Corrigé du T. D. A11
Intégration

1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note : $\quad I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{t^n}{n!} \cos t \, \mathrm{d}t$.

Démontrer que : $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad |I_n| \leqslant \dfrac{\pi^{n+1}}{(n+1)!}$.

En déduire la limite de la suite (I_n).

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. D'après l'inégalité triangulaire :

$$|I_n| = \left| \int_0^{\pi} \frac{t^n}{n!} \cos t \, \mathrm{d}t \right| \leqslant \int_0^{\pi} \left| \frac{t^n}{n!} \cos t \right| \mathrm{d}t \tag{1}$$

On encadre la fonction $t \mapsto \left| \frac{t^n}{n!} \cos t \right|$ sur le segment $[0, \pi]$:

$$\forall t \in [0, \pi] \qquad 0 \leqslant \left| \frac{t^n}{n!} \cos t \right| \leqslant \left| \frac{t^n}{n!} \right| = \frac{t^n}{n!}$$

Par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^{\pi} \left| \frac{t^n}{n!} \cos t \right| \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\pi} \frac{t^n}{n!} \, \mathrm{d}t \tag{2}$$

Par transitivité de la relation d'ordre, les inégalités (1) et (2) donnent :

$$|I_n| \leqslant \int_0^{\pi} \frac{t^n}{n!} \, \mathrm{d}t$$

On calcule cette dernière intégrale :

$$\int_0^{\pi} \frac{t^n}{n!} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{n!} \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^{n+1}}{(n+1)!}$$

On a donc démontré :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant |I_n| \leqslant \frac{\pi^{n+1}}{(n+1)!}$$

D'après le théorème des croissances comparés, pour tout $a \in \mathbb{R}$ la suite (a^n) est négligeable devant la suite $(n!)$. Par décalage on en déduit : $\quad \pi^{n+1} = o((n+1)!)$

Ainsi $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{\pi^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ et donc par théorème d'encadrement la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

2 Soit a un réel strictement positif et f un fonction continue par morceaux sur $[-a, a]$.
Démontrer que :
a. Si f est impaire alors : $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
b. Si f est paire alors : $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$.
On pourra utiliser le changement de variable $u = -t$.

a. Soit $u = -t$. Alors $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}t$ donc par changement de variable :

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{a}^{-a} f(-u)\,(-\mathrm{d}u) = \int_{-a}^{a} f(-u)\,\mathrm{d}u$$

Comme f est impaire alors par linéarité :

$$\int_{-a}^{a} f(-u)\,\mathrm{d}u = \int_{-a}^{a} -f(u)\,\mathrm{d}u = -\int_{-a}^{a} f(u)\,\mathrm{d}u$$

Comme u est une variable muette :

$$\int_{-a}^{a} f(u)\,\mathrm{d}u = -\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Les trois égalité ci-dessus donnent $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Ceci montre que : $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$

b. Soit $u = -t$. Par changement de variable, puis en utilisant la parité de f :

$$\int_{0}^{a} f(t)\,dt = \int_{0}^{-a} f(-u)\,(-\mathrm{d}u) = \int_{-a}^{0} f(u)\,\mathrm{d}u = \int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t$$

D'après la relation de Chasles :

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$$

3 Soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et T-périodique ($T > 0$).
Démontrer que :

$$\forall a \in \mathbb{R} \qquad \int_{a}^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{T} f(t)\,\mathrm{d}t \qquad .$$

Soit a un réel quelconque. On utilise la relation de Chasles puis le changement de variable $u = t - T$ dans la seconde intégrale :

$$\int_{a}^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{a}^{T} f(t)\mathrm{d}t + \int_{T}^{a+T} f(t) = \int_{a}^{T} f(t)\mathrm{d}t + \int_{0}^{a} f(u+T)\,\mathrm{d}u$$

Comme f est T-périodique :

$$\int_{a}^{T} f(t)\mathrm{d}t + \int_{0}^{a} f(u+T)\,\mathrm{d}u = \int_{a}^{T} f(t)\mathrm{d}t + \int_{0}^{a} f(u)\,\mathrm{d}u = \int_{a}^{T} f(t)\mathrm{d}t + \int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$$

D'après la relation de Chasles :

$$\int_a^T f(t)\mathrm{d}t + \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$$

Finalement :

$$\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$$

4 En utilisant les sommes de Riemann, calculer :

$$I_1 = \int_1^3 t^2\,\mathrm{d}t \qquad\qquad I_2 = \int_0^1 e^t\,\mathrm{d}t.$$

- Soit $I_1 = \displaystyle\int_1^3 t^2\,\mathrm{d}t$.

  On pose $[a,b]=[1,3]$ puis $f(t)=t^2$ pour tout $t\in[a,b]$.
  Soit $n\in\mathbb{N}^*$ fixé. Pour $k=0,\dots,n$ on note $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$, ce qui donne $x_k = 1+k\frac{2}{n}$.
  Les sommes de Riemann associées à f sur l'intervalle $[a,b]$ sont les réels :

  $$\forall n\in\mathbb{N}^* \qquad R_n(f) = \tfrac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$$

  Soit $n\in\mathbb{N}^*$ fixé. On calcule grâce à la linéarité de la somme :

  $$R_n(f) = \tfrac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\left(1+k\tfrac{2}{n}\right)^2\right) = \tfrac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1+k\tfrac{4}{n}+k^2\tfrac{4}{n^2}\right) = \tfrac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}1 + \tfrac{8}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}k + \tfrac{8}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}k^2$$

  On connaît les formules :

  $$\forall n\in\mathbb{N} \qquad \sum_{k=1}^{n}k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

  Elles montrent que :

  $$\begin{aligned} R_n(f) &= \frac{2}{n}\times n + \frac{8}{n^2}\frac{n(n-1)}{2} + \frac{8}{n^3}\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \\ &= 2 + 4\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

  On en déduit : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} R_n(f) = 2+4+\tfrac{8}{3} = \tfrac{26}{3}$
  Or la fonction f est continue sur l'intervalle $[1,3]$, donc selon le théorème de Riemann la suite $(R_n(f))$ converge vers $\displaystyle\int_1^3 f(t)\,\mathrm{d}t$. Ceci donne :

  $$\boxed{I_1 = \frac{26}{3}}$$

  On peut vérifier ce résultat grâce au théorème fondamental, puisqu'on connaît une primitive de f :

  $$I_1 = \int_1^3 t^2\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3}\right]_1^3 = \frac{3^3-1}{3} = \frac{26}{3}$$

- Soit $I_2 = \int_0^1 e^t \,\mathrm{d}t$.

  On pose $[a,b]=[0,1]$ et pour tout $t \in [a,b]$: $\quad f(t)=e^t$

  Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Alors :

$$x_k = a + k\frac{b-a}{n} = \frac{k}{n} \qquad \text{puis} \qquad R_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^k$$

  Il s'agit de la somme d'une suite géométrique de raison $e^{\frac{1}{n}}$, donc :

$$R_n(f) = \frac{1}{n} \times \frac{1-\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n}{1-e^{\frac{1}{n}}} = \frac{e-1}{n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)}$$

  L'équivalence usuelle $(e^u-1) \underset{(0)}{\sim} u$ montre que $\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right) \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{1}{n}$, donc :

$$R_n(f) \underset{(+\infty)}{\sim} e-1$$

  On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(f) = e-1$. Or la fonction f est continue donc d'après le théorème de Riemann la suite $(R_n(f))$ converge vers $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, c'est-à-dire vers I_2.

  En conclusion :

$$\boxed{I_2 = e-1}$$

  On vérifie ce résultat en utilisant le théorème fondamental :

$$I_2 = \int_0^1 e^t\,\mathrm{d}t = \Big[e^t\Big]_0^1 = e-1$$

---

5 Calculer : $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}$.

On remarque que :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k^2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{n\left(1+\frac{k}{n}\right)}{n^2\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1+\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

On pose :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad f(t) = \frac{1+t}{1+t^2}$$

On pose également $a=0$ et $b=1$.

Soit $n \in \mathbb{N}*$. Pour tout $\quad k=0,\dots,n \quad$ on a alors $\quad x_k = a+k\frac{b-a}{n} = \frac{1}{n} \quad$ donc :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_n) = S_n(f)$$

On aboutit à la somme de Riemann $S_n(f)$.

Or la fonction f est continue, donc par théorème de Riemann la suite (S_n) converge vers $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. On calcule cette intégrale :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1+t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \left[\arctan t + \frac{1}{2}\ln(1+t)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}$$

On a donc démontré :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k^2} = \frac{\pi}{4}+\frac{\ln 2}{2}}$$

6 Soit $I =]1,+\infty[$ et :

$$\forall x \in I \qquad \Phi(x) = \int_x^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{\ln t}.$$

a. Calculer $A(x) = \displaystyle\int_x^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{t\,\ln t}$.

b. Démontrer que pour tout $x \in I$:

$$xA(x) \leqslant \Phi(x) \leqslant x^2 A(x).$$

c. Justifier que Φ peut être prolongée par continuité à l'intervalle $\overline{I} = [1,+\infty[$, et que ce prolongement est de classe $\mathcal{C}^1$.

d. Calculer un développement limité de $\Phi(x)$ en $x=1$ à l'ordre 3.

a. En remarquant une fonction du type $\frac{u'}{u}$ on obtient $A(x) = \ln 2$.

b. Pour tout $t \in [x, x^2]$ on a $x \leqslant t \leqslant x^2$.
On multiple par $\frac{1}{l\ln t}$ et on applique la croissance de l'intégrale.

c. Par théorème de comparaison $\Phi(x) \xrightarrow[x\to 1]{} \ln 2$.
On pose $\Phi(1) = \ln 2$.
On sait que pour tout $x \in I$: $\Phi'(x) = \frac{x-1}{\ln x}$ (voir exemple dans le cours).
Comme $\lim\limits_{x\to 1}\Phi'(x) = 1$ alors d'après le théorème de limite de la dérivée Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\overline{I}$ et $\Phi'(1) = 1$.

d. On calcule $\Phi'(1+h) \underset{(0)}{=} 1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{12} + o(h^2)$ puis :

$$\Phi(1+h) \underset{(0)}{=} \ln 2 + h + \frac{h^2}{4} - \frac{h^3}{48} + o(h^3).$$

