Chapitre A12
Intégration

I. Continuité uniforme

Dans cette partie on note I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

Définition

La fonction f est *uniformément continue* si :

Rappel. La fonction f est continue si :

Exemple 1.

(i) La fonction carré n'est pas uniformément continue.

(ii) La fonction carré est uniformément continue sur $[0, 10]$.

(iii) La fonction racine carrée est uniformément continue.

Propositions

(i) Si f est lipschitzienne alors f est uniformément continue.

(ii) Si f est uniformément continue alors f est continue.

Les réciproques de ces implications sont fausses en général.

Démonstration.

(i)

La fonction racine carrée est uniformément continue alors qu'elle n'est pas lipschitzienne, donc la réciproque est fausse en général.

(ii) Cette propriété est immédiate.

La fonction carré est continue mais n'est pas uniformément continue, donc la réciproque est fausse en général. □

Théorème de Heine

Si une fonction est continue sur un segment alors elle est uniformément continue.

Démonstration.

II. Définition de l'intégrale

Dans toute cette partie, I désigne un segment $[a, b]$ avec $a < b$.

A. Fonctions en escalier

Définitions

- Une *subdivision* de I est une suite de réels $(x_0, \ldots, x_n)$ telle que :

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

- Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite *en escalier* s'il existe une subdivision $(x_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ de I telle que f est constante sur chaque intervalle $]x_{k-1}, x_k[$.
  Cette subdivision est alors dite *adaptée* à la fonction f.

Exemple. La fonction partie entière $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est en escalier sur tout segment.

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction en escalier. Soit $(x_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ une subdivision de I adaptée à f, et y_k la valeur de f sur l'intervalle $]x_{k-1}, x_k[$, pour tout $k = 1 \ldots n$.

On appelle *intégrale* de f sur I et on note $\displaystyle\int_I f$ le réel :

Remarque. L'intégrale de f ne dépend pas de la subdivision choisie.

Elle ne dépend pas non plus des valeurs de f aux points de cette subdivision.

Proposition

Soit f et g deux fonctions en escalier. Alors il existe une subdivision de I adaptée à f et à g.

Démonstration. Soit $(x_0, \ldots, x_n)$ une subdivision adaptée à f et $(y_0, \ldots, y_m)$ une subdivision adaptée à g. L'ensemble $\{x_0, \ldots, x_n\} \cup \{y_0, \ldots, y_m\}$ contient un certain nombre de réels distincts que l'on note $z_0, \ldots, z_p$ avec $z_0 < z_1 < \cdots < z_p$.

La subdivision $(z_0, \ldots, z_p)$ est adaptée à f et à g car elle contient tous les x_i et les y_j. $\square$

Proposition

- Les combinaisons linéaires de fonctions en escalier sur I sont en escalier.
- Le produit d'un nombre fini de fonctions en escalier sur I est en escalier.

Démonstration. En effet, si $f_1, \ldots, f_n$ sont des fonctions en escalier alors il existe une subdivision de I adaptée à toutes les f_i. $\square$

Lemme - Croissance de l'intégrale des fonctions en escalier

Soit f et g deux fonctions en escalier. Si $f \leqslant g$ alors $\displaystyle\int_I f \leqslant \int_I g$.

Démonstration. Soit $(x_0, \ldots, x_n)$ une subdivision adaptée à f et à g. Pour tout $k = 1, \ldots, n$, soit y_k et z_k les valeurs respectives de f et de g sur l'intervalle $]x_{k-1}, x_k[$.

