Corrigé du T. D. C1
Probabilités

1 Soit A, B, C trois événements. Déterminer la probabilité de $A \cup B \cup C$ en fonction des probabilités des événements A, B, C et de leurs intersections.

On applique la formule :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{1}$$

En remplaçant A par $A \cup B$ et B par C :

$$P((A \cup B) \cup C) = P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C)$$

Par distributivité de l'intersection par rapport à l'union :

$$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup B) + P(C) - P((A \cap C) \cup (B \cap C))$$

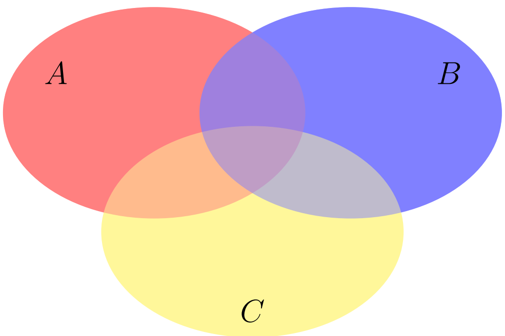
On applique deux fois la formule (1) :

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) \\ - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P((A \cap C) \cap (B \cap C)) \end{aligned}$$

Comme $(A \cap C) \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$ on en déduit :

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) \\ - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\ + P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

On peut comprendre cette formule grâce au schéma suivant :



On ajoute les probabilités de A, B, C, puis on supprime celles de $A \cap B$, $A \cap C$ et $B \cap C$ qui ont été comptées deux fois, puis on ajoute celle de $A \cap B \cap C$, qui a été comptée trois fois puis enlevée trois fois.

On peut extrapoler la formule pour quatre ensembles :

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C\cup D) = &\ P(A)+P(B)+P(C)+P(D)\\ &-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(A\cap D)-P(B\cap C)-P(B\cap D)-P(C\cap D)\\ &+P(A\cap B\cap C)+P(A\cap B\cap D)+P(A\cap C\cap D)+P(B\cap C\cap D)\\ &-P(A\cap B\cap C\cap D)\end{aligned}$$

On voit apparaître les coefficients du binôme.

La formule générale est la *formule du crible*, due à Henri Poincaré (1854 – 1912), valable pour n ensembles, où $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{p=1}^{n}(-1)^{p-1}\left(\sum_{1\leqslant k_1<\cdots<k_p\leqslant n} P(A_{k_1}\cap\cdots\cap A_{k_p})\right)$$

2 Un dé est truqué : la probabilité que l'entier $k \in$
$inte16$ apparaisse est proportionnelle à k.
Donner un espace probabilisé modélisant le lancer de ce dé, puis calculer la probabilité qu'on obtienne un résultat pair.

On choisit l'univers $\Omega = [\![1,6]\!]$.
On définit les événements A_k : «obtenir k» pour k allant de 1 à 6.
Selon l'énoncé la probabilité de l'événement A_k est proportionnelle à k. Il existe donc un réel λ tel que :

$$\forall k \in [\![1,n]\!] \qquad P(A_k) = \lambda k$$

Comme la famille $(A_k)_{1\leqslant k\leqslant 6}$ est un système complet d'événements alors :

$$\sum_{k=1}^{6} P(A_k) = 1$$

Ceci donne $\sum_{k=1}^{6}(\lambda k) = 1$, et comme $\sum_{k=1}^{6} k = \frac{6\times 7}{2} = 21$ on en déduit $\lambda = \frac{1}{21}$.
Les probabilités des événements élémentaires sont donc :

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

Soit A l'événement : «obtenir un numéro pair».
Cet événement a lieu si et seulement si on obtient 2, 4, ou 6, donc : $A = A_2 \cup A_4 \cup A_6$
Comme les A_k sont incompatibles alors :

$$P(A) = P(A_2) + P(A_4) + P(A_6)$$

On obtient $P(A) = \frac{4}{7}$, la probabilité d'obtenir un nombre pair avec ce dé est de $\frac{4}{7}$.

(3) On possède une urne contenant 10 boules numérotées de 1 à 10.

Trois fois de suite on pioche une boule, on note le numéro obtenu et on garde la boule.

a. Donner un espace probabilisé modélisant cette expérience.

b. Calculer la probabilité des événements :

- B : «On n'obtient jamais le 10.»
- C : «On obtient au moins une fois le 10.»
- D : «On obtient le 10 lors du troisième tirage.»

a. On choisit pour univers Ω l'ensemble des triplets d'entiers distincts compris entre 1 et 10 :

$$\Omega = \left\{ (a, b, c) \in [\![1, 10]\!]^3 \;\middle|\; a, b, c \text{ distincts} \right\}$$

On admet que chaque boule a autant de chances d'être piochée que les autres. Alors chaque triplet de Ω a autant de chance d'arriver que les autres, et donc on peut munir Ω de la probabilité uniforme.

b. Les éléments élémentaires de Ω étant équiprobables, on peut appliquer la formule suivante pour tout événement A :

$$P(A) = \frac{\operatorname{Card} A}{\operatorname{Card} \Omega}$$

On compte d'abord le nombre d'éléments de Ω.

Pour le premier numéro 10 nombres sont possibles. Une fois que ce numéro est pioché, pour le second il reste 9 numéros possibles, et pour le troisième il en reste alors 8.

Ainsi Ω possède $10 \times 9 \times 8 = 720$ éléments.

La probabilité d'un événement élémentaire, comme par exemple «obtenir $(6, 3, 7)$», est donc de $\frac{1}{720}$.

Calculons maintenant les probabilités des événements B, C, D.