⑦ Calculer les dérivées des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$f_1(x) = \int_2^{2x} \ln t \,\mathrm{d}t \qquad f_2(x) = \int_1^{\sqrt{x}} e^{-t^2} \,\mathrm{d}t \qquad f_3(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} \,\mathrm{d}t \qquad f_4(x) = \int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{\sqrt{x}} \frac{t \,\mathrm{d}t}{1+t^4}.$$

- $f_1(x) = \displaystyle\int_2^{2x} \ln t \,\mathrm{d}t$

  Soit F_1 une primitive de la fonction $t \mapsto \ln t$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad f_1(x) = \Big[F_1(t)\Big]_2^{2x} = F_1(2x) - F_1(2)$$

  La fonction F_1 est dérivable car c'est une primitive, donc par composition et soustraction f_1 est dérivable et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad f_1'(x) = 2F_1'(2x) - 0 = 2\ln(2x)$$

- $f_2(x) = \displaystyle\int_1^{\sqrt{x}} e^{-t^2} \,\mathrm{d}t$

  Soit F_2 une primitive de la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ sur $\mathbb{R}$. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad f_2(x) = \Big[F_2(t)\Big]_1^{\sqrt{x}} = F_2(\sqrt{x}) - F_2(1)$$

  La fonction F_2 est dérivable car c'est une primitive, et la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc par composition et soustraction f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad f_2'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} F_2'(\sqrt{x}) - 0 = \frac{e^{-x}}{2\sqrt{x}}$$

- $f_3(x) = \displaystyle\int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} \,\mathrm{d}t$

  Soit F_3 une primitive de la fonction $t \mapsto \frac{\cos t}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad f_3(x) = \Big[F_3(t)\Big]_x^{3x} = F_3(3x) - F_3(x)$$

  La fonction F_3 est dérivable car c'est une primitive, donc par composition et soustraction f_3 est dérivable et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad f_3'(x) = 3F_3'(3x) - F_3'(x) = \frac{\cos 3x - \cos x}{x}$$

- $f_4(x) = \displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{\sqrt{x}} \frac{t \,\mathrm{d}t}{1+t^4}$

  Soit F_4 une primitive de la fonction $t \mapsto \frac{t}{1+t^4}$ sur $\mathbb{R}$. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad f_4(x) = \Big[F_4(t)\Big]_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{\sqrt{x}} = F_4\big(\sqrt{x}\big) - F_4\big(\tfrac{1}{\sqrt{x}}\big)$$

La fonction F_4 est dérivable car c'est une primitive, les fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par composition et soustraction f_4 est dérivable et :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad f_4'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} F_4'\big(\sqrt{x}\big) - \left(-\frac{1}{2x\sqrt{x}}\right) F_4'\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} + \frac{1}{2x\sqrt{x}} \times \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+\frac{1}{x^2}} \\ &= \frac{1}{1+x^2}\end{aligned}$$

On remarque que : $\quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f_4'(x) = \arctan' x$

Comme $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle on peut en déduire qu'il existe un réel $k \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad f_4(x) = \arctan x \, + k$$

Comme $f_4(1) = 0$ alors on obtient $k = -\frac{\pi}{4}$, et donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad f_4(x) = \arctan x \, - \frac{\pi}{4}$$

On pouvait obtenir ce résultat en calculant directement $f_4(x)$, soit à l'aide du changement de variable $u = t^2$, soit en reconnaissant la forme $\frac{u'}{1+u^2}$.

8 Exprimer l'inégalité Taylor-Lagrange pour la fonction exponentielle avec $a = 0$, $x = 1$, à un ordre n quelconque. En déduire :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = e.$$

Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$ et $f^{(n+1)}$ est majorée par un réel M alors l'inégalité de Taylor-Lagrange au point $a = 0$ s'écrit

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \left| f(x) - \left(f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \right) \right| \leqslant M \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

La fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc on peut lui appliquer l'inégalité de Taylor avec reste intégral à tout ordre $n \in \mathbb{N}$ en $a = 0$.

Si $f = \exp$ alors $f^{(k)} = \exp$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et donc $f^{(k)}(0) = 1$.

De plus sur l'intervalle $[0, 1]$ la fonction $f^{(n+1)} = \exp$ est majorée par e. Ceci donne :

$$\forall x \in [0, 1] \qquad \left| e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) \right| \leqslant e \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

En particulier pour $x = 1$ on obtient :

$$\left| e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) \right| \leqslant \frac{e}{(n+1)!}$$

On définit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |e - u_n| \leqslant \frac{e}{(n+1)!}$$

Par théorème d'encadrement la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers e.
Cette convergence est très rapide :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant \frac{e - u_n}{\frac{1}{n!}} \leqslant \frac{e}{n+1}$$

Ceci montre que $(e - u_n) = o\left(\frac{1}{n!}\right)$, et donc la convergence de (u_n) vers e est de vitesse factorielle.

9 Calculer de deux façons différentes : $I = \displaystyle\int_0^{\pi} e^{it}\,\mathrm{d}t$.

Nous avons démontré dans le chapitre sur la dérivation que la dérivée de la fonction $t \mapsto e^{\lambda t}$ est $t \mapsto \lambda e^{\lambda t}$, ceci même pour λ complexe.
En conséquence une primitive de $t \mapsto e^{\lambda t}$ est $t \mapsto \frac{1}{\lambda} e^{\lambda t}$. On calcule donc :

$$I = \left[\frac{1}{i} e^{it}\right]_0^{\pi} = \frac{-1-1}{i} = 2i$$

D'autre part, par définition de l'intégrale d'une fonction complexe :

$$I = \int_0^{\pi} \mathrm{Re}(e^{it})\,\mathrm{d}t + i \int_0^{\pi} \mathrm{Im}(e^{it})\,\mathrm{d}t$$

Ceci donne :

$$I = \int_0^{\pi} \cos t\,\mathrm{d}t + i \int_0^{\pi} \sin t\,\mathrm{d}t = \Big[\sin t\Big]_0^{\pi} + i\Big[-\cos t\Big]_0^{\pi} = 0 + i[-(-1) - (-1)] = 2i$$

On obtient $I = 2i$ dans les deux cas.

10 Calculer : $I = \displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{t+i}\,\mathrm{d}t.$

On écrit la forme algébrique de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t+i}$:

$$\frac{1}{t+i} = \frac{t-i}{t^2+1} = \frac{t}{t^2+1} - i\frac{1}{t^2+1}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{t+i}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t - i\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \\ &= \Big[\frac{1}{2}\ln\left|t^2+1\right|\Big]_0^{\sqrt{3}} - i\Big[\arctan t\Big]_0^{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Soit finalement :

$$I = \ln 2 - i\frac{\pi}{3}$$

1 Démontrer que les suites suivantes convergent et déterminer leurs limites.

a. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}$ b. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{5n-2k}$ c. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n^3k^2}{n^6+k^6}$

d. $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+3nk}}$ e. $u_n = \displaystyle\frac{1}{n}\left(\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{4} + \cdots + \sqrt[n]{2^n}\right)$

f. $u_n = n\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2}$ g. $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \sqrt[n]{1+\frac{k}{n}}.$

Pour tout cet exercice on pose $a = 0$ et $b = 1$. Ensuite pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit la subdivision $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ où $x_k = \frac{k}{n}$ pour tout k allant de 0 à n.

a. On constate que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

Posons pour tout $t \in [0,1]$: $f(t) = \frac{t}{1+t^2}$

Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

Il s'agit de la somme de Riemann $S_n(f)$.

La fonction f est continue sur $[0,1]$ donc par théorème de Riemann la suite $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

On calcule cette intégrale :

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \Big[\frac{1}{2}\ln\left|1+t^2\right|\Big]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}$$

Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{\ln 2}{2}$.

b. On procède de même que dans le (a). On obtient $u_n = S_n(f)$ avec $f(t) = \frac{1}{5-2t}$.
Cette fonction est continue sur $[0,1]$ donc par théorème de Riemann la suite (u_n) converge vers :

$$\int_0^1 \frac{1}{5-2t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2}\ln|5-2t|\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln\frac{5}{3}$$

c. On procède de même que dans le (a). On obtient $u_n = S_n(f)$ avec $f(t) = \frac{t^2}{1+t^6}$.
Cette fonction est continue sur $[0,1]$ donc par théorème de Riemann la suite (u_n) converge vers :

$$\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^6}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{3}\arctan t^3\right]_0^1 = \frac{\pi}{12}$$

d. On procède de même que dans le (a). On obtient $u_n = S_n(f)$ avec $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1+3t}}$.
Cette fonction est continue sur $[0,1]$ car $1+3t>0$ sur ce segment donc par théorème de Riemann la suite (u_n) converge vers :

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+3t}}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{2}{3}\sqrt{1+3t}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

e. On constate que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^{\frac{k}{n}}$

On procède de même que dans le (a). On obtient $u_n = S_n(f)$ avec $f(t) = 2^t = e^{t\ln 2}$.
Cette fonction est continue sur $[0,1]$ donc par théorème de Riemann la suite (u_n) converge vers :

$$\int_0^1 e^{t\ln 2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{t\ln 2}}{\ln 2}\right]_0^1 = \frac{1}{\ln 2}$$

f. On change l'indice en posant $j = k-n$, ce qui donne :

$$u_n = n\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k^2} = n\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{(n+j)^2} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{j}{n}\right)^2}$$

On procède de même que dans le (a). On obtient $u_n = S_n(f)$ avec $f(t) = \frac{1}{(1+t)^2}$.
Cette fonction est continue sur $[0,1]$ donc par théorème de Riemann la suite (u_n) converge vers :

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{1+t}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

g. On écrit u_n de la façon suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \prod_{k=1}^{n}\left(e^{\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)}\right) = e^{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)}$$

On note alors $v_n = \ln(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

Posons, pour tout $t \in [0,1]$: $\quad f(t) = \ln(1+t)$

Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad v_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

Il s'agit de la somme de Riemann $S_n(f)$.

La fonction f est continue sur $[0,1]$ donc par théorème de Riemann la suite $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \ln(1+t)\,\mathrm{d}t$.

On utilise le théorème d'intégration par parties.

Pour tout $t \in [0,1]$, soit $u(t) = t$ et $v(t) = \ln(1+t)$. Alors u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, de dérivées $u'(t) = 1$ et $v'(t) = \frac{1}{1+t}$.