Si l'inégalité $f \leqslant g$ a lieu alors : $\quad \forall k = 1, \ldots, n \quad y_k \leqslant z_k$

Dans ce cas, comme les $x_k - x_{k-1}$ sont tous positifs on en déduit par somme :

$$\sum_{k=1}^{n} y_k(x_k - x_{k-1}) \leqslant \sum_{k=1}^{n} z_k(x_k - x_{k-1})$$

Ceci donne exactement $\displaystyle\int_I f \leqslant \int_I g$. $\square$

Lemme - Linéarité de l'intégrale des fonctions en escalier

Soit f et g deux fonctions en escalier et λ un réel. Alors : $\displaystyle\int_I (\lambda f + g) = \lambda \int_I f + \int_I g$

Démonstration. C'est une conséquence de la linéarité de la somme.

On choisit une subdivision $(x_0, \ldots, x_n)$ adaptée à f et à g, et on note y_k et z_k les valeurs respectives de f et de g sur l'intervalle $]x_{k-1}, x_k[$.

Alors la fonction $\lambda f + g$ est en escalier, de valeur $(\lambda y_k + z_k)$ sur chaque intervalle $]x_{k-1}, x_k[$, donc :

$$\int_I (\lambda f + g) = \sum_{k=1}^{n} (\lambda y_k + z_k)(x_k - x_{k-1})$$

Par linéarité de la somme :

$$\int_I (\lambda f + g) = \lambda \sum_{k=1}^{n} y_k(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n} z_k(x_k - x_{k-1}) = \lambda \int_I f + \int_I g$$

L'intégration des fonctions en escalier est donc linéaire. $\square$

B. Fonctions continues par morceaux

Définition

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite *continue par morceaux* sur le segment I s'il existe une subdivision $(x_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ de I telle que :

- f est continue sur chaque intervalle $]x_{k-1}, x_k[$.
- f admet une limite finie à gauche et à droite en chaque point $x_1, \dots, x_n$.

Définition (suite)

Si I est un intervalle quelconque, on dit que f est continue par morceaux sur I si elle est continue par morceaux sur tout segment inclus dans I.

Notation

On note $\mathscr{C}_m(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ continues par morceaux.

Remarque. Une fonction continue est continue par morceaux : $\mathscr{C}^0(I, \mathbb{R}) \subseteq \mathscr{C}_m(I, \mathbb{R})$

Propositions

(i) Un fonction continue par morceaux sur un segment est bornée.

(ii) La somme et le produit de fonctions continues par morceaux sont continues par morceaux.

On en déduit que $\mathscr{C}_m(I, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel et un anneau.

Démonstration.

(i) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux sur le segment I, et $(x_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ une subdivision de I adaptée à f. Pour tout $k = 1, \dots, n$ on note f_k la restriction de f à l'intervalle $]x_{k-1}, x_k[$.

Comme f_k admet des limites finies en x_{k-1} et en x_k alors elle est prolongeable par continuité sur le segment $[x_{k-1}, x_k]$. On note $\bar{f}_k$ le prolongement par continuité obtenu.

Une fonction continue sur un segment est bornée, donc $\bar{f}_k$ est bornée. Par restriction f_k est bornée. Ceci montre que f est bornée sur $\bigcup_{k=1}^{n}]x_{k-1}, x_k[$.

Comme les valeurs de f aux points $x_0, \dots, x_n$ sont en nombre fini elles sont bornées, et donc finalement f est bornée sur I.

(ii) Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux, alors il existe une subdivision adaptée aux deux fonctions. Sur chaque intervalle $]x_{k-1}, x_k[$ de cette subdivision les fonctions $f+g$ et fg sont continues. Par somme et produit de limites elles admettent des limites finies à gauche et à droite aux bornes de ces intervalles.

Donc elles sont continues par morceaux.

De plus, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ la fonction λf est continue par morceaux, car la fonction $g : x \mapsto \lambda$ est continue par morceaux. $\square$

Théorème - Approximation par une fonction en escalier

Soit f une fonction continue par morceaux sur un segment I et ε un réel strictement positif.
Alors il existe deux fonctions f_1 et f_2 en escalier sur I telles que :

$$\forall x \in I \qquad f(x) - \varepsilon \leqslant f_1(x) \leqslant f(x) \leqslant f_2(x) \leqslant f(x) + \varepsilon$$

Démonstration. On démontre qu'il existe une fonction en escalier f_1 comprise entre $f - \varepsilon$ et f, puis on pose $f_2 = f_1 + \varepsilon$.