- L'événement B contient les triplets de Ω où le 10 n'apparaît pas. Il contient donc les triplets de trois nombres distincts parmi $[\![1, 9]\!]$:

  $$B = \left\{ (a, b, c) \in [\![1, 9]\!]^3 \;\middle|\; a, b, c \text{ distincts} \right\}$$

  Son cardinal est : $\operatorname{Card} B = 9 \times 8 \times 7$

  On en déduit par équiprobabilité :

  $$P(B) = \frac{\operatorname{Card} B}{\operatorname{Card} \Omega} = \frac{9 \times 8 \times 7}{10 \times 9 \times 8} = \frac{7}{10}$$

- L'événement contraire de C est : «ne jamais obtenir le 10». Il s'agit de l'événement B, donc $C = \overline{B}$.

  On en déduit :

  $$P(C) = 1 - P(B) = \frac{3}{10}$$

- L'événement D contient les triplets de trois nombres distincts entre 1 et 10 où le troisième est le 10 :
$$D = \left\{ (a, b, 10) \in [\![1, 10]\!]^3 \;\middle|\; a, b \text{ distincts} \right\}$$
Le a peut prendre 9 valeurs distinctes, puisque le 10 est en position 3. Pour chaque valeur de a, 8 valeurs sont encore possibles pour b.
On en déduit : $\operatorname{Card} D = 9 \times 8$
Par équiprobabilité :
$$P(D) = \frac{\operatorname{Card} D}{\operatorname{Card} \Omega} = \frac{9 \times 8}{10 \times 9 \times 8} = \frac{1}{10}$$
Évidemment, ceci est logique : en troisième position le 10 a autant de chances que les autres numéros d'apparaître.

4 On jette trois dés. On note X la variable aléatoire égale à la somme des trois dés. Calculer $P(X = k)$ pour $k = 2, 3, 4, 5, 6, 10$.

Comme chaque dés donne une valeur comprise entre 1 et 6, la variable aléatoire X prend ses valeurs dans l'ensemble $X(\Omega) = [\![3, 18]\!]$.
Pour modéliser cette expérience on choisit l'univers Ω contenant les triplets d'entiers compris entre 1 et 6 :
$$\Omega = [\![1, 6]\!]^3 = \{ (a, b, c) \mid 1 \leqslant a, b, c \leqslant 6\}$$
Les cardinal de cet ensemble est : $\operatorname{Card} \Omega = 6^3 = 216$
Chaque numéro a autant de chance d'arriver que les autres sur chaque dé, donc tous les triplets sont équiprobables, *i.e.,* Ω est muni de la probabilité uniforme.

On explicite maintenant les événements $(X = k)$ demandés pour calculer leurs probabilités.

L'événement $(X = 2)$ est impossible donc $P(A_2) = 0$.

Comme $(X = 3) = \{(1, 1, 1)\}$ alors par équiprobabilité $P(X = 3) = \frac{1}{216}$.

Comme $(X = 4) = \{(1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1)\}$ alors $P(X = 4) = \frac{3}{216} = \frac{1}{72}$.

Pour l'événement $(X = 5)$ on obtient les trois permutations de $(1, 1, 3)$ et les trois permutations de $(1, 2, 2)$, donc six possibilités. Ainsi $P(X = 5) = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$.

Pour l'événement $(X = 6)$ on obtient $(2, 2, 2)$, les trois permutations de $(1, 1, 4)$ et les six permutations de $(1, 2, 3)$, donc dix possibilités. Ainsi $P(X = 6) = \frac{10}{216} = \frac{5}{108}$.

Enfin pour l'événement $(X = 10)$ on écrit :
$$\begin{array}{llll}
(1,3,6) & \text{donne} & 6 & \text{permutations} \\
(2,2,6) & & 3 & \text{permutations} \\
(1,4,5) & & 6 & \text{permutations} \\
(2,3,5) & & 6 & \text{permutations} \\
(2,4,4) & & 3 & \text{permutations} \\
(3,3,4) & & 3 & \text{permutations.}
\end{array}$$

Ainsi 27 triplets conviennent, et donc $P(X=10)=\frac{27}{216}=\frac{1}{8}$.

La suite pour k allant de 3 à 10 est 1, 3, 6, 10, 15, 21, 25, 27 sur 216. Pour k allant de 11 à 18 c'est la suite inverse.

On peut même démontrer que :

$$\forall k=1,\ldots,20 \qquad P(X=k)=\begin{cases} \frac{(k-1)(k-2)}{2\times 6^3} & \text{si} \quad 1\leqslant k\leqslant 8 \\ -\frac{k^2-21k+83}{6^3} & \text{si} \quad 7\leqslant k\leqslant 14 \\ \frac{(20-k)(19-k)}{2\times 6^3} & \text{si } 13\leqslant k\leqslant 20. \end{cases}$$

(5) Soit $k\in[\![0,26]\!]$. On pioche k lettres une par une dans un sac contenant les 26 lettres de l'alphabet.

a. Décrire l'univers modélisant cette expérience. Quel est son cardinal ?

On note S_k l'événement : «le S apparaît lors de l'un des k tirages» et T_k l'événement «le S apparaît lors du k-ème tirage».

b. Calculer la probabilité de S_k.

Exprimer T_k en fonction de S_k et S_{k-1} et en déduire sa probabilité.

c. Autre méthode : Calculer directement la probabilité de T_k.

Exprimer S_k en fonction des T_i et en déduire sa probabilité.

a. L'univers Ω est l'ensemble des listes de k éléments distincts de l'alphabet, donc :

$$\operatorname{Card}\Omega=\frac{26!}{(26-k)!}$$

En effet 26 lettres sont possibles pour la première, puis 25 pour la seconde, etc jusqu'à $(26-(k-1))=27-k$ pour la k-ème, donc :

$$\operatorname{Card}\Omega=26\times 25\times\cdots\times(27-k)=\frac{26!}{(26-k)!}$$

On suppose que les lettres sont indiscernables au toucher, et donc les éléments de Ω sont équiprobables.

b. L'événement S_k est l'ensemble des listes contenant k éléments distincts dont le S.