On en déduit :

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_0^1 - \int_0^1 u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

Ceci donne :

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \Big[t\ln(1+t)\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{1+t}\,\mathrm{d}t &= \ln 2 - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t \\ &= \ln 2 - \Big[t - \ln(1+t)\Big]_0^1 = 2\ln 2 - 1\end{aligned}$$

Ainsi la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $2\ln 2 - 1$.

Comme $u_n = e^{v_n}$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $e^{2\ln 2 - 1} = \frac{4}{e}$.

2 Sans utiliser de primitive, calculer :

$$C(x) = \int_0^1 \cos t\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad S(x) = \int_0^1 \sin t\,\mathrm{d}t.$$

On calcule $\displaystyle\int_0^x e^{it}\,\mathrm{d}t$ grâce à la méthode des rectangles.

On fixe x positif pour simplifier, puis on pose $a = 0$, $b = x$.

Soit n un entier strictement positif. On pose $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$ pour tout $k = 0, \dots, n$, ce qui donne $x_k = k\frac{x}{n}$.

Enfin on pose $R_n(f) = \frac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{ix_k}$, ce qui donne $R_n(f) = \frac{x}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\frac{x}{n}}$.

La fonction $t \mapsto e^{it}$ est continue donc par théorème de Riemann la suite $(R_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\displaystyle\int_0^x e^{it}\,\mathrm{d}t$.

On utilise la formule donnant la somme des termes d'une suite géométrique :

$$R_n(f) = \frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{i\frac{x}{n}}\right)^k = \frac{x}{n}\,\frac{1-e^{ix}}{1-e^{i\frac{x}{n}}}$$

L'équivalence usuelle $\quad e^u - 1 \underset{(0)}{\sim} u \quad$ montre que : $\quad e^{i\frac{x}{n}} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} i\frac{x}{n}$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} R_n(f) = \frac{1-e^{ix}}{-i} = i(1-\cos x - i\sin x) = \sin x + i(1-\cos x)$$

Ceci montre que :

$$\int_0^x e^{it}\,\mathrm{d}t = \sin x + i(1-\cos x)$$

Or par définition de l'intégrale des fonctions complexes :

$$\int_0^x e^{it}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \cos t + i\sin t\,\mathrm{d}t = \int_0^x \cos t\,\mathrm{d}t + i\int_0^x \sin t\,\mathrm{d}t$$

On en déduit :

$$\int_0^x \cos t\,\mathrm{d}t = \sin x \qquad \text{et} \qquad \int_0^x \sin t\,\mathrm{d}t = 1-\cos x$$

Ces résultats sont bien sûr immédiats si on utilise le théorème fondamental.

3 Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ calculer :

$$F(x) = \int_0^x \lfloor t \rfloor\,\mathrm{d}t.$$

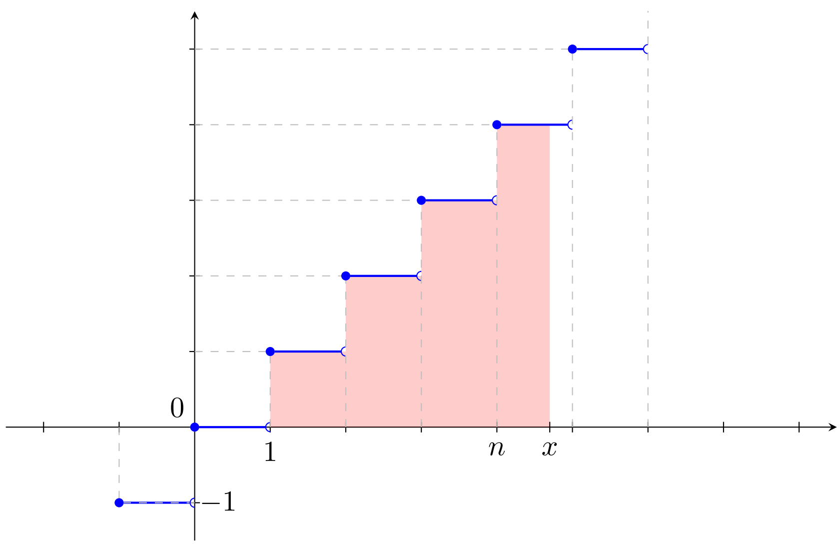
Démontrer que cette fonction est continue.

On connaît pas de primitive de la fonction partie entière. D'ailleurs, cette fonction n'étant pas continue, il n'est pas dit qu'elle en admette une.

Nous allons voir que ce n'est pas le cas : comme la fonction partie entière est en escalier sur tout segment, alors elle admet une intégrale sur tout segment.

Nous allons obtenir une fonction $F : x \to \displaystyle\int_0^x \lfloor t \rfloor\,\mathrm{d}t$ définie sur $\mathbb{R}$ mais qui n'est pas une primitive de $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ car elle n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$.

Soit x un réel positif fixé. On cherche à calculer la surface :



Notons $n = \lfloor x \rfloor$. On constate que la surface colorée contient $n-1$ rectangles de largeur 1, dont les hauteurs vont de 1 à $n-1$, et un rectangle de largeur $(x-n)$ de de hauteur n. on en déduit :

$$\int_0^x \lfloor t \rfloor \,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n-1}(1 \times k) + (x-n) \times n$$

Ceci donne :

$$\int_0^x \lfloor t \rfloor \,\mathrm{d}t = \frac{n(n-1)}{2} + n(x-n) = n\left(\frac{n-1}{2} + x - n\right) = n\left(x - \frac{n+1}{2}\right)$$

On peut exprimer cette intégrale uniquement en fonction de x :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad F(x) = \lfloor x \rfloor \left(x - \frac{\lfloor x \rfloor + 1}{2}\right)$$

On peut remarquer que pour de grandes valeurs de x, cette intégrale est à peu près égale à $\frac{x^2}{2}$. Effectivement, si x est grand alors la courbe de la fonction partie entière ressemble à la première bissectrice des axes, d'équation $y = x$, dont l'intégrale de 0 à x est $\frac{x^2}{2}$.
On peut également démontrer que cette formule est aussi valable pour x négatif.

Démontrons que la fonction F est continue sur $\mathbb{R}$.
Comme la fonction partie entière est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ alors par produit et somme la fonction F est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
Soit n un point de $\mathbb{Z}$.

- Si $x \in [n-1, n[$ alors $\lfloor x \rfloor = n-1$, donc $F(x) = (n-1)\left(x - \frac{n}{2}\right)$.
- Si $x \in [n, n+1[$ alors $\lfloor x \rfloor = n$, donc $F(x) = n\left(x - \frac{n+1}{2}\right)$.

Ceci donne :

$$\lim_{\substack{x \to n \\ <}} F(x) = \frac{(n-1)n}{2} \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x \to n \\ >}} F(x) = \frac{n(n-1)}{2}$$

De plus $F(n) = \frac{n(n-1)}{2}$. Ainsi $F(x)$ admet $F(n)$ pour limite lorsque x tend vers n :

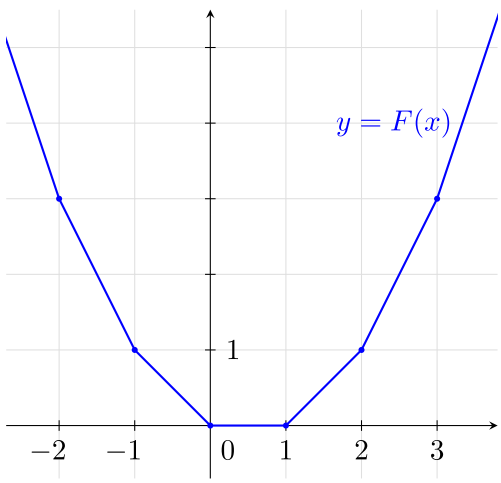
$$\lim_{x \to n} F(x) = F(n)$$

Donc F est continue en n.
Ceci est valable pour tout entier n donc F est continue sur $\mathbb{Z}$, et finalement F est continue sur $\mathbb{R}$.

On peut tracer l'allure de la courbe de F.
On remarque que :

- si $x \in [0, 1[$ alors $F(x) = 0$
- si $x \in [1, 2[$ alors $F(x) = x - 1$
- si $x \in [2, 3[$ alors $F(x) = 2x - 3$
- si $x \in [-1, 0[$ alors $F(x) = -x$
- etc.

On obtient une courbe comme ci contre.
On observe une certaine ressemblance avec une parabole.



On constate également que la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, sa dérivée est 0 sur $]0,1[$, 1 sur $]1,2[$, 2 sur $]2,3[$, etc. En fait sa dérivée en x est $\lfloor x \rfloor$.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on définit la fonction :

$$f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto \begin{cases} n^2 & \text{si } \frac{1}{n+1} < t \leqslant \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^1 \left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)\right)\mathrm{d}t$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est en escalier. On calcule :

$$\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{n+1}} 0\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} n^2\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{n}}^1 0\,\mathrm{d}t = n^2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{n}{n+1}$$

On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t\right) = 1$

Soit maintenant $t \in [0,1]$ fixé. Si $t = 0$ alors $f_n(t) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, car $0 < \frac{1}{n+1}$.
Si $t > 0$ alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{N} < t$. Il suffit de poser $N = \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor + 1$. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad n \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{n} < t \quad \text{donc} \quad f_n(t) = 0$$

Ainsi la suite $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est stationnaire en 0, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = 0$.

L'intégrale la fonction nulle est nulle donc : $\int_0^1 \left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)\right)\mathrm{d}t = 0$.

Remarque. Cet exercice montre un principe très important :

On ne peut intervertir une limite et une intégrale.

En effet dans l'exemple ci-dessus, la limite de l'intégrale de f_n n'est pas égale à l'intégrale de la limite.

5 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\int_0^1 f = \frac{1}{2}$.
Démontrer que f admet un point fixe.

Soit $g = f - \mathrm{Id}$. Alors g est continue par somme, et son intégrale sur $[0,1]$ est :

$$\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (f(x) - x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

On applique le théorème de positivité :

Soit g continue et de signe constant. Si $\int_0^1 g = 0$ alors $g = 0$.

Supposons que g est de signe constant. Comme elle est continue alors d'après le théorème de positivité elle est identiquement nulle.

