

Corrigé du Devoir à la Maison n°12

Partie A. Exemples

1. On calcule, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$f^2(x, y, z) = (0, 0, x) \quad \text{et} \quad f^3(x, y, z) = (0, 0, 0).$$

Ceci montre que $f^3 = 0_{\mathcal{L}(E)}$, et $f^2(e_1) = e_3 \neq 0_E$, donc $f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Ainsi f est nilpotent d'indice 2.

Ensuite on calcule, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$g^2(x, y, z) = (0, 0, 0).$$

Ceci montre que $g^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$. De plus $g(e_1) = (1, 1, 1) \neq 0_E$, donc g^1 est non-nul et ainsi g est nilpotent d'indice 2.

2. (a) Pour tout entier k et tout polynôme P : $D_n^k(P) = P^{(k)}$.

Ainsi $\deg(D_n^k(P)) \leq \deg P - k$.

En particulier si $k = n+1$ et $\deg P \leq n$ alors $\deg D_n^{n+1}(P) \leq -1$ donc $D_n^{n+1}(P) = 0$.

Ceci montre que D_n^{n+1} est l'endomorphisme nul de $\mathbb{K}_n[X]$.

Par contre si $P = X^n$ alors $D_n^n(P) = P^{(n)} = n! \neq 0$, donc D_n^n est non-nul.

Ainsi D_n est nilpotent d'indice $n+1$.

(b) Soit k un entier naturel, et $P = X^k$. Alors $D^k(P) = k! \neq 0$, donc D^k n'est pas l'endomorphisme nul de $\mathbb{K}[X]$.

Ceci étant valable pour tout $k \in \mathbb{N}$, D n'est pas nilpotent.

3. (a) On justifie que f est une application de E dans E , puis qu'elle est linéaire.

Soit $u \in E$. Comme φ est une forme linéaire alors $\varphi(u) \in \mathbb{K}$.

Comme $u \in E$ alors $\varphi(u)u_0 \in E$.

Ainsi f est une application de E dans E .

Soit $(u, v) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Comme φ est linéaire alors $\varphi(\lambda u + v) = \lambda\varphi(u) + \varphi(v)$.

Ceci donne :

$$f(\lambda u + v) = \varphi(\lambda u + v)u_0 = (\lambda\varphi(u) + \varphi(v))u_0.$$

Par propriété de la multiplication externe dans un espace vectoriel :

$$f(\lambda u + v) = \lambda\varphi(u)u_0 + \varphi(v)u_0 = \lambda f(u) + f(v).$$

Par caractérisation des applications linéaires f est linéaire, et donc c'est un endomorphisme de E .

(b) Pour tout $u \in E$: $f^2(u) = f(\varphi(u)u_0)$.

Comme $\varphi(u) \in \mathbb{K}$ alors par linéarité de f : $f^2(u) = \varphi(u)f(u_0)$.

Ceci donne $f^2(u) = \varphi(u)\varphi(u_0)u_0$.

- Si $\varphi(u_0) = 0$ alors $f^2(u) = 0_E$, et ceci est valable pour tout $u \in E$, donc f^2 est nul, et ainsi f est nilpotent.
- Supposons maintenant que f est nilpotent. Alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que f^k est nul.

Le calcul pour $f^2(u)$ ci-dessus avec $u = u_0$ donne $f^2(u_0) = \varphi(u_0)^2u_0$.

On démontre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $f^n(u_0) = \varphi(u_0)^n u_0$.

Comme u_0 est non-nul, si $f^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$ alors $\varphi(u_0)^k = 0$, donc $\varphi(u_0) = 0$.

Ceci démontre que si f est nilpotent alors $\varphi(u_0) = 0$.

On a donc démontré que f est nilpotent si et seulement si $\varphi(u_0) = 0$.

Dans ce cas : $\forall u \in E \quad f^2(u) = 0_E$.

Comme φ est non-nulle alors il existe $v_0 \in E$ tel que $\varphi(v_0) \neq 0$.

Alors $f(v_0) = \varphi(v_0)u_0$, avec $\varphi(v_0) \neq 0_{\mathbb{K}}$ et $u_0 \neq 0_E$, donc $f(v_0) \neq 0_E$.

Ceci montre que f n'est pas nul.

Finalement f n'est pas nul et f^2 est nul, donc f est nilpotent d'indice 2.