Ce S peut être placé en k positions différentes. Ensuite pour les $k-1$ lettres restantes, il faut compter le nombre de listes de $k-1$ éléments distincts d'un ensemble à 25 éléments, donc :

$$\operatorname{Card}S_k=k\times\frac{25!}{(25-(k-1))!}=\frac{k\,25!}{(26-k)!}$$

Par équiprobabilité :

$$P(S_k)=\frac{\operatorname{Card}S_k}{\operatorname{Card}\Omega}=\frac{k\times 25!\times(26-k)!}{(26-k)!\times 26!}=\frac{k}{26}$$

En piochant k lettres dans le sac, la probabilité d'obtenir le S est $\frac{k}{26}$.

Effectivement si $k = 0$ alors on ne peut obtenir le S et si $k = 26$ alors on est certain de l'obtenir.

L'événement T_k signifie que l'on obtient le S dans les k premiers tirages mais pas dans les $(k-1)$ premiers tirages : $T_k = S_k \setminus S_{k-1}$.

On en déduit : $P(T_k) = P(S_k) - P(S_k \cap S_{k-1})$

Si l'événement S_{k-1} a lieu alors le S est obtenu lors des $(k-1)$ premiers tirages, donc *a fortiori* le S est obtenu lors des k premiers tirages. Ainsi $S_{k-1} \subseteq S_k$, puis $S_{k-1} \cap S_k = S_{k-1}$.

On peut donc calculer :

$$P(T_k) = P(S_k) - P(S_{k-1}) = \frac{k}{26} - \frac{k-1}{26} = \frac{1}{26}$$

La probabilité l'obtenir le S lors du tirage k est de $\frac{1}{26}$.

Ceci semble logique, le S a autant de chance d'arriver que toutes les autres lettres.

c. L'événement T_k contient les listes de k éléments distincts de l'alphabet dont le S en position k.

Ce S étant placé, il reste à compléter la liste avec une liste de $(k-1)$ éléments distincts parmi un ensemble à 25 éléments, donc :

$$\operatorname{Card} T_k = \frac{25!}{(25-(k-1))!} = \frac{25!}{(26-k)!}$$

Par équiprobabilité :

$$P(T_k) = \frac{\operatorname{Card} T_k}{\operatorname{Card} \Omega} = \frac{25! \times (26-k)!}{(26-k)! \times 26!} = \frac{1}{26}$$

On retrouve bien le résultat de la question précédente.

L'événement S_k signifie que le S est obtenu lors de l'un des tirages 1 à k, donc que l'un des événements $T_1, T_2, \ldots, T_k$ a lieu :

$$S_k = T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_k = \bigcup_{i=1}^{k} T_i$$

Si le S est pioché à un tirage i alors il ne peut être pioché à un autre tirage puisque les lettres ne sont pas remises dans le sac après chaque tirage. Ceci justifie que les événements T_i sont incompatibles : si $i \neq j$ alors $T_i \cap T_j = \varnothing$.

On en déduit, par additivité :

$$P(S_k) = \sum_{i=1}^{k} P(T_i)$$

La question précédente donne $P(S_k) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{26} = \frac{k}{26}$.

On retrouve bien le résultat de la question b.

⑥ Une urne contient une boule noire, deux boules rouges et sept boules blanches.

a. On pioche simultanément n boules de l'urne ($0 \leqslant n \leqslant 10$). Quelle est la probabilité d'obtenir la boule noire ? Au moins une rouge ?

b. On pioche n fois de suite une boule de l'urne ($n \in \mathbb{N}$) puis on la remet dans l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir la boule noire ? Au moins une rouge ?

a. L'univers Ω est l'ensemble des parties à n éléments de l'urne, laquelle contient 10 boules. Donc Ω est de cardinal $\binom{10}{n}$. De plus on suppose que toutes les boules sont identiques (à part leur couleur) et donc les éléments de Ω sont équiprobables.

On définit les événements :

- A : «On obtient la boule noire.»
- B : «On obtient au moins une boule rouge.»

Alors A est l'ensemble des parties contenant la boule noire et $n-1$ boules parmi les 9 autres boules, donc A est de cardinal $\binom{9}{n-1}$. Par équiprobabilité :

$$P(A) = \frac{\operatorname{Card} A}{\operatorname{Card} \Omega} = \frac{\binom{9}{n-1}}{\binom{10}{n}} = \frac{9!}{(n-1)!(10-n)!} \times \frac{n!(10-n)!}{10!} = \frac{n}{10}$$

La probabilité d'obtenir la boule noire est donc de $\frac{n}{10}$.

Si $n = 0$ alors cette probabilité est nulle car on ne pioche pas de boules.

Si $n = 1$ alors cette probabilité est de $\frac{1}{10}$, ce qui se comprend bien, on pioche une boule dans une urne contenant 10 boules dont une seule noire.

Si $n = 10$ alors cette probabilité est égale à 1 car on pioche toutes les boules.

Pour calculer la probabilité de B on considère son événement contraire $\overline{B}$: «on n'obtient pas de boule rouge». Ceci signifie que l'on obtient n boules parmi les 8 boules qui ne sont pas rouges, donc B est de cardinal $\binom{8}{n}$. Par équiprobabilité :

$$P(\overline{B}) = \frac{\operatorname{Card} \overline{B}}{\operatorname{Card} \Omega} = \frac{\binom{8}{n}}{\binom{10}{n}} = \frac{8!}{n!(8-n)!} \times \frac{n!(10-n)!}{10!} = \frac{(10-n)(9-n)}{90}$$

On en déduit :

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = \frac{90 - ((10-n)(9-n))}{90} = \frac{n^2 - 19n}{90} = \frac{n(19-n)}{90}$$

La probabilité d'obtenir au moins une boule rouge est donc de $\frac{n(19-n)}{90}$.