Si maintenant g n'est pas de signe constant alors elle prend au moins une valeur positive et une valeur négative, et comme elle est continue alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires elle s'annule en un point.

Dans tous les cas g s'annule en au moins un point, donc elle admet un point fixe.

6 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue telle que :

$$\int_a^b f^2 = \int_a^b f^3 = \int_a^b f^4 .$$

En considérant une combinaison linéaire judicieuse, démontrer que f est constante égale à 0 ou à 1.

On fait apparaître un carré : on remarque que $f^2 - 2f^3 + f^4 = f^2(1-f)^2$. Or par linéarité :

$$\int_a^b (f^2 - 2f^3 + f^4) = \int_a^b f^2 - 2\int_a^b f^3 + \int_a^b f^4$$

Ceci donne ;

$$\int_a^b f^2(1-f)^2 = 0$$

La fonction $f^2(1-f)^2$ est positive, continue car f est continue. Son intégrale sur $[a,b]$ est nulle donc par théorème de positivité elle est nulle.

Comme $f^2(1-f)^2 = 0$ alors :

$$\forall x \in [0,1] \qquad (f(x) = 0 \qquad \text{ou} \qquad f(x) = 1)$$

Comme f est continue alors $f = 0$ ou $f = 1$, *i.e.,* f est constante égale à 0 ou à 1.

En effet, si f prenait les deux valeurs 0 et 1 alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, comme elle est continue, il existerait $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = \frac{1}{2}$.

$\boxed{7}$ Soit f l'application définie par :

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (a,b) & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 \frac{ax+b}{(x+1)(x-2)}\,\mathrm{d}x. \end{array}$$

a. Démontrer que f est linéaire.
b. On pose $u_1 = (1,1)$ et $u_2 = (1,-2)$. Démontrer que la famille (u_1, u_2) est une base de $\mathbb{R}^2$. Donner les coordonnées d'un vecteur quelconque $u = (a,b)$ dans cette base.
c. Calculer $f(u_1)$ et $f(u_2)$.
d. Expliciter $f(a,b)$ pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

a. Méthode 1. Par la caractérisation des applications linéaires.
Soit $u = (a,b)$ et $v = (a',b')$ deux éléments de $\mathbb{R}^2$, et λ un scalaire.
Alors $\lambda u + v = (\lambda a + a', \lambda b + b')$ donc :

$$f(\lambda u + v) = \int_0^1 \frac{(\lambda a + a')x + (\lambda b + b')}{(x+1)(x-2)}\,\mathrm{d}x$$

Ceci donne :

$$f(\lambda u + v) = \int_0^1 \frac{\lambda(ax+b) + (a'x+b')}{(x+1)(x-2)}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \lambda\frac{ax+b}{(x+1)(x-2)} + \frac{a'x+b'}{(x+1)(x-2)}\,\mathrm{d}x$$

La linéarité de l'intégrale :

$$\forall (f,g) \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad \int_a^b (\lambda f + g) = \lambda \int_a^b f + \int_a^b g$$

montre que :

$$f(\lambda u + v) = \lambda \int_0^1 \frac{ax+b}{(x+1)(x-2)}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{a'x+b'}{(x+1)(x-2)}\,\mathrm{d}x = \lambda f(u) + f(v)$$

On a démontré que :

$$\forall (u,v) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^2 \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)$$

D'après la caractérisation des applications linéaires f est linéaire.
Méthode 2.
Par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(a,b) &= \int_0^1 a\frac{x}{(x+1)(x-2)} + b\frac{1}{(x+1)(x-2)}\,\mathrm{d}x \\ &= a\int_0^1 \frac{x}{(x+1)(x-2)}\,\mathrm{d}x + b\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x-2)}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

On pose :

$$\alpha = \int_0^1 \frac{x}{(x+1)(x-2)}\,\mathrm{d}x \qquad \beta = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x-2)}\,\mathrm{d}x$$

Alors α et β sont deux réels, et f est l'application :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (a,b) & \longmapsto & a\alpha + b\beta \end{array}$$

Par propriété des formes linéaires, f est linéaire.

En effet toute forme linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ est de la forme $(x,y) \mapsto ax + by$ où a et b sont deux réels.

b. Les vecteurs u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires, donc ils forment une famille libre.

La famille (u_1, u_2) est une famille libre de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, qui est de dimension 2, donc c'est une famille libre maximale.

La famille (u_1, u_2) est donc une base de $\mathbb{R}^2$.

Soit $u = (a,b)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$. Alors il existe un unique couple (λ_1, λ_2) de réels tel que $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$, ce qui revient au système :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = a \\ \lambda_1 - 2\lambda_2 = b \end{cases}$$

L'unique solution est : $(\lambda_1, \lambda_2) = \left(\frac{2a+b}{3}, \frac{a-b}{3}\right)$

Le fait que ce système admet une et une seule solution pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ prouve que la famille (u_1, u_2) est une base de $\mathbb{R}^2$, ce qui rend inutile la partie ci-dessus où on justifie qu'elle est libre maximale.

Finalement les coordonnées du vecteur (a,b) dans la base (u_1, u_2) sont : $\left(\frac{2a+b}{3}, \frac{a-b}{3}\right)$

En d'autre termes : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \qquad (a,b) = \dfrac{2a+b}{3} u_1 + \dfrac{a-b}{3} u_2$

c. On calcule :

$$f(u_1) = \int_0^1 \frac{x+1}{(x+1)(x-2)}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x = \Big[\ln|x-2|\Big]_0^1 = -\ln 2$$

$$f(u_2) = \int_0^1 \frac{x-2}{(x+1)(x-2)}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \Big[\ln|x+1|\Big]_0^1 = \ln 2$$

d. On a démontré dans la question b que :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \qquad (a,b) = \frac{2a+b}{3} u_1 + \frac{a-b}{3} u_2$$

Comme f est linéaire alors :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(a,b) = \frac{2a+b}{3} f(u_1) + \frac{a-b}{3} f(u_2)$$

D'après la question précédente :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(a,b) = -\frac{2a+b}{3}\ln 2 + \frac{a-b}{3}\ln 2$$

Finalement :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(a,b) = -\frac{(a+2b)\ln 2}{3}$$

8 Déterminer une primitive de f_0, f_1 et f_2 où :

$$f_a(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + a}.$$

Pour f_0 on écrit :

$$f_0(x) = \frac{1}{x^2 - 2x} = \frac{1}{x(x-2)}$$

On cherche α et β deux réels tels que $\frac{1}{x(x-2)} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x-2}$, on obtient :

$$f_0(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x}\right)$$

On en déduit une primitive de f_0 :

$$F_0(x) = \frac{1}{2}(\ln|x-2| - \ln|x|) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|$$

Pour f_1 on écrit :

$$f_1(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 1} = \frac{1}{(x-1)^2}$$

On en déduit une primitive :

$$F_1(x) = -\frac{1}{x-1} = \frac{1}{1-x}$$

Enfin pour f_2 on utilise la forme canonique :

$$f_2(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 2} = \frac{1}{(x-1)^2 + 1}$$

On en déduit une primitive :

$$F_2(x) = \arctan(x-1)$$

9 Calculer les intégrales :

$$F(x) = \int_1^x t\ln t\,\mathrm{d}t \qquad I_1 = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{2t^2 - 6t + 5}$$

$$I_2 = \int_{\ln 7}^{\ln 10} \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch} x - 1} \qquad I_3 = \int_1^{1000} \frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt[3]{t} - 1}.$$

- $F(x) = \displaystyle\int_1^x t\ln t\,\mathrm{d}t$

  On pose $u'(t) = t$ et $v(t) = \ln t$, puis $u(t) = \frac{t^2}{2}$ et $v'(t) = \frac{1}{t}$.
  Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[1, x]$, si on suppose que $x \geqslant 1$, ou sur le segment $[x, 1]$ si on suppose que $0 < x < 1$.
  L'intégration par parties donne :

$$F(x) = \left[\frac{t^2}{2}\ln t\right]_1^x - \int_1^x \frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\ln t\right]_1^x - \left[\frac{t^2}{4}\right]_1^x = \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{x^2-1}{4}$$

- $I_1 = \displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{2t^2 - 6t + 5}$

  Le discriminant du dénominateur $2t^2 - 6t + 5$ est strictement négatif, donc on ne peut décomposer la fraction en éléments simples. On met alors ce dénominateur sous sa forme canonique pour faire apparaître la dérivée d'une arc-tangente :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2t^2-6t+5} &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{t^2 - 3t + \frac{5}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\left(t-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \frac{5}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\left(t-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{(2t-3)^2+1} = \frac{2}{(2t-3)^2+1}\end{aligned}$$

  On en déduit :

$$I_1 = \int_1^2 \frac{2\mathrm{d}t}{(2t-3)^2+1} = \Big[\arctan(2t-3)\Big]_1^2 = \arctan 1 - \arctan(-1) = \frac{\pi}{2}$$

- $I_2 = \displaystyle\int_{\ln 7}^{\ln 10} \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch} x - 1}$

  On commence par écrire : $\quad I_2 = \displaystyle\int_{\ln 7}^{\ln 10} \frac{2\,\mathrm{d}x}{e^x + e^{-x} - 2}$

  Soit $u = e^x$. La fonction $x \mapsto e^x$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = e^x = u$, ce qui donne $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{u}$.
  Par changement de variable :

$$I_2 = \int_7^{10} \frac{2\,\mathrm{d}u}{u^2+1-2u} = \int_7^{10} \frac{2\,\mathrm{d}u}{(u-1)^2}$$

  On en déduit :

$$I_2 = \left[-\frac{2}{u-1}\right]_7^{10} = \frac{1}{9}$$

- $I_3 = \displaystyle\int_1^{1000} \frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt[3]{t} - 1}$

