Programme de colles
Semaine 25
du 28 avril au 2 mai 2025

Questions de cours

Sauf mention explicite il faut connaître l'énoncé et la démonstration.

1. Calculs d'intégrales : révisions des méthodes vues dans le chapitre A5 (décomposition en éléments simples, intégration par parties, changement de variable).
2. Théorème de positivité : Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et positive. Si $\displaystyle\int_a^b f = 0$ alors $f = 0$.
3. Méthodes des rectangles : définitions de R_n, S_n. Énoncé du théorème.
4. Théorème fondamental de l'analyse, en admettant l'égalité de la moyenne (une fonction continue sur un segment atteint sa moyenne).
5. Second corollaire du théorème fondamental.
6. Énoncés : formule de Taylor avec reste intégral et inégalité de Taylor-Lagrange.

Exercices

Chapitre A10. Développements limités

I. Généralités
II. Calculs de développements limités
III. Développement limité en un point non-nul
IV. Applications

Chapitre B10. Dimension

I. Dimension d'un espace vectoriel
II. Dimension et sous-espaces vectoriels
III. Applications linéaires en dimension finie

Programme prévisionnel de la semaine suivante

Chapitres B10 (Dimension) et A11 (Intégration).

Chapitre A10. Développements limités

I. Généralités

Définition d'un DL en 0 à l'ordre n. Lien avec la continuité et la dérivabilité. Troncature, unicité, parité des DL. Forme normalisée.

Développements limités des fonctions usuelles : $\frac{1}{1+x}$, $\ln(1+x)$, e^x, $\cos x$, $\sin x$, $(1+x)^\alpha$, $\arctan x$, et $\tan x$ à l'ordre 3.

II. Calculs de développements limités

Somme, produit, composition, quotient de DL. Primitivation. Formule de Taylor Young, corollaire : une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ admet un DL à tout ordre.

IV. Développements limités en un point quelconque

On pose $h = x - a$, on obtient un DL en a.

V. Applications

Calculs de limites. Tangente et position relative. Asymptotes et position relative. Développement asymptotique.

Chapitre B10. Dimension

I. Dimension d'un espace vectoriel

Espace vectoriel de dimension finie. Théorème : tout espace vectoriel de dimension finie admet une base, et toutes ses bases ont même cardinal. Définition de la dimension. Exemples usuels. Droites et plans vectoriels. Dimension d'un produit d'espaces vectoriels.

Théorème : cardinaux des familles génératrices et libres, cas d'égalité (familles génératrices minimales et libres maximales). Théorèmes de la base extraite et de la base incomplète.

II. Dimension et sous-espaces vectoriels

Dimension d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie, cas d'égalité.

Tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie admet un supplémentaire. Deux sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim F + \dim G = \dim E$. Base adaptée à une somme directe. Formule de Grassmann.

Rang d'une famille de vecteur. Le rang d'une famille de p vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n est inférieur à p et à n. Cas d'égalité.

III. Applications linéaires en dimension finie

Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base.

Proposition : l'image d'une base est libre, génératrice, une base si et seulement si f est injective, surjective, bijective.

Rang d'une application linéaire. En dimension finie, caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité et de la bijectivité à l'aide du rang. Le rang de $g \circ f$ est inférieur à ceux de f et de g.

Espaces vectoriels isomorphes en dimension finie, E et F sont isomorphes si et seulement si ils ont même dimension. La dimension des sous-espaces vectoriels et le rang des applications linéaires sont invariants par isomorphismes.

Théorème du rang, corollaire (cas $\dim E = \dim F$).

Les hyperplans d'un espace vectoriel de dimension n sont les sous-espaces vectoriels de dimension $n-1$. L'intersection de m hyperplans est de dimension au moins $n-m$. Tout sous-espace vectoriel de dimension $n-m$ est l'intersection de m hyperplans.