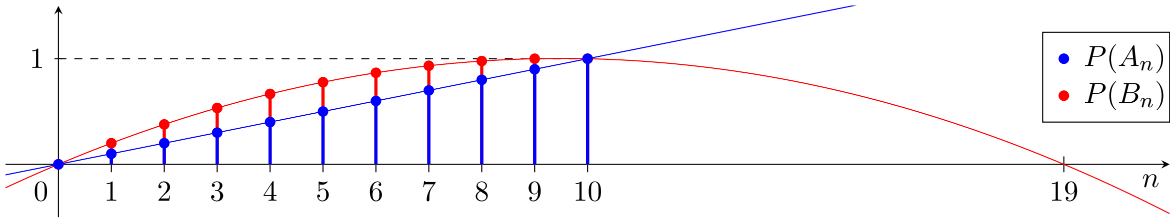
Si $n = 0$ alors cette probabilité est nulle car on ne pioche pas de boules.

Si $n = 1$ alors cette probabilité est de $\frac{18}{90} = \frac{2}{10}$, ce qui se comprend bien, on pioche une boule dans une urne contenant 10 boules dont deux rouges.

Si $n = 10$ alors cette probabilité est égale à $\frac{10 \times 9}{90}$ donc à 1. En effet on pioche toutes les boules donc on est certain d'en obtenir au moins une rouge.

Si $n = 9$ alors cette probabilité est égale à $\frac{9 \times 10}{90}$ donc à 1. En effet, on pioche 9 boules dans l'urne qui en contient 10, mais deux boules sont rouges donc on est certain d'avoir au moins une rouge.

On peut représenter ces probabilités sur un graphique. La probabilité de A est sur la droite d'équation $y = \frac{x}{10}$, celle de B est sur la parabole d'équation $\frac{x(19-x)}{90}$. Cette parabole est orientée vers le bas, elle coupe l'axe des abscisses aux points 0 et 19.



b. L'univers Ω contient maintenant les listes de n éléments parmi 10. Son cardinal est donc 10^n, et il est muni de la probabilité uniforme.

L'événement A est maintenant : «on obtient au moins une fois la boule noire», l'événement B est inchangé : «on obtient au moins une fois une boule rouge».

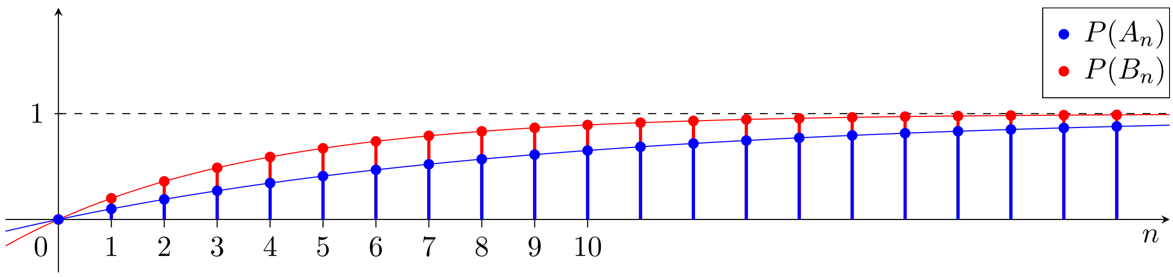
On considère les événements contraires $\overline{A}$: «on n'obtient jamais la noire» et $\overline{B}$: «on n'obtient jamais une rouge».

Alors $\overline{A}$ contient les listes de n éléments parmi 9, car 9 boules ne sont pas noires, et $\overline{B}$ contient les listes de n éléments parmi 8, car 8 boules ne sont pas rouges. Ainsi $\overline{A}$ est de cardinal 9^n et $\overline{B}$ est de cardinal 8^n. Par équiprobabilité :

$$P(A) = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^n \qquad \text{et} \qquad P(B) = 1 - \left(\frac{8}{10}\right)^n$$

On peut représenter graphiquement ses probabilités. Elles sont sur les courbes des fonctions f et g définie par $f(x) = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^x$ et $g(x) = 1 - \left(\frac{8}{10}\right)^x$.

Ce sont des formes exponentielles, par exemple $f(x) = 1 - e^{x \ln \frac{9}{10}}$.



⑦ Quelle est la probabilité en piochant cinq cartes d'un jeu de Poker d'obtenir un brelan qui n'est ni un full ni un carré ? D'obtenir deux paires mais pas de full ?

On rappelle que le Poker se joue avec un jeu de 52 cartes, réparties en 4 couleurs et 13 valeurs. Une paire est un ensemble de deux cartes de même valeur, un brelan est un ensemble de trois cartes de même valeur, un full est l'union d'un brelan et d'une paire.

Il existe 13 valeurs possibles pour un brelan : du 2 à l'as.

Pour une valeur donnée il existe 4 brelans : c'est le nombre de façons de choisir 3 éléments parmi 4. Par exemple il existe 4 brelans d'as, 4 brelans de roi, etc.

Il existe donc 4×13 brelans, auxquels il faut ajouter deux cartes de valeurs différentes, sinon on aurait un full.

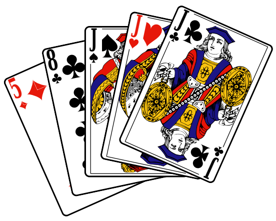
Il faut donc choisir 2 valeurs parmi les 12 restantes, soit $\binom{12}{2} = 6 \times 11$ possibilités.

Et une fois ces valeurs choisies il existe 4 cartes de chaque valeur, une par couleur.

Le nombre de mains contenant un brelan est donc :

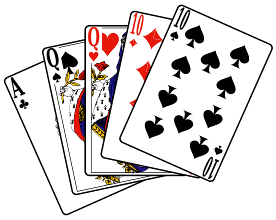
$$13 \times 4 \times 6 \times 11 \times 4^2 = 2^7 \times 3 \times 11 \times 13$$

Par exemple pour le brelan suivant :



On a 13 façons de choisir le valet, puis 4 brelans de valets, ici on a choisi les valets de pique, cœur et trèfle. Puis $\binom{12}{2}$ façons de choisir le cinq et le huit, et enfin 4 cinq et 4 huit possibles.

Pour les deux paires : on choisit deux valeurs parmi 13, soit $\binom{13}{2} = 13 \times 6$ possibilités. Par exemple une paire de dames et une paire de 10.