On commence par supposer que f est continue.

Alors f est continue sur le segment I donc d'après le théorème de Heine elle est uniformément continue. Comme $\varepsilon > 0$ on en déduit :

$$\exists \eta > 0 \qquad \forall (x,y) \in I^2 \qquad |x-y| \leqslant \eta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon \tag{1}$$

On note $I = [a,b]$ avec $a < b$. On crée une subdivision de ce segment de pas h plus petit que η. Pour ceci on pose $n = \left\lceil \frac{b-a}{\eta} \right\rceil$, puis :

$$\forall k = 0, \dots, n \qquad x_k = a + kh \qquad \text{avec} \qquad h = \frac{b-a}{n}$$

Comme $n \geqslant \frac{b-a}{\eta}$ alors $h \leqslant \eta$, et $x_0 = a$, $x_n = b$.

Pour tout $k = 0, \dots, n-1$, soit $y_k = \operatorname*{Inf}_{x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}} f(x)$.

On définit la fonction en escalier f_1 par :

$$\forall k = 0, \dots, n \qquad \forall x \in [x_k, x_{k+1}[\qquad f_1(x) = y_k$$

Cette fonction est bien en escalier, et par définition des y_k :

$$\forall k = 0, \dots, n \qquad \forall x \in [x_k, x_{k+1}[\qquad f_1(x) \leqslant f(x)$$

Ceci montre que $f_1 \leqslant f$. Démontrons que : $\forall x \in I \quad f(x) - \varepsilon \leqslant f_1(x)$

Pour ceci on fixe un élément x de I. Alors il existe $k \in \{0, \dots, n\}$ tel que $x \in [x_k, x_{k+1}[$ (il suffit de poser $k = \left\lfloor \frac{x-a}{h} \right\rfloor$). Donc $f_1(x) = y_k$ par définition de f_1.

On a supposé que f est continue, et y_k est la borne inférieure de f sur le segment $[x_k, x_{k+1}]$, donc elle est atteinte : il existe $x'_k \in [x_k, x_{k+1}]$ tel que $f(x'_k) = y_k$.

Les points x et x'_k appartiennent au segment $[x_k, x_{k+1}]$, lequel est de largeur h, donc $|x - x'_k| \leqslant h \leqslant \eta$. D'après l'assertion (1) ceci implique que $|f(x) - f(x'_k)| \leqslant \varepsilon$ donc $|f(x) - y_k| \leqslant \varepsilon$ puis $|f(x) - f_1(x)| \leqslant \varepsilon$.

Ceci montre que $f(x) - f_1(x) \leqslant \varepsilon$, donc $f(x) - \varepsilon \leqslant f_1(x)$.

Finalement pour tout $x \in I$ on a $f(x) - \varepsilon \leqslant f_1(x) \leqslant f(x)$, donc le résultat est démontré dans le cas où la fonction f est continue.

Supposons maintenant que f est continue par morceaux.

Soit $(x_0, \ldots, x_n)$ une subdivision adaptée à f. Sur chaque intervalle $]x_{k-1}, x_k[$ la fonction f est continue donc il existe une fonction en escalier $f_{1,k}$ telle que $f - \varepsilon \leqslant f_{1,k} \leqslant f$ sur $]x_{k-1}, x_k[$.

On définit alors la fonction f_1 par :

$$\forall k = 1, \ldots, n \qquad f_{1|]x_{k-1}, x_k[} = f_{1,k} \qquad \text{et} \qquad \forall k = 0, \ldots, n \qquad f_1(x_k) = f(x_k)$$

Alors la fonction f_1 est en escalier et elle vérifie $f - \varepsilon \leqslant f_1 \leqslant f$. □

C. Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

Théorème

(Bernhard Riemann, Allemagne, 1826 – 1866) Soit f une fonction continue par morceaux sur un segment $I = [a, b]$. On note :
- $\mathscr{E}_1$ l'ensemble des fonctions en escalier sur I inférieures à f
- $\mathscr{E}_2$ l'ensemble des fonctions en escalier sur I supérieures à f.

