{pmatrix}$$

Démontrer que l'une est la matrice d'un projecteur et l'autre d'une symétrie.
 Déterminer leurs éléments caractéristiques.

8 Soit P la matrice :

$$P = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ -1 & 6 & -5 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

- Déterminer le noyau et l'image de P .
- Démontrer que l'endomorphisme canoniquement associé à P est un projecteur et donner ses éléments caractéristiques.

9 Démontrer que la matrice

$$S = \begin{pmatrix} -5 & -6 & -6 \\ 6 & 7 & 6 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

est la matrice d'une symétrie et en préciser les éléments caractéristiques.

10 Soit $E = \mathbb{R}^3$, F le sous-espace vectoriel de E d'équation $x + y + 2z = 0$, et G le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur $(1, 0, 1)$.

- Démontrer que $E = F \oplus G$ et donner une base \mathcal{B} adaptée à cette somme directe.
- Donner les matrices de passage de la base canonique \mathcal{B}_c à \mathcal{B} et de \mathcal{B} à \mathcal{B}_c .

On note p le projecteur de \mathbb{R}^3 sur F parallèlement à G et s la symétrie associée.

- Déterminer la matrice de p dans la base \mathcal{B} .
- Déterminer la matrice de p puis celle de s dans la base canonique.

11 Soit $E = \mathbb{R}^4$. On souhaite déterminer la matrice de p , le projecteur de E sur F le sous-espace vectoriel d'équation $x + y + z + t = 0$, parallèlement à G le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur $v_1 = (1, 1, 1, 1)$.

- Démontrer que $E = F \oplus G$, donner une base adaptée à cette somme directe.
- Donner les matrices de passages de la base canonique à cette base, et réciproquement.
- Déterminer la matrice de $q = \text{Id}_E - p$ dans la base adaptée choisie ci-dessus.
- En déduire la matrice de q dans la base canonique, puis celle de p .

12 Soit f l'application linéaire définie par

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \mapsto (y + z, x - z, x - y).$$

On pose $F = \ker(f - \text{Id})$, $G = \ker(f + 2\text{Id})$.

- Donner les matrices de $f - \text{Id}$ et de $f + 2\text{Id}$.
- Déterminer une base de F puis de G .
- Démontrer que F et G sont supplémentaires.
- Donner la matrice de f dans une base adaptée à la somme directe $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.
- Simplifier $f \circ f + f$.

En déduire que f est bijective et donner son application réciproque.

13 Dans $E = \mathbb{R}^3$ on définit :

$$u_1 = (1, 1, 0) \quad u_2 = (1, 2, 2) \quad u_3 = (2, 3, 1)$$

- a. Démontrer que la famille $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de E . Donner la matrice de passage de la base canonique de E à cette base puis inverser cette matrice.
- b. Pour $i = 1, 2, 3$ on note u_i^* la forme linéaire de E qui à un vecteur associe sa i -ème coordonnée dans la base \mathcal{B} . Donner les matrices des u_i^* dans les bases canoniques de E et de \mathbb{R} .

14 Soit f l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^2$ défini par :

$$\forall (x, y) \in E \quad f(x, y) = (4x - y, 9x - 2y)$$

Démontrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Donner une telle base.

15 Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et f un endomorphisme de E tel que $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$.

Démontrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

16 Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E tel que $\ker f \oplus \operatorname{im} f = E$. On note r le rang de f .

- a. Démontrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est la matrice par blocs $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où C est une matrice inversible de taille (r, r) .
- b. Déterminer une telle base et la matrice B pour l'endomorphisme f canoniquement associé à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -a & -a-4 & 4-a & 3a \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ a & a & a & -3a \end{pmatrix}$$

17 Dans chacun des cas ci-dessous démontrer que les matrices A et B sont semblables.

a. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

b. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

d. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

18 Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E tel que $\ker f = \operatorname{im} f$. Démontrer que dans une certaine base de E la matrice de f est la matrice par blocs $\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où l'entier r est à déterminer.

19 Soit f l'application définie par

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ (a, b, c) \mapsto \int_0^2 \frac{ax^2 + bx + c}{(x+1)(x-3)} dx$$

a. Démontrer que f est linéaire.

Soit $u_1 = (0, 1, 1)$ $u_2 = (0, 1, -3)$ $u_3 = (1, -2, -3)$.