Pour une paire donnée il existe $\binom{4}{2} = 6$ façons de choisir la paire, on choisit deux couleurs parmi les 4 possibles. Par exemple pour les dames on choisit pique et cœur et pour les 10 on choisit carreau et pique.

Ensuite il reste une carte à choisir parmi les $52 - 8 = 44$ cartes qui n'ont pas les valeurs des paires, c'est-à-dire dans notre cas ni une dame ni un 10.

Le nombre de mains contenant deux paires est donc :

$$13 \times 6 \times 6^2 \times 44 = 2^5 \times 3^3 \times 11 \times 13$$

8 On jette deux fois de suite une pièce de monnaie équilibrée.

Quelle est la probabilité que l'on obtienne deux piles sachant que l'on en a obtenu au moins un ?

L'univers Ω contient quatre éléments :

$$\Omega = \{(F,F),(F,P),(P,F),(P,P)\}$$

Ces quatre éléments sont équiprobables car la pièce est équilibrée.
On définit les événements :

- A : «on obtient au moins un pile»
- B : «on obtient deux piles»

Comme $A = \{(F,P),(P,F),(P,P)\}$ alors par équiprobabilité :

$$P(A) = \frac{\text{Card}\,A}{\text{Card}\,\Omega} = \frac{3}{4}$$

Comme $B = \{(P,P)\}$ alors par équiprobabilité :

$$P(B) = \frac{\text{Card}\,B}{\text{Card}\,\Omega} = \frac{1}{4}$$

La probabilité demandée est $P_A(B)$. Par définition des probabilités conditionnelles :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Comme $A \cap B = B$ alors :

$$P_A(B) = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{1}{3}$$

La probabilité que l'on obtienne deux piles sachant que l'on en a obtenu au moins un est donc de $\frac{1}{3}$.

9 On pioche des lettres une par une dans un sac contenant les 26 lettres de l'alphabet, sans les remettre. Pour tout $k \in [\![0,26]\!]$ on note T_k l'événement : «le S apparaît au tirage k».

a. Pour tout $i \in [\![1,26]\!]$ calculer directement $P_{\overline{T_1}\cap\cdots\cap\overline{T_{i-1}}}(\overline{T_i})$.

b. En déduire la probabilité de l'événement S_k : «le S apparaît lors de l'un des k tirages».

a. Pour tout $k \in [\![1,26]\!]$ l'événement $\overline{T_k}$ signifie que le S n'est pas pioché au tirage k.
L'événement $\overline{T_1} \cap \cdots \cap \overline{T_{i-1}}$ signifie donc que le S n'apparaît pas aux tirages 1 à $i-1$.
Si cet événement a lieu alors il reste $(26-(i-1)) = 27-i$ lettres dans le sac, dont le S. Par équiprobabilité la probabilité de le piocher au tirage suivant est donc de $\frac{1}{27-i}$, et la probabilité de ne pas le piocher est $1 - \frac{1}{27-i}$:

$$\forall i \in [\![1,26]\!] \qquad P_{\overline{T_1}\cap\cdots\cap\overline{T_{i-1}}}(\overline{T_i}) = \frac{26-i}{27-i}$$

On peut remarquer que cette formule est valable aussi pour $i = 1$, auquel cas l'événement $\overline{T_1} \cap \cdots \cap \overline{T_{i-1}}$ est l'événement certain, et donc $P(\overline{T_1}) = \frac{25}{26}$.

b. Soit $k \in [\![1, 26]\!]$. D'après la formule des probabilités composées :

$$P(\overline{T_1} \cap \cdots \cap \overline{T_k}) = \prod_{i=1}^{k} P_{\overline{T_1} \cap \cdots \cap \overline{T_{i-1}}}(\overline{T_i})$$

D'après la question précédente :

$$P(\overline{T_1} \cap \cdots \cap \overline{T_k}) = \prod_{i=1}^{k} \frac{26-i}{27-i}$$

On remarque un télescopage, que l'on peut rédiger correctement de la façon suivante, en utilisant le changement d'indice $j = i - 1$:

$$\prod_{i=1}^{k} \frac{26-i}{27-i} = \frac{\prod\limits_{i=1}^{k}(26-i)}{\prod\limits_{i=1}^{k}(27-i)} = \frac{\prod\limits_{i=1}^{k}(26-i)}{\prod\limits_{j=0}^{k-1}(27-(j+1))} = \frac{\prod\limits_{i=1}^{k}(26-i)}{\prod\limits_{i=0}^{k-1}(26-i)} = \frac{26-k}{26}$$

L'événement $\overline{T_1} \cap \cdots \cap \overline{T_k}$ signifie que le S n'apparaît pas aux tirages 1 à k. L'événement contraire est : «le S apparaît lors de l'un des k tirages». Il s'agit de l'événement S_k.

On en déduit :

$$P(S_k) = 1 - P(\overline{T_1} \cap \cdots \cap \overline{T_k}) = \frac{k}{26}$$

Notons que cette formule est cohérente avec l'intuition pour les valeurs $k = 0$, 1 et 26.

10 On possède un sac avec n jetons numérotés de 1 à n ($n \in \mathbb{N}^*$), et n urnes $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n$ contenant chacune k boules blanches et $n - k$ boules noires.

On pioche un jeton dans le sac. On obtient un numéro k. On pioche ensuite une boule dans l'urne $\mathcal{U}_k$.

a. Quelle est la probabilité que la boule obtenue soit blanche ?

b. La boule obtenue est blanche. Quelle est la probabilité, pour $k \in [\![1, n]\!]$, qu'elle provienne de l'urne $\mathcal{U}_k$?

a. On reconnaît une expérience aléatoire en deux phases, pour laquelle la formule des probabilités totales est toute indiquée.

Pour tout $k = 1, \ldots, n$ on note A_k l'événement «le jeton pioché dans le sac porte le numéro k».

On note ensuite B l'événement «la boule piochée est blanche».

On souhaite donc calculer la probabilité de l'événement B.