  On pose $x = t^{\frac{1}{3}}$, ce qui revient à $t = x^3$.
  La fonction $x \mapsto x^3$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 3x^2$, ce qui donne $\mathrm{d}t = 3x^2\mathrm{d}x$.
  Par changement de variables :

$$I_3 = \int_1^{10} \frac{3x^2\,\mathrm{d}x}{2x-1}$$

  On pose maintenant $y = 2x - 1$. Alors $x = \frac{y+1}{2}$, la fonction $y \mapsto \frac{y+1}{2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et $\frac{\mathrm{d}x}{dy} = \frac{1}{2}$, ce qui donne $\mathrm{d}x = \frac{1}{2}dy$.
  Par changement de variables :

$$I_3 = \int_1^{19} \frac{3\left(\frac{y+1}{2}\right)^2 \frac{dy}{2}}{y}$$

On calcule :

$$\begin{aligned}I_3 = \frac{3}{8}\int_1^{19}\frac{(y+1)^2}{y}\,dy &= \frac{3}{8}\int_1^{19}\left(y+2+\frac{1}{y}\right)dy\\&= \frac{3}{8}\left[\frac{y^2}{2}+2y+\ln|y|\right]_1^{19} = \frac{3}{8}\left(\frac{19^2}{2}+38+\ln 19-\frac{1}{2}-2\right)\\&= \frac{3}{8}\left(\frac{18\times 20}{2}+36+\ln 19\right) = 3\left(\frac{9\times 5}{2}+\frac{9}{2}+\frac{\ln 19}{8}\right)\\&= 81+\frac{3}{8}\ln 19\end{aligned}$$

10 Calculer les intégrales suivantes.

$$I_1 = \int_2^8 \frac{\mathrm{d}t}{t^2-t} \qquad I_2 = \int_0^1 t^2(t^3+1)^5\,\mathrm{d}t \qquad I_3 = \int_0^1 \frac{3t^2+t+1}{t^3+1}$$

$$I_4 = \int_{-2}^1 \left(\frac{t+3}{t-2}\right)^2 \mathrm{d}t \qquad I_5 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x+\tan x} \qquad F(x) = \int_0^x t^3 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$I_6 = \int_{-1}^1 \left(1-t^2\right)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}t \qquad I_7 = \int_1^{e^\pi} \sin(\ln t)\,\mathrm{d}t.$$

Les réponses sont :

$$I_1 = \ln\frac{7}{4} \qquad I_2 = \frac{7}{2} \qquad I_3 = \ln 2+\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \qquad I_4 = \frac{87}{4}-20\ln 2$$

$$I_5 = \frac{\ln 3}{4}-\frac{1}{6} \qquad F(x) = \frac{1}{2}-\frac{x^2+1}{2}e^{-x^2} \qquad I_6 = \frac{3\pi}{8} \qquad I_7 = \frac{e^\pi+1}{2}$$

- Pour I_1 on obtient : $\frac{1}{t^2-t} = \frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}$
- Pour I_2 on reconnaît la forme $u'u^\alpha$.
- Pour I_3 il faut décomposer :

$$\frac{3t^2+t+1}{t^3+1} = \frac{3t^2}{t^3+1}+\frac{t+1}{t^3+1}$$

La première fraction est de la forme $\frac{u'}{u}$, pour la seconde on remarque que :

$$t^3+1 = (t+1)(t^2-t+1)$$

On peut l'obtenir par division euclidienne.

On termine en utilisant la forme canonique.

- Pour I_4 on écrit : $\frac{t+3}{t-2} = 1+\frac{5}{t-2}$ puis on développe le carré.
Sinon le changement de variable $u = t-2$ est efficace aussi.

- Pour I_5 le changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$ donne : $I_5 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1} \left(\frac{1}{t} - t\right) \mathrm{d}t$
- Pour $F(x)$ il faut intégrer par parties en posant $u(t) = t^2$ et $v'(t) = te^{-t^2}$.
- Pour I_6 on utilise un changement de variable $t = \sin x$ ou $t = \cos x$, puis on linéarise.
- Pour I_7 on utilise le changement de variable $u = \ln t$, puis on utilise les complexes : $\sin u = \mathrm{Im}\left(e^{iu}\right)$.

11 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note : $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

a. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{2n+1}$.

En déduire que la suite (I_n) converge.

b. Calculer $I_n + I_{n+1}$.

c. Déterminer la limite de la suite : $u_n = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \cdots + (-1)^n \dfrac{1}{2n+1}$.

a. On fixe un entier naturel n pour cette question et la suivante.

On utilise la croissance de l'intégrale, en partant de l'encadrement :

$$\forall t \in [0,1] \qquad 1 + t^2 \geqslant 1 \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant t^{2n}$$
$$\text{donc} \quad 0 \leqslant \frac{t^{2n}}{1+t^2} \leqslant t^{2n}$$

Par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^1 0\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^{2n}\,\mathrm{d}t$$

Ceci donne :

$$0 \leqslant I_n \leqslant \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2n+1}$$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$ alors par théorème d'encadrement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

b. On utilise la linéarité de l'intégrale :

$$I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^{2n} + t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

On en déduit :

$$I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{t^{2n}(1+t^2)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^{2n}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2n+1}$$

c. On peut écrire u_n de la façon suivante :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{2k+1}$$

D'après la question précédente :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (I_k + I_{k+1})$$

On remarque un télescopage, que l'on met en évidence en utilisant le changement de variable $\ell = k+1$:

$$\begin{aligned} u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_k + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_{k+1} &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_k + \sum_{\ell=1}^{n+1} (-1)^{\ell-1} I_\ell \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_k - \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k I_k = I_0 - (-1)^{n+1} I_{n+1} \end{aligned}$$

On a donc démontré que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = I_0 + (-1)^n I_{n+1}$$

On a démontré précédemment que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, donc par décalage la suite $(I_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, et ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers I_0.

On calcule :

$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} \mathrm{d}t = \Big[\arctan t\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

En conclusion :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{\pi}{4}$$

12 Pour tout entier positif n on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \,\mathrm{d}t$.

a. Calculer I_0 et I_1.

b. Démontrer que la suite (I_n) est convergente.

c. À l'aide d'une intégration par parties démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad (n+2) I_{n+2} = (n+1) I_n.$$

d. Démontrer que la suite $\left((n+1) I_n I_{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et donner sa valeur.

e. En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

f. Justifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad I_{n+2} \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n.$$

En déduire que les suites $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(I_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes.

g. Démontrer que : $I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Les intégrales $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \,\mathrm{d}t$ sont appelées intégrales de Wallis.

Elles permettent de démontrer plusieurs résultats important, comme la valeur de l'intégrale de la gaussienne, la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, ou la formule de Stirling.

a. On calcule :

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \,\mathrm{d}t = \Big[t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \,\mathrm{d}t = \Big[-\cos t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

b. On démontre que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée.
Soit n un entier naturel fixé.
Si $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ alors $0 \leqslant \sin t \leqslant 1$, donc :

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \qquad 0 \leqslant \sin^{n+1} t \leqslant \sin^n t$$

Par croissance de l'intégrale :

$$0 \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} t \,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \,\mathrm{d}t$$

Ceci est valable pour tout n donc on a démontré que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$$

La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0 et décroissante, donc elle converge.

c. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On commence par expliciter I_{n+2} :

$$I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} t \,\mathrm{d}t$$

On pose $u'(t) = \sin t$ et $v(t) = \sin^{n+1} t$. Alors $u(t) = -\cos t$ et $v'(t) = (n+1)\cos t \sin^n t$.
Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Le théorème d'intégration par parties donne :

$$I_{n+2} = \Big[-\cos t \sin^{n+1} t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)\cos^2 t \sin^n t \,\mathrm{d}t$$

On calcule :

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= 0 + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 t)\sin^n t \,\mathrm{d}t \\ &= (n+1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \,\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} t \,\mathrm{d}t\right) \qquad \text{par linéarité} \\ &= (n+1)(I_n - I_{n+2}) = (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2} \end{aligned}$$

Ceci donne :

$$(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$$

C'est le résultat attendu.

d. En multipliant le résultat de la question précédente par I_{n+1} on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad (n+2)I_{n+1}I_{n+2} = (n+1)I_n I_{n+1}$$

Ceci montre que la suite $((n+1)I_n I_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante : deux de ses termes consécutifs sont égaux.
Pour $n = 0$ on obtient $(n+1)I_n I_{n+1} = I_0 I_1 = \frac{\pi}{2}$ d'après la question 1.
On en déduit donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad (n+1)I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2}$$

e. La formule précédente peut s'écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)} \tag{3}$$

On sait depuis la question 1 que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Notons ℓ sa limite.

Par décalage la suite $(I_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers ℓ.

Par produit la suite $(I_n I_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ^2.

Or la suite $\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Par unicité de la limite, l'égalité (3) montre que $\ell^2 = 0$, et donc $\ell = 0$.

En conclusion la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

f. On sait que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad I_{n+2} \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$$

Comme la suite $((n+1)I_n I_{n+1})$ est constante égale à $\frac{\pi}{2}$ alors aucun I_n ne peut être nul.

Mais on sait que les termes I_n sont positifs, ils sont donc strictement positifs.

Par division par I_n on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \frac{I_{n+2}}{I_n} \leqslant \frac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant 1$$

D'après la question c, comme $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$ alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \frac{n+1}{n+2} \leqslant \frac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant 1$$

Or $\lim \frac{n+1}{n+2} = 1$, donc par théorème d'encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$$

Ceci montre que les suites $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(I_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes.

g. La formule (3) nous a donné :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$$

On en déduit :

$$I_n^2 \sim I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)} \sim \frac{\pi}{2n}$$

En d'autres termes :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2nI_n^2}{\pi} = 1$$

Tous les termes sont positifs donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2n}I_n}{\sqrt{\pi}} = 1$$

Ceci donne l'équivalence :

$$I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

On a prouvé que la suite (I_n) converge vers 0, mais on en a aussi donné un équivalent.

