Lycée Bellevue – Toulouse **Année 2024-2025**
MPSI – Mathématiques

Feuille de T. D. C2
Dénombrement

Exercices de cours

1 Écrire toutes les permutations de $\{a, b\}$, puis de $\{a, b, c\}$, puis de $\{a, b, c, d\}$.

2 On jette trois dés. On note X la variable aléatoire égale à la somme des trois dés.

Calculer $P(X = k)$ pour $k = 2, 3, 4, 5, 6, 10$.

3 Soit $k \in \{0, \dots, 26\}$. On pioche k lettres une par une dans un sac contenant les 26 lettres de l'alphabet.

a. Décrire l'univers modélisant cette expérience. Quel est son cardinal ?

On note S_k l'événement : «le S apparaît lors de l'un des k tirages» et T_k l'événement «le S apparaît lors du k-ème tirage».

b. Calculer la probabilité de S_k.

c. Exprimer T_k en fonction de S_k et S_{k-1} et en déduire sa probabilité.

Variante :

d. Calculer directement la probabilité de T_k.

e. Exprimer S_k en fonction des T_i et en déduire sa probabilité.

4 Une urne contient une boule noire, deux boules rouges et sept boules blanches.

a. On pioche simultanément n boules de l'urne ($0 \leqslant n \leqslant 10$). Quelle est la probabilité d'obtenir la boule noire ? Au moins une rouge ?

b. On pioche n fois de suite une boule de l'urne ($n \in \mathbb{N}$) puis on la remet dans l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir la boule noire ? Au moins une rouge ?

5 Combien de mains au Poker contiennent un brelan, mais pas de full ? Combien contiennent deux paires ?

On rappelle que le Poker se joue avec un jeu de 52 cartes, réparties en 4 couleurs et 13 valeurs. Une paire est un ensemble de deux cartes de même valeur, un brelan est un ensemble de trois cartes de même valeur, un full est l'union d'un brelan et d'une paire.

6 On jette cinq dés. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de six obtenus.

a. Déterminer la loi de X.

b. Vérifier que l'on obtient bien une loi de probabilité de X.

Travaux dirigés

1 Par combien de zéros se termine 1000! ?

2 Un anagramme d'un mot M est une permutation des lettres de M, *i.e.,* un mot contenant les mêmes lettres que M.

Combien les mots bûche, tarte, galette et mille-feuilles ont-ils d'anagrammes ?

3 De combien de façons peut-on former deux équipes de 3 avec 6 personnes ?

Trois équipes de 3 avec 9 personnes ?

4 Un domino contient deux chiffres compris entre 0 et 6. Un jeu de dominos contient tous les dominos possibles, mais aucun en double.

a. Combien de dominos possède un jeu ?

b. Combien de paires de dominos ont au moins un numéro en commun ?

c. Combien de mains de sept dominos sont possibles au début du jeu ? Combien de ceux-ci contiennent au moins un double ?

5 Un tournoi de Tennis fait participer $2n$ joueurs, avec $n \geqslant 1$. On souhaite organiser n matchs où chaque joueur en rencontre un autre.

Soit a_n le nombre de possibilités d'organisation.

a. En isolant le joueur $2n$, justifier que $a_n = (2n - 1)a_{n-1}$ pour tout $n \geqslant 2$.

b. Calculer le terme général de a_n.

6 Soit E et F deux ensembles non-vides de cardinaux finis p et n. Calculer le nombre

a. d'applications de E dans F

b. de bijections de E dans F

c. d'injections de E dans F

d. de surjections de E dans F si $n = 1$ ou $n = 2$

e. de surjections de E dans F si $n = 3$.

7 Soit n et p deux entiers naturels.

a. Combien existe-t-il de p-listes $(x_1, \dots, x_p)$ d'entiers naturels tels que

$$0 \leqslant x_1 < x_2 < \cdots < x_p \leqslant n \,?$$

b. Combien existe-t-il de listes strictement croissantes d'entiers naturels inférieurs ou égaux à n ?

$\boxed{\textbf{8}}$ Soit n et p deux entiers naturels avec p non-nul. On note $C_{n,p}$ le nombre de p-listes d'entiers naturels $(x_1, \ldots, x_p)$ telles que $x_1 + \cdots + x_p = n$.

a. Calculer $C_{n,1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $C_{0,p}$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

b. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $p \geqslant 2$:

$$C_{n,p} = \sum_{k=0}^{n} C_{k,p-1}$$

c. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$:

$$C_{n+1,p+1} = C_{n,p+1} + C_{n+1,p}$$

d. Donner une formule générale exprimant $C_{n,p}$ comme coefficient du binôme.