La famille $(A_1, \ldots, A_n)$ est un système complet d'événements car :

- On pioche un numéro entre 1 et n, donc l'un au moins des événements A_k a lieu, *i.e.*, $A_1 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$.

- On ne pioche qu'un seul jeton, donc deux événements A_i distincts ne peuvent avoir lieu simultanément : si $i \neq j$ alors $A_i \cap A_j = \varnothing$.

De plus les A_i sont de probabilités non-nulles car le sac contient au moins un jeton portant chaque numéro de 1 à n.

Ces hypothèses permettent d'appliquer la formule des probabilités totales :

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P_{A_k}(B)P(A_k)$$

Le sac contient n jetons, que l'on suppose identiques au toucher donc indiscernables. De plus pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$ le sac contient 1 seul jeton numéroté k, donc par équiprobabilité :

$$\forall k = 1, \dots, n \qquad P(A_k) = \frac{1}{n}$$

Si l'événement A_k a lieu alors on pioche une boule dans l'urne $\mathscr{U}_k$, laquelle contient k boules blanches sur un total de n boules aussi supposées indiscernables, donc par équiprobabilité :

$$\forall k = 1, \dots, n \qquad P_{A_k}(B) = \frac{k}{n}$$

On en déduit :

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} = \frac{n+1}{2n}$$

Par exemple pour $n = 1$ on obtient $P(B) = 1$. En effet, le sac contient juste un jeton numéroté 1 et on a une unique urne, qui contient une boule blanche. Il est donc certain que l'on piochera cette boule.

On peut aussi remarquer que $P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$, ce qui montre que lorsque n tend vers $+\infty$ la probabilité de piocher une boule blanche tend vers $\frac{1}{2}$.

b. On souhaite calculer la probabilité de l'événement A_k sachant que l'événement B a lieu. Il s'agit de la probabilité $P_B(A_k)$. D'après la formule d'inversion cause-effet :

$$P_B(A_k) = \frac{P_{A_k}(B)P(A_k)}{P(B)}$$

Toutes ces probabilités sont connues, on obtient :

$$\forall k = 1, \dots, n \qquad P_B(A_k) = \frac{2k}{n(n+1)}$$

On remarque que la somme des ces probabilités est égale à 1, ce qui était prévisible car la famille $(A_1, \dots, A_n)$ est un système complet d'événements et P_B est une probabilité, donc :

$$\sum_{k=1}^{n} P_B(A_k) = 1$$

(11) Démontrer que A et B sont indépendants si et seulement si A et $\overline{B}$ sont indépendants, si et seulement si $\overline{A}$ et B sont indépendants, si et seulement si $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Supposons que A et B sont indépendants. Alors par définition $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ et :

$$P(\overline{A})P(B) = (1 - P(A))P(B) = P(B) - P(A)P(B) = P(B) - P(A \cap B)$$

Par propriété $P(B) - P(A \cap B) = P(B \setminus A)$. Or $B \setminus A = B \cap \overline{A}$, et donc on a prouvé que :

$$P(\overline{A})P(B) = P(\overline{A} \cap B)$$

Les événements $\overline{A}$ et B sont indépendants.
On a démontré l'implication suivante, valable pour tous événements A et B :

$$A,\ B \text{ indépendants} \quad \Longrightarrow \quad \overline{A},\ B \text{ indépendants.}$$

En remplaçant A par $\overline{A}$ on obtient :

$$\overline{A},\ B \text{ indépendants} \quad \Longrightarrow \quad A,\ B \text{ indépendants.}$$

Ceci donne :

$$A,\ B \text{ indépendants} \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{A},\ B \text{ indépendants.}$$

En intervertissant A et B :

$$A,\ B \text{ indépendants} \quad \Longleftrightarrow \quad A,\ \overline{B} \text{ indépendants.}$$

En remplaçant A par $\overline{A}$:

$$\overline{A},\ B \text{ indépendants} \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{A},\ \overline{B} \text{ indépendants.}$$

Toutes les équivalences sont finalement démontrées.

(12) Un jeu de 52 cartes possède 13 cœurs et 4 dames dont la dame de cœur.

On pioche une carte dans ce jeu. On note A et B les événements «on obtient un cœur» et «on obtient une dame». Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Et si on enlève le roi de trèfle du jeu ?

L'événement A contient 13 éléments, l'événement B contient 4 éléments.
L'événement $A \cap B$ ne contient qu'un seul élément : la dame de cœur.
Par équiprobabilité on en déduit :

$$P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} \qquad P(B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13} \qquad P(A \cap B) = \frac{1}{52}$$

On remarque que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, car $4 \times 13 = 52$. Les événements A et B sont donc indépendants.
Supposons maintenant qu'on a enlevé le roi de trèfle. Alors le jeu contient 51 cartes dont 13 cœurs, 4 dames, et une seule dame de cœur. Les probabilités deviennent :

$$P(A) = \frac{13}{51} \qquad P(B) = \frac{4}{51} \qquad P(A \cap B) = \frac{1}{51}$$

On remarque que :

$$P(A)P(B) = \frac{52}{51^2} \quad \text{et} \quad P(A \cap B) = \frac{51}{51^2}$$

Les événements A et B ne sont pas indépendants car $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$.

13 On réalise l'expérience consistant à jeter deux dés, un rouge et un bleu, et on définit les événements :

- A : «Le dé rouge donne 6»
- B : «Le dé bleu donne 6»
- C : «La somme des deux dés est égale à 7».

Vérifier que A, B, C sont deux-à-deux indépendants, mais ne sont pas mutuellement indépendants.

L'univers Ω contient 36 éléments équiprobables : les couples (a, b) où a et b sont deux entiers entre 1 et 6.