Alors l'ensemble
$$\left\{ \int_I f_1 \;\middle|\; f_1 \in \mathscr{E}_1 \right\}$$
admet une borne supérieure, l'ensemble
$$\left\{ \int_I f_2 \;\middle|\; f_2 \in \mathscr{E}_2 \right\}$$
admet une borne inférieure, et ces deux bornes sont égales.

Définition

On appelle *intégrale* de f sur I la borne commune définie par le théorème.

Notations

L'intégrale de f sur I est notée :

Démonstration. On note :

$$I_1 = \operatorname{Sup}\left\{\int_I f_1 \;\middle|\; f_1 \in \mathscr{E}_1\right\} \qquad I_2 = \operatorname{Inf}\left\{\int_I f_2 \;\middle|\; f_2 \in \mathscr{E}_2\right\}$$

1. I_1 et I_2 sont bien définies.

Comme la fonction f est continue par morceaux sur le segment I alors elle est bornée.

On note m et M ses bornes : $f(I) \subseteq [m, M]$.

La fonction constante égale m est en escalier, inférieure à f. La fonction constante égale à M est en escalier, supérieure à f. Ceci montre que $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$ ne sont pas vides.

De plus, si f_1 est une fonction de $\mathscr{E}_1$, alors $f_1 \leqslant f \leqslant M$, donc $\displaystyle\int_I f_1 \leqslant \int_I M$ d'après le lemme de croissance de l'intégrale des fonctions en escalier.

L'ensemble des intégrales des éléments de $\mathscr{E}_1$ est donc majoré par $\displaystyle\int_I M$. Il est non-vide donc d'après la propriété de la borne supérieure il admet une borne supérieure, que l'on note I_1.

De même l'ensemble des intégrales des éléments de $\mathscr{E}_2$ est minoré par $\displaystyle\int_I m$, non-vide, donc il admet une borne inférieure, que l'on note I_2.

2. $I_1 \leqslant I_2$

Si $f_1 \in \mathscr{E}_1$ et $f_2 \in \mathscr{E}_2$ alors $f_1 \leqslant f \leqslant f_2$, donc $\displaystyle\int_I f_1 \leqslant \int_I f_2$ d'après le lemme de croissance de l'intégrale des fonctions en escalier.

La fonction f_2 est un majorant de l'ensemble des $\displaystyle\int_I f_1$ pour $f_1 \in \mathscr{E}_1$, donc $I_1 \leqslant \displaystyle\int_I f_2$.

Ainsi I_1 est un minorant de l'ensemble des $\displaystyle\int_I f_2$ pour $f_2 \in \mathscr{E}_2$, donc $I_1 \leqslant I_2$.

3. $\forall \varepsilon > 0 \quad I_2 - I_1 \leqslant \varepsilon$

Soit $\varepsilon > 0$. Alors $\frac{\varepsilon}{2(b-a)} > 0$. D'après le théorème d'approximation par une fonction en escalier il existe $f_1 \in \mathscr{E}_1$ et $f_2 \in \mathscr{E}_2$ telles que :

$$f - \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \leqslant f_1 \leqslant f \leqslant f_2 \leqslant f + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

Ceci donne :

$$0 \leqslant f_2 - f_1 \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Par les lemmes de croissance et de linéarité :

$$0 \leqslant \int_I f_2 - \int_I f_1 \leqslant \int_I \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon$$

On sait que $\displaystyle\int_I f_1 \leqslant I_1$ et $\displaystyle\int_I f_2 \geqslant I_2$, donc $\displaystyle\int_I f_2 - \int_I f_1 \geqslant I_2 - I_1$, ce qui donne $I_2 - I_1 \leqslant \varepsilon$.