13 Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et :

$$f : x \mapsto \int_0^x (x-t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

a. Justifier que la fonction f est bien définie.
b. Démontrer qu'elle est dérivable et exprimer sa dérivée en fonction de φ.
c. Mêmes questions avec la fonction :

$$g : x \mapsto \int_0^1 \varphi(tx)\,\mathrm{d}t.$$

a. La fonction φ est continue donc la fonction $\Phi : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ est définie, d'après le théorème fondamental c'est une primitive de φ.
Par linéarité la fonction f s'écrit :

$$f(x) = x\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x t\varphi(t)\,\mathrm{d}t = x\Phi(x) - \int_0^x t\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

Par produit la fonction $\psi : t \mapsto t\varphi(t)$ est continue donc la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x t\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ est définie et c'est une primitive de ψ.
Ainsi f est définie sur $\mathbb{R}$.

b. Les primitives sont dérivables donc par produit et somme la fonction f est dérivable.
Comme $f(x) = x\Phi(x) - \displaystyle\int_0^x t\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = \Phi(x) + x\varphi(x) - x\varphi(x) = \Phi(x)$$

Ceci montre que f est une primitive d'une primitive de φ.

c. On fixe $x \in \mathbb{R}$ et on note $u = tx$. La fonction $t \mapsto tx$ est de classe $\mathcal{C}^1$, sa dérivée est $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = x$. Ceci donne $\mathrm{d}u = x\,\mathrm{d}t$ puis par changement de variables :

$$g(x) = \int_0^1 \varphi(tx)x\,\mathrm{d}t = \int_0^x \varphi(u)\,\mathrm{d}u$$

Ceci montre que g est dérivable, c'est la primitive de φ qui s'annule en 0, notée Φ dans les questions précédentes.

14 Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \int_0^x \varphi(t)\cos(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

a. Justifier que f est dérivable.
b. Justifier que f est deux fois dérivable et déterminer une équation différentielle dont elle est solution.

a. On développe le cosinus, puis par linéarité de l'intégrale :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \cos x \int_0^x \varphi(t)\cos t\,\mathrm{d}t + \sin x \int_0^x \varphi(t)\sin t\,\mathrm{d}t$$

Les fonctions $t \mapsto \varphi(t)\cos t$ et $t \mapsto \varphi(t)\sin t$ sont continues donc d'après le théorème fondamental les fonctions $x \mapsto \int_0^x \varphi(t)\cos t\,\mathrm{d}t$ et $x \mapsto \int_0^x \varphi(t)\sin t\,\mathrm{d}t$ sont définies et en sont des primitives.

Par produit et somme la fonction f est dérivable, et :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) &= -\sin x \int_0^x \varphi(t)\cos t\,\mathrm{d}t + \cos^2 x\ \varphi(x) \\ &\qquad + \cos x \int_0^x \varphi(t)\sin t\,\mathrm{d}t + \sin^2 x\ \varphi(x) \\ &= \varphi(x) - \sin x \int_0^x \varphi(t)\cos t\,\mathrm{d}t + \cos x \int_0^x \varphi(t)\sin t\,\mathrm{d}t \qquad (\star) \\ &= \varphi(x) - \int_0^x \varphi(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{par linéarité}\end{aligned}$$

b. L'expression $(\star)$ montre que la fonction f' est dérivable si la fonction f est dérivable. On calcule sa dérivée :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R} \qquad f''(x) &= \varphi'(x) - \cos x \int_0^x \varphi(t)\cos t\,\mathrm{d}t - \sin x\cos x\,\varphi(x) \\ &\qquad - \sin x \int_0^x \varphi(t)\sin t\,\mathrm{d}t + \cos x \sin x\,\varphi(x) \\ &= \varphi'(x) - \int_0^x \varphi(t)\cos(x-t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

On retrouve la fonction f, donc finalement : $f'' = \varphi' - f$.

Ceci montre que f est une solution de l'équation différentielle $y'' + y = \varphi'$.

15 Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et : $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} k^\alpha$.

a. Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$k^\alpha \leqslant \int_k^{k+1} t^\alpha \,\mathrm{d}t \leqslant (k+1)^\alpha.$$

b. En déduire un encadrement de S_n par deux intégrales.

Démontrer que $S_n \sim \dfrac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

c. Retrouver ce résultat grâce aux sommes de Riemann.

a. La fonction $t \mapsto t^\alpha$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ car $\alpha > 0$.
Pour tout $t \in [k, k+1]$: $\quad k^\alpha \leqslant t^\alpha \leqslant (k+1)^\alpha$.
On obtient l'encadrement désiré par croissance de l'intégrale.

b. Par relation de Chasles :

$$\int_0^n t^\alpha \,\mathrm{d}t \leqslant S_n \leqslant \int_1^{n+1} t^\alpha \,\mathrm{d}t.$$

On calcule :

$$\frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} \leqslant S_n \leqslant \frac{(n+1)^{\alpha+1}-1}{\alpha+1}$$

Puis :

$$1 \leqslant \frac{(\alpha+1)S_n}{n^{\alpha+1}} \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha+1} - \frac{1}{n^{\alpha+1}}$$

Par théorème d'encadrement $S_n \sim \dfrac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

c. On remarque : $\dfrac{S_n}{n^{\alpha+1}} = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{k}{n}\right)^\alpha$

La fonction $t \mapsto t^\alpha$ est continue donc $\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{k}{n}\right)^\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 t^\alpha \,\mathrm{d}t$.

On en déduit $\dfrac{S_n}{n^{\alpha+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{\alpha+1}$ donc $S_n \sim \dfrac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

16 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose : $u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$.

a. Expliciter la formule de Taylor avec reste intégral pour la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ en $x = 0$.

b. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et donner sa limite.

a. La fonction f est définie sur l'intervalle $I =]-1, +\infty[$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur cet intervalle. Elle est donc de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et on peut appliquer la formule de Taylor avec reste intégral au point $a = 0$.

On démontre par récurrence que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad \forall x \in I \qquad f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$$

Ceci donne :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

La formule de Taylor avec reste intégral s'écrit alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall x \in I \qquad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \int_0^x \frac{(-1)^n(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\,\mathrm{d}t$$

La partie polynomiale de ce développement est le développement limité de f. En effet, on sait que la formule de Taylor-Young et la formule de Taylor avec reste intégral donnent la même partie polynomiale, et la formule de Taylor-Young donne le développement limité de f.

b. Pour $x = 1$ la formule ci-dessus devient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \ln 2 = u_n + (-1)^n \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\,\mathrm{d}t$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad |u_n - \ln 2| = \left|\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\,\mathrm{d}t\right|$$

On encadre :

$$\forall t \in [0,1] \qquad 0 \leqslant \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}} \leqslant \frac{1}{(1+t)^{n+1}}$$

Par croissance de l'intégrale :

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \frac{1}{(1+t)^{n+1}}\,\mathrm{d}t$$

On calcule :

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+t)^{n+1}}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{(1+t)^{-n}}{-n}\right]_0^1 = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \leqslant \frac{1}{n}$$

Par transitivité de la relation d'ordre :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad 0 \leqslant |u_n - \ln 2| \leqslant \frac{1}{n}$$

Comme $\left(\frac{1}{n}\right)$ converge vers 0 alors d'après le théorème d'encadrement la suite (u_n) converge vers $\ln 2$.

17 Pour m et n entiers positifs on pose : $I_{mn} = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^n t^m \,\mathrm{d}t$.
Utiliser la formule de Taylor avec reste intégral pour calculer la valeur de I_{mn}.

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = x^{m+n+1}$

Ceci car le reste intégral est :

$$\int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t$$

On posera $a = 0$, $x = 1$, et on souhaite trouver une fonction f qui vérifie $f^{(n+1)}(t) = \lambda t^m$ où λ est une constante. La fonction $f : t \mapsto t^{m+n+1}$ semble convenir.

Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et ses dérivées successives sont :

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad f^{(k)}(x) = \begin{cases} \dfrac{(m+n+1)!}{(m+n+1-k)!}x^{m+n+1-k} & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant m+n+1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier pour $x = 0$:

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq m+n+1 \\ (m+n+1)! & \text{si } k = m+n+1 \end{cases}$$

La formule de Taylor à l'ordre n, pour $a = 0$ et $x = 1$ donne :

$$f(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} + \int_0^1 f^{n+1}(t)\frac{(1-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t$$

On en déduit :

$$1 = \int_0^1 \frac{(m+n+1)!}{m!}t^m\frac{(1-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t = \frac{(m+n+1)!}{m!n!}\int_0^1 t^m(1-t)^n\,\mathrm{d}t$$

et donc :

$$\boxed{I_{mn} = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}}$$

18 Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right) = \sin x.$$

On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction sinus en 0 à l'ordre $2n+1$, où n est un entier naturel.

La fonction sinus est de classe $\mathcal{C}^{2n+2}$ sur $\mathbb{R}$.

Ses dérivées successives sont : cos, $-\sin$, $-\cos$, sin, etc.

Leurs valeurs en 0 sont : 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0... Leurs valeurs absolues sont majorées par 1.

L'inégalité de Taylor-Lagrange donne :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \left|\sin x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\right| \leqslant \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

Pour tout réel x le théorème de croissances comparées donne : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x^n}{n!} = 0$

La suite extraite $\left(\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\right)$ converge donc aussi vers 0, puis par théorème d'encadrement :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right) = \sin x.$$

19 **Lemme de Lebesgue v1**

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Démontrer que : $\displaystyle\int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

On note pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle I_n = \int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t$

On applique la théorème d'intégration par parties. On pose $v(t) = -\frac{1}{n}\cos(nt)$. La fonction v est de classe $\mathcal{C}^1$ et sa dérivée est $v'(t) = \sin(nt)$.

La fonction f est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ donc par intégration par parties :

$$I_n = \left[-\frac{1}{n}f(t)\cos(nt)\right]_a^b + \frac{1}{n}\int_a^b f'(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t$$

Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ alors les fonctions f et f' sont bornées sur le segment $[a,b]$. Notons M et M' des bornes de leurs valeurs absolues :

$$\forall t \in [a,b] \qquad |f(t)| \leqslant M \qquad \text{et} \qquad |f'(t)| \leqslant M'$$

On a alors :

$$\forall t \in [a,b] \qquad |f'(t)\cos(nt)| \leqslant M'$$

Par inégalité triangulaire puis croissance de l'intégrale :

$$\left|\int_a^b f'(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f'(t)\cos(nt)|\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b M'\,\mathrm{d}t = M'(b-a)$$

De plus, par inégalité usuelle pour les réels :

$$\left|\left[-\frac{1}{n}f(t)\cos(nt)\right]_a^b\right| \leqslant \frac{1}{n}(|f(b)\cos(nb)|+|f(a)\cos(na)|) \leqslant \frac{2}{n}M$$

On en déduit, encore par inégalité triangulaire pour les réels :

$$\forall n\in\mathbb{N} \qquad |I_n| \leqslant \frac{1}{n}(2M+M'(b-a))$$

Par théorème d'encadrement la suite (I_n) converge vers 0.