On a donc démontré que f est nilpotent si et seulement si $\varphi(u_0) = 0$, et que dans ce cas il est d'indice de nilpotence 2.

Partie B. Cas de la dimension finie

1. Soit f un endomorphisme de E et k un entier naturel.

Si $u \in \ker f^k$ alors $f^k(u) = 0_E$, donc $f(f^k(u)) = 0_E$ car f est linéaire, d'où $f^{k+1}(u) = 0_E$ puis $u \in \ker f^{k+1}$.

Ainsi $\ker f^k \subseteq \ker f^{k+1}$.

Soit $v \in \operatorname{im} f^{k+1}$. Alors il existe $u \in E$ tel que $v = f^{k+1}(u)$. Donc $v = f^k(f(u))$, ce qui montre que $v \in \operatorname{im} f^k$.

Ainsi $\operatorname{im} f^{k+1} \subseteq \operatorname{im} f^k$.

2. Supposons que $\ker f^k = \ker f^{k+1}$.

D'après la question précédente : $\ker f^j \subseteq \ker f^{j+1}$.

Démontrons l'inclusion réciproque.

Soit $u \in \ker f^{j+1}$. Alors $f^{j+1}(u) = 0_E$.

Ceci donne $f^{k+1}(f^{j-k}(u)) = 0_E$, où f^{j-k} est bien défini car $j - k \geq 0$, puisque $k \leq j$.

Ainsi $f^{j-k}(u) \in \ker f^{k+1}$. Or $\ker f^{k+1} = \ker f^k$, donc $f^{j-k}(u) \in \ker f^k$, puis $f^k(f^{j-k}(u)) = 0_E$, et $f^j(u) = 0_E$, donc $u \in \ker f^j$.

On a démontré que $\ker f^{j+1} \subseteq \ker f^j$. Par double inclusion : $\ker f^j = \ker f^{j+1}$.

3. Soit N l'ensemble des entiers naturels k tels que $f^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Comme f est nilpotent alors il existe un tel entier naturel, donc N est non-vide.

Ainsi N est une partie de \mathbb{N} non-vide, donc par propriété de \mathbb{N} elle admet un minimum, que l'on note p .

4. D'après la question 1 :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \ker f^k \subseteq \ker f^{k+1}$$

Ceci donne :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \dim(\ker f^k) \leq \dim(\ker f^{k+1})$$

La suite $(\dim(\ker f^k))_{k \in \mathbb{N}}$ est donc croissante.

Supposons qu'il existe $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ tel que $\dim(\ker f^k) = \dim(\ker f^{k+1})$.

Sachant que $\ker f^k \subseteq \ker f^{k+1}$, ceci implique $\ker f^k = \ker f^{k+1}$. Alors d'après la question précédente :

$$\forall j \geq k : \quad \ker f^j = \ker f^{j+1}$$

Comme $p-1 \geq k$ alors :

$$\ker f^{p-1} = \ker f^p$$

Comme f^p est nul alors $\ker f^p = E$, donc $\ker f^{p-1} = E$, ce qui donne $f^{p-1} = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Ceci contredit la minimalité de p .

Ainsi pour tout $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ on a $\dim(\ker f^k) < \dim(\ker f^{k+1})$, donc la suite $(\dim(\ker f^k))_{0 \leq k \leq p}$ est strictement croissante.

5. On démontre par récurrence finie : $\forall k \in \llbracket 0, p \rrbracket \quad \dim(\ker f^k) \geq k$.

Initialisation. Comme $f^0 = \text{id}$ alors $\ker f^0 = \{0_E\}$, donc $\dim(\ker f^0) = 0 \geq 0$.

La propriété est vraie pour $k = 0$.

Hérédité. Supposons que pour un certain $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ on a $\dim(\ker f^k) \geq k$.

Comme $k < p$ alors d'après la question précédente : $\dim(\ker f^k) < \dim(\ker f^{k+1})$

Ainsi $\dim(\ker f^{k+1}) > k$ par transitivité, et comme toute dimension est un entier alors $\dim(\ker f^{k+1}) \geq k+1$.

L'hérédité est démontrée.

Conclusion. Par récurrence finie : $\forall k \in \llbracket 0, p \rrbracket \quad \dim(\ker f^k) \geq k$.

En particulier pour $k = p$ on obtient : $\dim(\ker f^p) \geq p$.

Comme $f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ alors $\ker f^p = E$, donc $n \geq p$.