L'événement A contient les couples $(6, b)$ pour b allant de 1 à 6, l'événement B contient les couples $(a, 6)$ pour a allant de 1 à 6, et l'événement C contient les couples $(a, 7 - a)$ pour a allant de 1 à 6, c'est-à-dire les couples :

$$(1, 6) \quad (2, 5) \quad (3, 4) \quad (4, 3) \quad (5, 2) \quad (6, 1)$$

Ces trois événements sont de cardinal 6, alors que l'univers est de cardinal 36, donc par équiprobabilité leurs probabilités sont $\frac{6}{36}$ soit :

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{6}$$

L'événement $A \cap B$ ne contient que le couple $(6, 6)$, l'événement $A \cap C$ ne contient que le couple $(6, 1)$, l'événement $B \cap C$ ne contient que le couple $(1, 6)$. Par équiprobabilité :

$$P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = \frac{1}{36}$$

Ceci donne :

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \qquad P(A \cap C) = P(A)P(C) \qquad P(B \cap C) = P(B)P(C)$$

Les événements A, B, C sont donc deux à deux indépendants. Par contre l'événement $A \cap B \cap C$ est impossible : si A et B ont lieu alors les deux dés donnent 6 et donc la somme ne peux être égale à 6. Ainsi :

$$P(A \cap B \cap C) = 0 \qquad \text{et} \qquad P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{6^3}$$

Les événement A, B, C ne sont pas mutuellement indépendants.

(14) On jette trois dés. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de six obtenus.

a. Déterminer la loi de X.

b. Vérifier que l'on obtient bien une loi de probabilité de X.

a. Comme on jette trois dés, le nombre de six obtenus est un entier compris entre 0 et 3, donc $X(\Omega) = [\![0,3]\!]$.

On choisit pour univers l'ensemble des listes de 3 entiers parmi $[\![1,6]\!]$:

$$\Omega = [\![1,6]\!]^3 = \{(a_1,\dots,a_3) \mid \forall i = 1,\dots,3 \quad a_i \in [\![1,6]\!]\}$$

Cet univers contient 6^3 éléments, lesquels sont équiprobables car on suppose que les dés ne sont pas truqués.

Soit $k \in [\![0,3]\!]$. On calcule le nombre de tirages pour lesquels $X = k$, donc le nombre de tirages contenant exactement k six.

Il existe $\binom{3}{k}$ façons de choisir les places pour les k six, puis 5^{3-k} façons de choisir les nombres aux $3-k$ places restantes. On en déduit $\text{Card}(X = k) = \binom{3}{k}5^{3-k}$ puis par équiprobabilité :

$$P(X = k) = \frac{\binom{3}{k}5^{3-k}}{6^3}$$

b. La première condition est évidente :

$$\forall k = 0,\dots,3 \qquad P(X = k) = \frac{\binom{3}{k}5^{3-k}}{6^3} \geqslant 0.$$

Pour vérifier que la somme des $P(X = k)$ est bien égale à 1 on applique la formule du binôme :

$$\sum_{k=0}^{3} P(X = k) = \frac{1}{6^3}\sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}1^k 5^{3-k} = \frac{(1+5)^3}{6^3} = 1.$$

On a bien obtenu une loi de probabilité pour X.

Ceci implique que :

$$\forall k = 0,\dots,3 \qquad 0 \leqslant P(X = k) \leqslant 1.$$

Le fait que chaque probabilité soit inférieure à 1 n'est *a priori* pas immédiat.

15 On jette deux dés et on note X la variable aléatoire égale au plus grand numéro obtenu.

a. Déterminer $X(\Omega)$ puis $P(X \leqslant k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$.

b. En déduire la loi de X.

c. Calculer l'espérance de X.

a. Le plus grand numéro obtenu avec deux dés est un entier compris entre 1 et 6 donc :

$$X(\Omega) = [\![1, 6]\!]$$

L'événement $(X \leqslant k)$ signifie que le plus grand numéro est inférieur ou égal à k, donc que les deux numéros sont inférieurs ou égaux à k.

Cet événement a lieu si et seulement si on a obtenu deux fois un numéro entre 1 et k, ce qui se produit avec la probabilité $\frac{k}{6}$. Or les deux tirages sont indépendants donc :

$$P(X \leqslant k) = \left(\frac{k}{6}\right)^2 = \frac{k^2}{36}$$

On aurait aussi pu expliciter les ensembles :

$$\Omega = [\![1, 6]\!]^2 \qquad \text{et} \qquad (X \leqslant k) = [\![1, k]\!]^2$$

Donc par équiprobabilité sur Ω :

$$P(X \leqslant k) = \frac{\mathrm{Card}(X \leqslant k)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{k^2}{36}$$

Si $k = 1$ on obtient $P(X \leqslant 1) = \frac{1}{36}$, c'est la probabilité d'obtenir le couple $(1, 1)$. Si $k = 6$ on obtient $P(X \leqslant 6) = 1$, car il est certain que le plus grand numéro est inférieur ou égal à 6.

On remarque également que cette formule est valable pour $k = 0$: en effet l'événement $(X = 0)$ est impossible, donc sa probabilité est nulle. Ceci sera utilisé dans la question suivante.

b. L'événement $(X = k)$ a lieu si $(X \leqslant k)$ a lieu mais $(X \leqslant k - 1)$ n'a pas lieu, donc :

$$P(X = k) = P(X \leqslant k) - P(X \leqslant k - 1)$$

Pour être plus précis on pourrait noter que $(X = k) = (X \leqslant k) \setminus (X \leqslant k - 1)$, donc

$$P(X = k) = P(X \leqslant k) - P((X \leqslant k) \cap (X \leqslant k - 1))$$

L'implication $(X \leqslant k - 1) \implies (X \leqslant k)$ montre que $(X \leqslant k) \cap (X \leqslant k - 1) = (X \leqslant k - 1)$ et donc on aboutit bien à :

$$P(X = k) = P(X \leqslant k) - P(X \leqslant k - 1)$$

Cette formule est valable pour k allant de 1 à 6, car la formule pour $P(X \leqslant k)$ est valable pour k allant de 0 à 6.