$\boxed{20}$ Lemme de Lebesgue v2

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction. Démontrer que : $\displaystyle\int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

a. Si f est constante.
b. Si f est en escalier.
c. Si f est continue par morceaux.

On note pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\quad I_n=\displaystyle\int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t$

a. Supposons que f est constante égale à λ. Alors :

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \qquad I_n=\lambda\int_a^b\sin(nt)\,\mathrm{d}t=\lambda\left[-\frac{\cos(nt)}{n}\right]_a^b=\frac{\lambda}{n}(\cos(na)-\cos(nb))$$

Le cosinus étant borné, par théorème d'encadrement la suite (I_n) converge vers 0.

b. On utilise une subdivision $(x_0,\ldots,x_m)$ du segment $[a,b]$ adaptée à la fonction f.
D'après la relation de Chasles :

$$\forall n\in\mathbb{N} \qquad I_n=\sum_{k=1}^m\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t$$

La fonction f est constante sur les segments $[x_{k-1},x_k]$ quitte à remplacer ses valeurs aux bornes de ces segments. D'après ce qui précède :

$$\forall k=1,\ldots,m \qquad \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

La somme de ces m suites d'intégrales converge donc vers 0, et (I_n) converge vers 0.

c. On suppose maintenant que f est continue par morceaux.
Soit $\varepsilon>0$. D'après le théorème d'approximation il existe une fonction f_1 en escalier telle que $f-\varepsilon\leqslant f_1\leqslant f$. On a alors $|f-f_1|\leqslant\varepsilon$ puis par linéarité, inégalité triangulaire et croissance de l'intégrale :

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t-\int_a^b f_1(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t\right| &= \left|\int_a^b (f(t)-f_1(t))\sin(nt)\,\mathrm{d}t\right|\\ &\leqslant \int_a^b |(f(t)-f_1(t))\sin(nt)|\,\mathrm{d}t\\ &\leqslant \int_a^b \varepsilon\,\mathrm{d}t=\varepsilon(b-a)\end{aligned}$$

La fonction f_1 est en escalier donc d'après la question précédente :

$$\int_a^b f_1(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Il existe donc un entier N tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad \left|\int_a^b f_1(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon$$

On en déduit par inégalité triangulaire :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad \left|\int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon(1+b-a)$$

Si $\varepsilon > 0$ alors $\frac{\varepsilon}{b-a+1} > 0$, donc ceci est valable en remplaçant ε par $\frac{\varepsilon}{b-a+1}$. On a donc démontré que :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists N \in \mathbb{N} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad |I_n| \leqslant \varepsilon$$

Ceci signifie exactement que la suite (I_n) converge vers 0.

21 Soit f la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos^2 t}$

a. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et impaire.

b. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, décrire ses variations.

c. Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. Calculer $f(x)$ à l'aide du changement de variable $u = \tan t$.

d. En déduire la valeur de : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos^2 t}$

e. Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\int_{k\pi}^x \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos^2 t} = f(x-k\pi)$

a. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose : $\varphi(x) = \frac{1}{1+\cos^2 x}$

La fonction φ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, donc sur tout segment $[0,x]$ ou $[x,0]$. Son intégrale sur ce segment est donc définie, et ainsi $f(x)$ est définie tout $x \in \mathbb{R}$.

La fonction f est donc bien définie sur $\mathbb{R}$.

Soit x un réel. Alors : $f(-x) = \displaystyle\int_0^{-x} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos^2 t}$

On applique le changement de variable $u = -t$. L'application $t \mapsto -t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}t$, ce qui montre que :

$$f(-x) = \int_0^x \frac{-\mathrm{d}u}{1+\cos^2(-u)} = -\int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{1+\cos^2 u} = -f(x)$$

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à zéro, et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(-x) = -f(x)$. Ceci montre que f est impaire.

b. Comme la fonction φ est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$ alors le théorème fondamental montre que f est une primitive de φ.

Ainsi f est dérivable de dérivée φ. Comme la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (par quotient) alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

La fonction φ est strictement positive, et $f' = \varphi$, donc f' est strictement positive puis f est strictement croissante.

c. Soit x appartenant à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. Pour tout $t \in [0, x]$ on pose $u = \tan t$.

La fonction $t \mapsto \tan t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, x]$ car $[0, x] \subseteq \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

De plus $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 1 + \tan^2 t = 1 + u^2$ donc : $\quad \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$

Ensuite les formules de trigonométrie donnent : $\quad \cos^2 t = \frac{1}{1+\tan^2 t} = \frac{1}{1+u^2}$

Par changement de variable :

$$f(x) = \int_0^{\tan x} \frac{\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}}{1 + \frac{1}{1+u^2}} = \int_0^{\tan x} \frac{\mathrm{d}u}{2+u^2}$$

On calcule cette dernière intégrale :

$$f(x) = \int_0^{\tan x} \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}u}{1 + \left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\arctan \frac{t}{\sqrt{2}}\right]_0^{\tan x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\tan x}{\sqrt{2}}$$

On a donc démontré que :

$$\boxed{\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\qquad f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan \frac{\tan x}{\sqrt{2}}}$$

d. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, donc elle est continue en $\frac{\pi}{2}$ et ainsi :

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ <}} f(x)$$

La formule de la question précédente est valable pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ donc :

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ <}} \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan \frac{\tan x}{\sqrt{2}}$$

Comme

$$\lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ <}} \tan x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{X \to +\infty} \arctan X = \frac{\pi}{2}$$

alors ;

$$\boxed{f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}}$$

e. On applique maintenant le changement de variable $u = t - k\pi$, où k est un entier fixé. L'application $x \mapsto t - k\pi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\mathrm{d}u = \mathrm{d}t$. Par changement de variable :

$$\int_{k\pi}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos^2 t} = \int_0^{x-k\pi} \frac{\mathrm{d}u}{1+\cos^2(u+k\pi)}$$

Comme k est entier alors $\cos(u+k\pi) = (-1)^k \cos u$ donc :

$$\int_{k\pi}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos^2 t} = \int_0^{x-k\pi} \frac{\mathrm{d}u}{1+\cos^2 u} = f(x-k\pi)$$

On obtient le résultat attendu.

On peut remarquer qu'il est maintenant possible d'expliciter f sur $\mathbb{R}$ tout entier.
En effet, la question (d) donne les valeurs de f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

La parité de f montre que : $\quad \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right] \quad f(x) = -f(-x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan \frac{\tan x}{\sqrt{2}}$

Avec $x = \frac{\pi}{2}$ et $k = 1$ on montre que $f(\pi) = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$ puis par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on a $f(k\pi) = k\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$. On obtient ensuite que :

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \forall x \in \left]k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right[\qquad f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(k\pi + \arctan \frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)$$

Plus précisément, en utilisant la continuité :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\left\lfloor \frac{x}{\pi} + \frac{1}{2} \right\rfloor \pi + \arctan \frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right) & \text{si } x \in \mathcal{D}_{\tan} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} x & \text{sinon.} \end{cases}$$

22 Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on pose : $\quad f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t.$

a. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}^*$.
b. Démontrer que f est dérivable, calculer sa dérivée, puis décrire ses variations.
c. Soit $x > 0$. Justifier l'encadrement :

$$\forall t \in [x, 2x] \qquad e^x \leqslant e^t \leqslant e^{2x}.$$

En déduire un encadrement de f sur $\mathbb{R}_+^*$.
d. Donner un encadrement similaire de f sur $\mathbb{R}_-^*$.
e. Déterminer les limites de f en $\pm\infty$.
f. Justifier que f est prolongeable par continuité en 0. On notera f la prolongement obtenu.
g. À l'aide du théorème de limite de la dérivée, démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ en 0.
h. Donner un développement limité à l'ordre 3 de f en 0 .
i. Tracer l'allure de la courbe de f.

a. On définit la fonction $\varphi : x \mapsto \frac{e^x}{x}$
Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}^*$, et de classe $\mathcal{C}^\infty$ par quotient.
Soit x un élément de $\mathbb{R}^*$. Si x est positif alors $0 < x < 2x$ donc $[x, 2x] \subseteq \mathbb{R}^*$. Ainsi φ est continue sur $[x, 2x]$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_x^{2x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ est définie.
Si x est négatif alors $2x < x < 0$ donc $[2x, x] \subseteq \mathbb{R}^*$. Ainsi φ est continue sur $[2x, x]$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_{2x}^{x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ est définie, puis son opposé $\displaystyle\int_x^{2x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ l'est aussi.
Finalement $f(x)$ est définie pour x strictement positif ou strictement négatif, donc f est définie sur $\mathbb{R}^*$.

b. Comme φ est continue sur les intervalles $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ alors elle admet une primitive sur ces deux intervalles. On choisit une fonction Φ définie sur $\mathbb{R}^*$, dont les restrictions à $\mathbb{R}_+^*$ et à $\mathbb{R}_-^*$ sont des primitives de φ. Ainsi Φ est une primitive de φ. Ceci permet d'écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad f(x) = \int_x^{2x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \Big[\Phi(t)\Big]_x^{2x} = \Phi(2x) - \Phi(x)$$

La fonction Φ est dérivable car c'est une primitive, donc par composition et combinaison linéaire la fonction f est dérivable et :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad f'(x) = 2\Phi'(2x) - \Phi'(x) = 2\varphi(2x) - \varphi(x) = \frac{e^{2x} - e^x}{x}$$

On peut factoriser cette expression :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad f'(x) = \frac{e^x(e^x - 1)}{x}}$$

L'expression $e^x - 1$ est du signe de x, donc f' est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$.
Ainsi f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

c. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Si $t \in [x, 2x]$ alors $e^x \leqslant e^t \leqslant e^{2x}$ car la fonction exponentielle est croissante. Comme t est strictement positif sur $[x, 2x]$ alors :

$$\forall t \in [x, 2x] \qquad \frac{e^x}{t} \leqslant \frac{e^t}{t} \leqslant \frac{e^{2x}}{t}$$

Par croissance de l'intégrale :

$$\int_x^{2x} \frac{e^x}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{2x} \frac{e^{2x}}{t}\,\mathrm{d}t$$

Par linéarité :

$$e^x \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant f(x) \leqslant e^{2x} \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