Démontrer cette formule.

$\boxed{\textbf{9}}$ Une urne contient 8 boules bleues et 4 boules rouges.

a. On tire simultanément deux boules de l'urne. Quelle est la probabilité de tirer deux bleues ? Deux rouges ? Une boule de chaque couleur ?

b. On tire trois boules maintenant. Quelle est la probabilité de tirer trois boules bleues ? Trois boules rouges ? Au moins une boule bleue et une boule rouge ? Exactement une boule bleue ?

$\boxed{\textbf{10}}$ Soit a et n deux entiers tels que $0 \leqslant a \leqslant n$. Soit k un entier tel que $k \leqslant a$ et $k \leqslant n - a$.

a. Démontrer par dénombrement la formule :

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{a}{i}\binom{n-a}{k-i} = \binom{n}{k}.$$

On possède un sac avec n boules dont a sont blanches. On pioche simultanément k boules dans ce sac. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

b. Déterminer la loi de X. Retrouver ainsi la formule de la question précédente.

c. Calculer son espérance.

$\boxed{\textbf{11}}$ Combien faut-il piocher de cartes dans un jeu de 52 cartes pour avoir au moins une chance sur deux d'obtenir l'as de pique :

a. si on pioche les cartes successivement en les gardant ?

b. si on les pioche en les remettant après chaque tirage ?

$\boxed{\textbf{12}}$ On possède un jeu de $2n$ cartes ($n \geqslant 1$) composé de n paires d'animaux.

a. Quelle est la probabilité d'obtenir une paire si on pioche deux cartes dans ce jeu ?

b. Et si on en pioche trois (avec $n \geqslant 2$) ?

$\boxed{\textbf{13}}$ On pioche deux jetons au hasard dans un sac contenant 10 jetons numérotés de 1 à 10. Soit p la probabilité que la somme des deux numéros obtenus soit paire.

a. Calculer p si les deux tirages sont simultanés.

b. Calculer p si les deux tirages sont successifs avec remise entre les deux.

c. Répondre aux mêmes questions en supposant que le sac contient 11 jetons numérotés de 1 à 11.

$\boxed{\textbf{14}}$ Soit $k \in \{1, \ldots, 26\}$.

On pioche simultanément k lettres d'un sac contenant les 26 lettres de l'alphabet.

a. Calculer la probabilité que l'on obtienne le A, puis celle que l'on obtienne le B, et enfin celle que l'on obtienne le A et le B.

b. Les événements «obtenir le A» et «obtenir le B» sont-ils indépendants ?

c. Calculer la probabilité que l'on obtienne le B sachant que l'on a obtenu le A.

d. On suppose $k < 26$. Calculer la probabilité que l'on obtienne le B sachant que l'on n'a pas obtenu le A.

$\boxed{\textbf{15}}$ On possède un sac contenant n jetons numérotés de 1 à n (avec $n \geqslant 2$). On pioche un jeton, on note son numéro k, puis on le remet dans le sac. On pioche ensuite simultanément k jetons dans le sac.

a. Soit i un entier compris entre 1 et n. Quelle est la probabilité que le jeton numéro i soit obtenu au second tirage ?

b. Soit i et j deux entiers distincts compris entre 1 et n. Quelle est la probabilité que les jetons i et j soient présents parmi les jetons tirés au second tirage ?

$\boxed{\textbf{16}}$ Une urne contient 1 boule d'or, 2 boules d'argent et 7 boules de bronze, toutes indiscernables au toucher et à la pesée. On pioche ces dix boules une par une, sans les remettre. On souhaite calculer la probabilité de l'événement B : «la boule d'or arrive avant les boules d'argent».

a. Modéliser cette expérience par un univers Ω uniformément probabilisé. Donner son cardinal.

b. Soit k un entier tel que $1 \leqslant k \leqslant 10$. Calculer la probabilité de l'événement A_k : «la boule d'or est tirée au k-ème tirage».

c. Calculer les probabilités des événements $A_k \cap B$.

d. En déduire la probabilité de l'événement B.