Grâce à la question précédente :

$$P(X = k) = \frac{k^2}{36} - \frac{(k-1)^2}{36} = \frac{2k - 1}{36}$$

Ceci donne la loi de k. On peut vérifier que :

- $P(X=1)=\frac{1}{36}$ car l'événement $(X=1)$ ne contient que le couple $(1,1)$.
- $P(X=2)=\frac{3}{36}$ car l'événement $(X=2)$ contient les couples :

$$(1,2) \qquad (2,2) \qquad (2,1)$$

- $P(X=3)=\frac{5}{36}$ car l'événement $(X=3)$ contient les couples :

$$(1,3) \qquad (2,3) \qquad (3,3) \qquad (3,2) \qquad (3,1)$$

- etc jusqu'à $P(X=6)=\frac{11}{36}$ car l'événement $(X=6)$ contient les couples :

$$(1,6) \quad \ldots \quad (6,6) \quad \ldots \quad (6,1)$$

Le tableau suivant montre en case (i,j) la maximum entre i et j :

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

On voit par exemple que 7 couples réalisent l'événement $X=4$.

c. Par définition de l'espérance :

$$E(X)=\sum_{k=1}^{6} kP(X=k).$$

On calcule :

$$\begin{aligned}E(X)&=\sum_{k=1}^{6}\frac{k(2k-1)}{36}=\frac{1}{36}\left(2\sum_{k=1}^{6}k^2-\sum_{k=1}^{6}k\right)\\&=\frac{1}{36}\left(\frac{2\times 6\times 7\times 13}{6}-\frac{6\times 7}{2}\right)=\frac{6\times 7}{36}\times\frac{26-3}{6}=\frac{7\times 23}{36}=\frac{161}{36}\end{aligned}$$

On remarque que $E(X)=4+\frac{17}{36}\simeq 4{,}47222...$

Si on jette un seul dé la valeur moyenne obtenue est 3,5. Si on jette deux dés et garde la maximum alors la valeur moyenne obtenue est supérieure à 3,5 et inférieur au maximum 6, donc la valeur 4,4722 est cohérente.

16 Soit X une variable aléatoire finie à valeurs dans $\mathbb{N}$, et soit $n = \max X(\Omega)$. Démontrer que :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} P(X \geqslant k)$$

Comme $X(\Omega) \subseteq [\![0, n]\!]$ alors par définition de l'espérance :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} kP(X = k)$$

Si un entier k n'est pas dans $X(\Omega)$ alors la probabilité de l'événement $(X = k)$ est nulle, donc $kP(X = k) = 0$, et donc on peut tout de même l'ajouter à la somme ci-dessus sans changer la valeur de l'espérance.

On remarque que :

$$\forall k \in [\![0, n]\!] \qquad P(X \geqslant k) = \sum_{i=k}^{n} P(X = i)$$

Ceci est valable car X est une variable aléatoire entière de maximum n.
En on déduit :

$$\sum_{k=1}^{n} P(x \geqslant k) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=k}^{n} P(X = i)$$

Il s'agit d'une somme triangulaire :

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=k}^{n} P(X = i) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant i \leqslant n} P(X = i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i} P(X = i)$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^{n} P(X \geqslant k) = \sum_{i=1}^{n} iP(X = i)$$

Comme i est une variable muette ceci donne bien :

$$\sum_{k=1}^{n} P(X \geqslant k) = \sum_{k=0}^{n} kP(X = k) = E(X).$$

17 Démontrer la formule donnant $V(aX + b)$ en fonction de $V(X)$, a et b.

Par définition de la variance :

$$V(aX + b) = E\Big((aX + b - E(aX + b))^2\Big)$$

La linéarité de l'espérance donne $E(aX + b) = aE(X) + b$ donc :

$$\begin{aligned} V(aX + b) &= E\Big((aX + b - aE(X) - b)^2\Big) \\ &= E\big(a^2(X - E(X))^2\big) \end{aligned}$$

Par linéarité de l'espérance :

$$V(aX+b) = a^2 E\big((X - E(X))^2\big)$$

On retrouve la définition de la variance :

$$V(aX+b) = a^2 V(X)$$

La propriété est démontrée.

18 Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega)$ est un singleton : $X(\Omega) = \{b\}$ avec $b \in \mathbb{R}$.
Déterminer la loi de X, son espérance, sa variance et son écart-type.

Comme $X(\Omega) = \{b\}$ alors la loi de X est :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad P(X = x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = b \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par définition de l'espérance :

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x) = bP(X = b) = b.$$

Effectivement, comme X ne prends que la valeur b alors elle est égale à b en moyenne.
De même, X^2 est la variable aléatoire certaine égale à b^2, donc $E(X^2) = b^2$, puis grâce à la formule de Koenig-Huyghens :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 0.$$

Ceci s'explique car X ne varie pas, donc sa variance est nulle.
On en déduit $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 0$.

19 On pioche une boule dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, et on note X le numéro obtenu.
Déterminer la loi de X. Calculer son espérance, sa variance et son écart-type.

La variable aléatoire X prend ses valeurs dans l'intervalle entier $[\![1, n]\!]$. Les boules sont supposées identiques et indescernables donc ses valeurs sont équiprobables, et :

$$X(\Omega) = [\![1, n]\!] \qquad \text{et} \qquad \forall k \in X(\Omega) \qquad P(X = k) = \frac{1}{n}.$$

L'espérance de X est :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} kP(X = k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

Pour la variance on commence par calculer l'espérance de X^2 :

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{n} k^2 P(X = k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{n}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

Ensuite, d'après la formule de König-Huyghens :

$$\begin{aligned} V(X) = E(X^2) - E(X)^2 &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} \\ &= \frac{n+1}{12}(2(2n+1) - 3(n+1)) = \frac{(n+1)(n-1)}{12} = \frac{n^2-1}{12} \end{aligned}$$

On constate que cette variance est nulle si et seulement si $n = 1$. Effectivement si $n = 1$ alors X suit la loi constante égale à 1, on retrouve les valeurs obtenues dans l'exercice précédent.