Finalement les deux bornes I_1 et I_2 sont bien définies et vérifient :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad 0 \leqslant I_2 - I_1 \leqslant \varepsilon$$

Elles sont donc égales : $I_1 = I_2$. □

III. Propriétés

A. Linéarité

Proposition - Linéarité de l'intégrale

Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur un segment $I = [a, b]$, et λ, μ deux réels. Alors :

$$\int_a^b \lambda f(t) + \mu g(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque. En d'autres termes l'application $\begin{array}{ccc} \mathscr{C}_m(I) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_I f \end{array}$ est linéaire.

Lemme

Soit f une fonction continue par morceaux sur un segment I. Soit $\mathscr{E}_1$ l'ensemble des fonctions en escalier inférieures à f.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions de $\mathscr{E}_1$ telles que : $\underset{x\in I}{\operatorname{Sup}}\,(f(x) - f_n(x)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Alors : $\displaystyle\int_I f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f$.

<u>Démonstration</u>. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $\varepsilon_n = \underset{x\in I}{\operatorname{Sup}}\,(f(x) - f_n(x))$. Alors la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \forall x \in I \qquad f_n(x) \leqslant f(x) \leqslant f_n(x) + \varepsilon_n$$

La fonction f_n est en escalier, et la fonction $x \mapsto \varepsilon_n$ est constante donc en escalier. Ainsi la fonction $f_n + \varepsilon_n$ est en escalier.

Par définition de l'intégrale, comme f_n est une fonction en escalier inférieure à f et $f_n+\varepsilon_n$ est une fonction en escalier supérieure à f alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \int_I f_n \leqslant \int_I f \leqslant \int_I (f_n + \varepsilon_n)$$

La fonction $f_n + \varepsilon_n$ est en escalier donc on peut appliquer le lemme de linéarité pour l'intégrale des fonctions en escalier :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \int_I (f_n + \varepsilon_n) = \int_I f_n + \int_I \varepsilon_n = \int_I f_n + (b-a)\varepsilon_n$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \int_I f - (b-a)\varepsilon_n \leqslant \int_I f_n \leqslant \int_I f$$

Par hypothèse la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0, donc par théorème d'encadrement :

$$\int_I f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f \qquad \square$$

Démonstration de la linéarité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $\frac{1}{2n} > 0$ donc d'après le théorème d'approximation par des fonctions en escalier il existe deux fonctions en escalier f_n et g_n telles que :

$$f - \frac{1}{2n} \leqslant f_n \leqslant f \qquad \text{et} \qquad g - \frac{1}{2n} \leqslant g_n \leqslant g$$

Par somme :

$$f + g - \frac{1}{n} \leqslant f_n + g_n \leqslant f + g$$

On déduit de ces trois encadrements :

$$0 \leqslant f - f_n \leqslant \frac{1}{2n} \qquad 0 \leqslant g - g_n \leqslant \frac{1}{2n} \qquad 0 \leqslant (f+g) - (f_n - g_n) \leqslant \frac{1}{n}$$

En d'autres termes :

$$0 \leqslant \operatorname*{Sup}_I (f - f_n) \leqslant \frac{1}{2n} \qquad 0 \leqslant \operatorname*{Sup}_I (g - g_n) \leqslant \frac{1}{2n} \qquad 0 \leqslant \operatorname*{Sup}_I (f + g - (f_n + g_n)) \leqslant \frac{1}{n}$$

Ceci est valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ donc par théorème d'encadrement on obtient :

$$\operatorname*{Sup}_I (f - f_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \operatorname*{Sup}_I (g - g_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \operatorname*{Sup}_I (f + g - (f_n + g_n)) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

D'après le lemme précédent ceci implique :

$$\int_I f_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_I f \qquad \int_I g_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_I g \qquad \int_I (f_n + g_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_I (f+g)$$