6. Comme E est de dimension finie alors d'après le théorème du rang :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \dim(\text{im } f^k) = n - \dim(\ker f^k). \quad (1)$$

On a démontré dans la question précédente que :

$$\forall k \in \llbracket 0, p \rrbracket \quad \dim(\ker f^k) \geq k.$$

En particulier pour $k = 1$ ceci donne $\dim(\ker f) \geq 1$, et donc $\dim(\text{im } f) \leq n - 1$.

Ceci donne $\text{rg } f \leq n - 1$, il reste à démontrer que $\text{rg } f \geq p - 1$.

Comme $f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ alors $\ker f^p = E$ et $\dim(\ker f^p) = n$.

De la même façon que dans la question précédente on démontre par récurrence finie que pour tout $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$: $\dim(\ker f^{p-k}) \leq n - k$.

En particulier pour $k = p - 1$ ceci donne : $\dim(\ker f) \leq n - p + 1$.

D'après (1) ceci donne : $\dim \text{im } f \geq p - 1$.

On a donc démontré : $p - 1 \leq \text{rg } f \leq n - 1$.

Partie C. Cas maximal

1. Comme n est l'indice de nilpotence de f alors f^n est nul mais f^{n-1} n'est pas nul.

Il existe donc $e \in E$ tel que $f^{n-1}(e) \neq 0_E$.

2. Soit $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$ une famille de scalaires tels que :

$$\lambda_0 e + \lambda_1 f(e) + \dots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(e) = 0_E$$

Supposons qu'il existe au moins un entier k tel que $\lambda_k \neq 0$, et nommons m le plus petit d'entre eux. Comme ces entiers sont en nombre fini ils admettent bien un minimum. Ainsi $\lambda_0 = \dots = \lambda_{m-1} = 0$ donc :

$$\lambda_m f^m(e) + \lambda_{m+1} f^{m+1}(e) + \dots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(e) = 0_E$$

Comme $m \leq n-1$ alors $n-m-1 \geq 0$, donc f^{n-m-1} est bien définie. Elle est linéaire donc en l'appliquant on obtient :

$$\lambda_m f^{n-1}(e) + \lambda_{m+1} f^n(e) + \dots + \lambda_{n-1} f^{2n-m-2}(e) = 0_E$$

Comme $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ ceci donne :

$$\lambda_m f^{n-1}(e) = 0_E.$$

Comme $f^{n-1}(e)$ est non-nul alors $\lambda_m = 0$, ce qui contredit la définition de m .

Cette contradiction montre que pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ on a $\lambda_k = 0$.

La famille $(e, f(e), f^2(e), \dots, f^{n-1}(e))$ est donc libre.

C'est une famille libre maximale car elle contient n vecteurs et E est de dimension n , donc c'est une base de E .

3. (a) Comme e est un vecteur de E et g est un endomorphisme de E alors $g(e) \in E$.

Comme la famille $(e, f(e), f^2(e), \dots, f^{n-1}(e))$ est une base de E alors il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$g(e) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(e).$$

(b) Soit $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Alors f^i est linéaire donc :

$$f^i(g(e)) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^{k+i}(e).$$

Comme f commute avec g alors par récurrence immédiate f^i commute avec g .

On obtient donc :

$$\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \quad g(f^i(e)) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^{k+i}(e). \quad (2)$$

D'autre part, pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$:

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k \right) (f^i(e)) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(f^i(e))$$

Ceci donne :

$$\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \quad \left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k \right) (f^i(e)) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^{k+i}(e) \quad (3)$$

D'après (2) et (3) :

$$\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \quad g(f^i(e)) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k \right) (f^i(e))$$

Les applications g et $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k$ sont égales sur la base $(e, f(e), \dots, f^{n-1}(e))$.

Une application linéaire est uniquement déterminée par l'image d'une base donc :

$$g = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k.$$

4. D'après la question précédente, si g est un endomorphisme de E commutant avec f alors il existe des scalaires $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$ tels que $g = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k$.

Réciproquement, si $g = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k$ où $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$ sont des scalaires alors par linéarité de la somme :

$$g \circ f = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k (f^k \circ f) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k (f \circ f^k) = f \circ g.$$

Ainsi g commute avec f .

On a donc démontré qu'un endomorphisme g de E commute avec f si et seulement s'il existe des scalaires $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$ tels que $g = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k$.