On calcule que $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t} = [\ln|t|]_x^{2x} = \ln(2x) - \ln(x) = \ln 2$, donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad e^x \ln 2 \leqslant f(x) \leqslant e^{2x} \ln 2 \tag{4}$$

d. Soit $x \in \mathbb{R}_-^*$. Si $t \in [2x, x]$ alors $e^{2x} \leqslant e^t \leqslant e^x$ car la fonction exponentielle est croissante. Comme t est strictement négatif sur $[2x, x]$ alors :

$$\forall t \in [2x, x] \qquad \frac{e^{2x}}{t} \geqslant \frac{e^t}{t} \geqslant \frac{e^x}{t}$$

Par croissance de l'intégrale :

$$\int_{2x}^{x} \frac{e^{2x}}{t}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_{2x}^{x} \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_{2x}^{x} \frac{e^x}{t}\,\mathrm{d}t$$

Par linéarité et en multipliant par -1 :

$$e^{2x} \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant f(x) \leqslant e^x \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

Comme $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln 2$ alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^* \qquad e^{2x} \ln 2 \leqslant f(x) \leqslant e^x \ln 2 \tag{5}$$

e. On sait que : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (e^x \ln 2) = +\infty$

Par théorème de comparaison on déduit de (4) que :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$$

On sait que : $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \left(e^{2x} \ln 2\right) = \lim_{x \to -\infty} (e^x \ln 2) = 0$

Par théorème d'encadrement on déduit de (5) que :

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0}$$

f. On utilise encore les encadrements (4) et (5) mais pour les limites de f en 0 à gauche et à droite. En effet, comme

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} e^x \ln 2 = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} e^{2x} \ln 2 = \ln 2$$

alors d'après le théorème d'encadrement :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \ln 2$$

Comme

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} e^{2x} \ln 2 = \lim_{\substack{x\to 0\\ <}} e^{x} \ln 2 = \ln 2$$

alors d'après le théorème d'encadrement :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = \ln 2$$

Les limites à gauche et à droite sont égales donc f admet $\ln 2$ pour limite en 0 :

$$\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = \ln 2}$$

Ceci montre que f est prolongeable par continuité en posant $f(0) = \ln 2$.

On note toujours f ce prolongement par continuité.

g. On sait que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, de dérivée :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad f'(x) = \frac{e^x(e^x - 1)}{x}$$

L'équivalence $(e^x - 1) \underset{(0)}{\sim} x$ montre que $\lim_{x\to 0} f'(x) = 1$. Ainsi :

- f est continue sur $\mathbb{R}$
- f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$
- $\lim_{x\to 0} f'(x) = 1$

D'après le théorème de limite de la dérivée, f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$.

De plus, comme $f'(0) = \lim_{x\to 0} f'(x)$ alors f' est continue en 0, et donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ en 0.

h. Comme $f'(x) = e^x \frac{e^x - 1}{x}$ alors :

$$f'(x) \underset{(0)}{=} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right) \underset{(0)}{=} 1 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{6}x^2 + o(x^2)$$

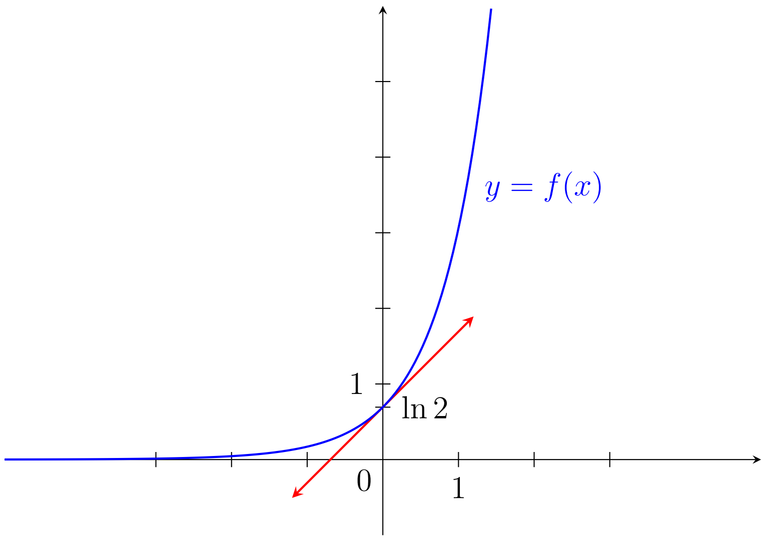
Par primitivation et comme $f(0) = \ln 2$ alors :

$$\boxed{f(x) \underset{(0)}{=} \ln 2 + x + \frac{3}{4}x^2 + \frac{7}{18}x^3 + o(x^3)}$$

i. L'encadrement (4) montre que f est supérieure à la fonction $x \mapsto e^x \ln 2$, donc la croissance de f est très rapide.

D'après la question précédente elle admet pour tangente en $x = 0$ la droite d'équation $y = \ln 2 + x$ et la courbe est au-dessus de cette tangente au voisinage de 0.

On obtient une courbe comme La suivante.



23 Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on pose : $\quad f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{x + t^4}$.

a. Justifier que la fonction f est bien définie et décroissante.

b. Déterminer sa limite en $+\infty$.

c. Démontrer que pour tout $(x, a) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$:

$$|f(x) - f(a)| \leqslant \frac{|x - a|}{xa}.$$

En déduire que f est continue.

d. Démontrer que f est dérivable et donner sa dérivée.

Indication : deviner quelle fonction g conviendrait pour f' et démontrer que f est dérivable de dérivée g.

a. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé posons $\varphi_x(t) = \frac{1}{x+t^4}$. Alors la fonction φ_x est définie sur le segment $[0, 1]$ et continue, donc $f(x)$ est définie.

Comme $f(x)$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ alors la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soit x et y deux réels tels que $0 < x \leqslant y$. Alors :

$$\forall t \in [0, 1] \qquad \frac{1}{x + t^4} \geqslant \frac{1}{y + t^4}$$

Par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{x + t^4} \geqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{y + t^4}$$

On a donc démontré que :

$$\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 \qquad x \leqslant y \quad \Longrightarrow \quad f(x) \geqslant f(y)$$

La fonction f est décroissante.

b. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Si $t \in [0,1]$ alors $x \leqslant x + t^4 \leqslant x+1$, donc :

$$\forall t \in [0,1] \qquad \frac{1}{x+1} \leqslant \frac{1}{x+t^4} \leqslant \frac{1}{x}$$

Par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{x+1} \leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{x+t^4} \leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{x}$$

Ceci donne :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \frac{1}{x+1} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x}$$

Par théorème d'encadrement : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

La fonction f tend vers 0 en $+\infty$, et on peut ajouter l'équivalence :

$$f(x) \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{1}{x}$$

c. Soit x et a deux réels strictement positifs. Alors par linéarité :

$$f(x) - f(a) = \int_0^1 \frac{1}{x+t^4} - \frac{1}{a+t^4}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{a-x}{(x+t^4)(a+t^4)}\,\mathrm{d}t \tag{6}$$

On écrit :

$$\forall t \in [0,1] \qquad \left|\frac{a-x}{(x+t^4)(a+t^4)}\right| = \frac{|a-x|}{(x+t^4)(a+t^4)} \leqslant \frac{|a-x|}{ax} = \frac{|x-a|}{ax}$$

Par inégalité triangulaire et croissance de l'intégrale :

$$|f(x) - f(a)| = \left|\int_0^1 \frac{a-x}{(x+t^4)(a+t^4)}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 \left|\frac{a-x}{(x+t^4)(a+t^4)}\right| \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \frac{|x-a|}{ax}\,\mathrm{d}t$$

On a bien justifié que :

$$\forall (x,a) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 \qquad |f(x) - f(a)| \leqslant \frac{|x-a|}{ax}$$

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ fixé. Comme a est non-nul alors :

$$\lim_{x \to a} \frac{|x-a|}{ax} = 0$$

Par théorème de comparaison :

$$\lim_{x \to a} |f(x) - f(a)| = 0 \qquad \text{et donc} \qquad \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Ceci montre que f est continue en a

Ainsi f est continue en tout point de $\mathbb{R}_+^*$ donc f est continue.

d. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On a alors, d'après l'égalité (6) de la question précédente :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{a\} \qquad \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{1}{x-a}\int_0^1 \frac{a-x}{(x+t^4)(a+t^4)}\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(x+t^4)(a+t^4)}$$

Attention : en vertu de l'exercice 2 ci-dessus on ne peut en déduire :

$$\lim_{x\to a}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(x+t^4)(a+t^4)} = \int_0^1 \left(\lim_{x\to a}\frac{1}{(x+t^4)(a+t^4)}\right)\mathrm{d}t$$

On doit donc démontrer que ceci est vrai.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ différent de a. On commence par écrire :

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(a+t^4)^2}\right| = \left|-\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(x+t^4)(a+t^4)} + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(a+t^4)^2}\right| \tag{7}$$

Par linéarité :

$$\left|-\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(x+t^4)(a+t^4)} + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(a+t^4)^2}\right| = \left|\int_0^1 \frac{(x-a)}{(x+t^4)(a+t^4)^2}\,\mathrm{d}t\right| \tag{8}$$

Par inégalité triangulaire :

$$\left|\int_0^1 \frac{(x-a)}{(x+t^4)(a+t^4)^2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 \left|\frac{(x-a)}{(x+t^4)(a+t^4)^2}\right|\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{|x-a|}{(x+t^4)(a+t^4)^2}\,\mathrm{d}t \tag{9}$$

Comme a et x sont strictement positifs :

$$\forall t \in [0,1] \qquad \frac{|x-a|}{(x+t^4)(a+t^4)^2} \leqslant \frac{|x-a|}{xa^2}$$

Par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{|x-a|}{(x+t^4)(a+t^4)^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \frac{|x-a|}{xa^2}\,\mathrm{d}t = \frac{|x-a|}{xa^2} \tag{10}$$

Les équations et inéquations (7) à (10) donnent par transitivité :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{a\} \qquad \left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(a+t^4)^2}\right| \leqslant \frac{|x-a|}{xa^2}$$

Comme $\lim_{x\to a} \frac{|x-a|}{xa^2} = 0$ alors :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(a+t^4)^2}$$

Ceci démontre que la fonction f est dérivable en a, de dérivée $f'(a) = -\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(a+t^4)^2}$.

Finalement la fonction f est dérivable, de dérivée :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad f'(x) = -\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(x+t^4)^2}$$