Les fonctions $f_n + g_n$ sont en escalier donc on peut appliquer le lemme de linéarité pour l'intégrale des fonctions en escalier :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \int_I (f_n + g_n) = \int_I f_n + \int_I g_n$$

Par unicité de la limite :

$$\int_I (f+g) = \int_I f + \int_I g$$

On démontre de même que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\int_I (\lambda f) = \lambda \int_I f$

En effet ce résultat est évident si $\lambda = 0$, et sinon on choisit une suite de fonctions en escalier $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad f_n \leqslant f \leqslant f_n + \frac{1}{|\lambda| n}$$

Grâce au lemme on obtient $\displaystyle\int_I f_n \to \int_I f$ et $\displaystyle\int_I \lambda f_n \to \int_I \lambda f$.

Par linéarité de l'intégrale des fonctions en escalier $\displaystyle\int_I \lambda f_n = \lambda \int_I f_n$, puis par unicité de la limite $\displaystyle\int_I \lambda f = \lambda \int_I f$. □

B. Inégalités

Proposition - Croissance de l'intégrale

Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur un segment $I = [a, b]$.

$$\text{Si} \qquad \forall t \in [a,b] \quad f(t) \leqslant g(t) \qquad \text{alors} \qquad \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarque. En d'autres termes l'application $\begin{array}{rcl} \mathscr{C}_m(I) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_I f \end{array}$ est croissante.

Démonstration. Si $f \leqslant g$ alors $0 \leqslant g - f$.

La fonction nulle est en escalier donc par définition de l'intégrale : $\displaystyle\int_I 0 \leqslant \int_I (g - f)$

Par linéarité on en déduit : $\displaystyle\int_I f \leqslant \int_I g$ □

Théorème - Positivité

Si f est continue et positive sur un segment $[a, b]$, alors :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad f = 0$$

Corollaire

L'intégrale d'une fonction continue de signe constant est nulle si et seulement si la fonction est nulle.

Contre-exemples.

▷ **Exercice 1.**

Démonstration.

Proposition - Inégalité triangulaire

Soit f une fonction continue par morceaux sur un segment $[a, b]$. Alors :

Démonstration.

▷ **Exercice 2.**

C. Inversion des bornes

Définition

Si $a > b$ alors on note :
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t$$

Proposition - Relation de Chasles

Si a, b, c sont trois points quelconques d'un intervalle I et f est une fonction continue par morceaux sur I alors :
$$\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration. Le cas où $a \leqslant b \leqslant c$ est admis. Les autres cas s'en déduisent. □

Remarque. La croissance de l'intégrale et l'inégalité triangulaire ne sont valables que si $a \leqslant b$.

Méthode

- Pour justifier qu'une intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est bien définie :

  Vérifier que f est continue par morceaux sur le segment $[a, b]$ ou $[b, a]$.
- Pour déterminer l'ensemble de définition d'une fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$:

  Déterminer le plus grand intervalle contenant a sur lequel f est définie.

Exemple. Soit $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$ et $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\cos t}$.

Quel est l'ensemble de définition de f ? Et celui de F ?

D. Parité, périodicité

Proposition

Soit a un réel strictement positif et f une fonction continue par morceaux sur $[-a, a]$.

- Si f est impaire alors : $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$
- Si f est paire alors : $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$

▷ **Exercice 3.**

Proposition

Soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et T-périodique ($T > 0$). Alors :

$$\forall a \in \mathbb{R} \qquad \int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$$

▷ **Exercice 4.**

IV. Sommes de Riemann

A. Méthode des rectangles

Définition

Soit f une fonction continue par morceaux sur un segment $I = [a, b]$, et n un entier strictement positif. Pour tout $k = 0, \dots, n$ on pose :

$$x_k = a + k\frac{b-a}{n}$$

Ainsi la suite $(x_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une subdivision de I à pas constant. Les *sommes de Riemann* de la méthode des rectangles sont les réels :

$$R_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \qquad \text{et} \qquad S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

Théorème

Si f est continue par morceaux sur $[a, b]$ alors les suites $(R_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

<u>Démonstration</u>. La convergence de (S_n) se déduit de celle de (R_n), puisque :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad S_n = R_n + \frac{b-a}{n}\big(f(b) - f(a)\big)$$

On se contente donc de démontrer la convergence de (R_n).