- b. Démontrer que la famille $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .
- c. Calculer $f(u_1)$, $f(u_2)$ et $f(u_3)$.
- d. Déterminer la matrice de passage de la base \mathcal{B} à la base canonique. En déduire la valeur de $f(a, b, c)$ pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

20 Soit n un entier naturel et $E = \mathbb{R}_n[X]$.

Soit f l'application définie par :

$$f : E \rightarrow E \\ P \mapsto P(X+1)$$

- a. Démontrer que f est bijective en explicitant sa réciproque.
- b. Justifier que f est linéaire, et donner sa matrice dans la base canonique de E .
- c. Donner la matrice inverse de la précédente.

21 Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ engendré par les fonctions cosinus et sinus.

- a. Justifier que $\mathcal{B} = (\cos, \sin)$ est une base de E .
- b. Justifier que $\Phi : f \mapsto f' - f$ est un endomorphisme de E . Donner sa matrice dans la base \mathcal{B} .
- c. Démontrer que Φ est un automorphisme.
- Quels éléments f de E vérifient $f' - f = \cos$?

22 Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et φ l'application linéaire définie par :

$$\varphi : E \rightarrow E \\ f \mapsto f'' + 9f$$

- a. Déterminer le noyau de φ et donner sa dimension.

Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $\mathcal{B} = (\cos, \cos^3)$.

- b. Démontrer que \mathcal{B} est une base de F .
- c. Démontrer que F est stable par φ .
- d. Soit $\psi : F \rightarrow F$ la restriction de φ à F . Donner la matrice Ψ de ψ dans la base \mathcal{B} .
- e. Donner une base du noyau de Ψ et en déduire une base de celui de ψ .
- f. Démontrer que $\ker \psi \subseteq \ker \varphi$. En déduire la formule donnant $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$.

23 Soit α, β, γ trois réels distincts et :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_2[X] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ P &\longmapsto (P(\alpha), P(\beta), P(\gamma)) \end{aligned}$$

a. Justifier que f est linéaire et donner sa matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et \mathbb{R}^3 .

On note A cette matrice.

b. Démontrer que A est inversible.

c. Déterminer l'image réciproque par f de la base canonique de \mathbb{R}^3 .

d. Démontrer que la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ à la base de la question précédente est la matrice inverse de A .

24 Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E de rang 1.

a. Démontrer qu'il existe un scalaire λ tel que $f \circ f = \lambda f$.

On suppose dorénavant que E est de dimension finie.

b. Démontrer qu'une matrice A de taille (n, p) et de rang 1 si et seulement si il existe deux matrices colonnes U et V non-nulles telles que $A = U {}^t V$.

c. En déduire une autre justification du résultat de la première question.

d. En considérant une base judicieuse démontrer que si de plus $\text{tr } f = 1$ alors f est un projecteur.

25 Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

On définit l'application $f : E \longrightarrow E$
 $M \longmapsto AM$.

a. Justifier que f est un endomorphisme de E , inversible si et seulement si A est inversible.

b. Donner la matrice de f dans la base canonique de E .

c. Exprimer la trace de f en fonction de celle de A , puis le rang de f en fonction de celui de A .

26 Soit E un espace vectoriel de dimension finie et (e_1, \dots, e_n) une base de E .

Pour tout $i = 1, \dots, n$ on note e_i^* la forme linéaire coordonnée associée à e_i , c'est-à-dire la forme linéaire qui à un vecteur de E associe sa i -ème coordonnée dans la base (e_1, \dots, e_n) .

a. Soit f un endomorphisme de E . Démontrer que :

$$\text{tr } f = \sum_{i=1}^n e_i^*(f(e_i))$$

b. Application : déterminer la trace de l'endomorphisme de transposition de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

27 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Soit A une matrice de taille (n, n) .

On suppose que :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \text{tr}(AM) = 0.$$

Démontrer que $A = 0_n$.

b. Soit φ une forme linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Démontrer qu'il existe une et une seule matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \varphi(M) = \text{tr}(AM).$$

28 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A {}^t A A = I_n$.

a. Démontrer que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:
 $\text{tr}({}^t M M) \geq 0$ et $(\text{tr}({}^t M M) = 0 \iff M = 0_n)$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A {}^t A A = I_n$.

b. Démontrer que A est inversible et symétrique.

c. Soit $a = \text{tr } A$ et $b = \text{tr } A^2$. Justifier que les matrices $(A - I_n)^2$, $(A^2 - I_n)^2$ et $(A^2 - A)^2$ sont symétriques et exprimer leurs traces en fonction de a, b, n .

d. En utilisant la question (a) démontrer que $a = b = n$. En déduire que $A = I_n$.