On ajoute cependant une hypothèse : on suppose que f est lipschitzienne.

(Voir démonstration à part) □

Remarque. De plus si f est lipschitzienne alors la convergence est en $O(\frac{1}{n})$:

$$\left(R_n - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right) = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

▷ **Exercice 5.**

Exemple 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ soit $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$. Démontrer que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Méthode

S'il est possible d'écrire une suite (u_n) sous la forme

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \qquad \text{ou} \qquad u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

avec $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux, alors u_n converge vers $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

▷ **Exercice 6.**

B. Méthode des trapèzes

Définition

Les sommes de Riemann de la méthode des trapèzes sont définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad T_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2}$$

Remarque. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $T_n = \dfrac{R_n + S_n}{2}$

En conséquence, la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge également vers $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ si f est continue par morceaux.

On peut démontrer que si f est de classe $\mathscr{C}^2$ alors la convergence est en $O(\frac{1}{n^2})$:

$$\left(T_n - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

V. Théorèmes

A. Théorème fondamental

Théorème Fondamental

(Isaac Newton, Grande-Bretagne, 1642 – 1727 et Gottfried Leibniz, Allemagne, 1646 – 1716)
Soit I un intervalle non-vide, a un point de I, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Alors la fonction $\begin{array}{rcl} \Phi : I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$ est une primitive de f.

Définition

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$. On appelle *valeur moyenne* de f le réel :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Proposition

Une fonction continue atteint sa moyenne.
En d'autres termes, si f est continue sur $[a, b]$ alors il existe $c \in [a, b]$ tel que :

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration. La fonction f est continue sur le segment $[a, b]$ donc par théorème son image est un segment. On note $[m, M]$ celui-ci, ce qui donne :

$$\forall t \in [a, b] \qquad m \leqslant f(t) \leqslant M$$

Par croissance de l'intégrale :

$$\int_a^b m \,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b M \,\mathrm{d}t$$

En divisant par $(b - a)$ on en déduit que $m \leqslant \mu \leqslant M$, *i.e.*, μ est dans le segment $[m, M]$. Comme $[m, M] = f([a, b])$ alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \mu$. □

Démonstration du théorème fondamental. (Voir feuille à part) □

Corollaire 1

Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive.

Démonstration. En effet, si une fonction f est continue sur un intervalle I alors il suffit de choisir un point a de I.

Alors la fonction $\begin{array}{rccl} F: & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$ est une primitive de f.

Corollaire 2

Soit I un intervalle non-vide, a un point de I, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On note pour tout $x \in I$: $\Phi(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$

- Φ est l'unique primitive de la fonction f qui s'annule en a.
- Soit b un autre point de I, et F une primitive de f. Alors :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

Démonstration.

Exemple 3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose : $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$

a. Justifier que f est bien définie et impaire.

b. Démontrer que f est dérivable et donner sa dérivée.

c. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$, donner son développement limité en 0 à l'ordre 3.

d. *(i)* Démontrer que : $\forall t \in [1, +\infty[\quad e^{-t^2/2} \leqslant e^{-t/2}$

(ii) En déduire une majoration de f sur cet intervalle.

(iii) Démontrer que f admet une limite finie en $+\infty$.

e. Tracer la courbe de f.

Exemple 4. Soit $I =]1, +\infty[$. Pour tout $x \in I$ on pose : $\Phi(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$

a. Justifier que la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ admet une primitive sur I.

b. Justifier que Φ est bien définie sur I.

c. Justifier que Φ est dérivable sur I et donner sa dérivée.

Méthode

Étude d'une fonction de la forme $\Phi : x \mapsto \displaystyle\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Justifier que f admet une primitive F. Alors $\Phi(x) = F(b(x)) - F(a(x))$.

Si a et b sont dérivables alors par composition et somme Φ est dérivable.

▷ **Exercices 7, 8.**

B. Formules de Taylor

Théorème - Formule de Taylor avec reste intégral

(Brook Taylor, Grande-Bretagne, 1685 – 1731) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, n un entier naturel, a un point de I, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$. Alors :

Exemple 5. Cas particuliers où $n = 0$ et $n = 1$.

Remarque. La formule de Taylor avec reste intégral est vraie pour tout $x \in I$, alors que la formule de Taylor-Young donne un développement limité, qui décrit le comportement de la fonction au voisinage de $x = a$.

Démonstration. (Voir feuille à part) □

Théorème - Inégalité de Taylor-Lagrange

(Joseph Louis Lagrange, France, 1736-1813) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, n un entier naturel, a un point de I, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$. Soit M un majorant de $\left|f^{(n+1)}\right|$. Alors :

Démonstration. (Voir feuille à part) □

Exemple 6.

- Cas $n = 0$. Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ et f' est majorée par M alors :

$$\forall x \in I \qquad |f(x) - f(a)| \leqslant M|x - a|$$

  Il s'agit de l'inégalité des accroissements finis.
- Cas $n = 1$. Si f est de classe $\mathscr{C}^2$ et f'' est majorée par M alors :

$$\forall x \in I \qquad |f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)| \leqslant M\frac{(x - a)^2}{2}$$

  La distance entre la courbe de f et sa tangente en a est majorée par un terme du second degré.

▷ **Exercice 9.**

VI. Intégrales des fonctions complexes

Définition

Soit $I = [a, b]$ un segment, et $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux.
On définit l'intégrale de f par :

$$\int_a^b f = \int_a^b \mathrm{Re}(f) + i\int_a^b \mathrm{Im}(f)$$

▷ **Exercices 10, 11.**

Remarque. La linéarité, la relation de Chasles, l'intégration par parties, le théorème de changement de variable, les formules de Taylor sont valides pour les fonctions complexes. La croissance n'est plus valide.

Proposition - Inégalité triangulaire

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ continue par morceaux. Alors l'intégrale de son module est inférieure au module de son intégrale :

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

Démonstration. Soit $r = \left|\int_a^b f\right|$ et θ un argument de $\int_a^b f$, si bien que $\int_a^b f = re^{i\theta}$.

Soit $g(t) = e^{-i\theta} f(t)$. Par linéarité :

$$\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = e^{-i\theta}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = r$$

Or

$$\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \mathrm{Re}(g(t))\,\mathrm{d}t + i\int_a^b \mathrm{Im}(g(t))\,\mathrm{d}t$$

donc

$$\int_a^b \mathrm{Im}(g(t))\,\mathrm{d}t = 0 \qquad \text{et} \qquad r = \int_a^b \mathrm{Re}(g(t))\,\mathrm{d}t \geqslant 0$$

Puisque $|\mathrm{Re}(g)| \leqslant |g|$ alors par inégalité triangulaire et croissance pour les fonctions réelles :

$$r = \left|\int_a^b \mathrm{Re}(g)\right| \leqslant \int_a^b |\mathrm{Re}(g)| \leqslant \int_a^b |g| = \int_a^b |f|$$

Ceci donne l'inégalité recherchée. □

Remarque. Dans le cas où f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$ alors l'inégalité triangulaire implique l'inégalité des accroissements finis pour les fonctions complexes : si $|f'| \leqslant M$ sur $[a, b]$ alors :

$$|f(b) - f(a)| \leqslant M(b - a)$$