

TD. A12
Intégration

Exercices de cours

- ① Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que :

$$\int_0^1 f = \int_0^1 f^2 = 1.$$

Démontrer que f est constante égale à 1.

- ② Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note :

$$I_n = \int_0^\pi \frac{t^n}{n!} \cos t \, dt.$$

Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad |I_n| \leq \frac{\pi^{n+1}}{(n+1)!}$.

En déduire la limite de la suite (I_n) .

- ③ Soit a un réel strictement positif et f une fonction continue par morceaux sur $[-a, a]$. Démontrer que :

a. Si f est impaire alors : $\int_{-a}^a f(t) \, dt = 0$

b. Si f est paire alors : $\int_{-a}^a f(t) \, dt = 2 \int_0^a f(t) \, dt$.

Utiliser le changement de variable $u = -t$.

- ④ Soit f une fonction continue par morceaux sur \mathbb{R} et T -périodique ($T > 0$). Démontrer que :

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \int_a^{a+T} f(t) \, dt = \int_0^T f(t) \, dt.$$

- ⑤ En utilisant les sommes de Riemann, calculer :

$$I_1 = \int_1^3 t^2 \, dt \quad I_2 = \int_0^1 e^t \, dt.$$

- ⑥ Calculer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k^2}$.

- ⑦ Soit $I =]1, +\infty[$ et :

$$\forall x \in I \quad \Phi(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} \, dt.$$

a. Calculer $A(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln t}$.

b. Démontrer que pour tout $x \in I$:

$$xA(x) \leq \Phi(x) \leq x^2A(x).$$

c. Justifier que Φ peut être prolongée par continuité à l'intervalle $\bar{I} = [1, +\infty[$, et que ce prolongement est de classe \mathcal{C}^1 .

d. Calculer un développement limité de $\Phi(x)$ en $x = 1$ à l'ordre 3.

- ⑧ Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

$$f_1(x) = \int_2^{2x} \ln t \, dt \quad f_2(x) = \int_1^{\sqrt{x}} e^{-t^2} \, dt$$

$$f_3(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} \, dt \quad f_4(x) = \int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{\sqrt{x}} \frac{t \, dt}{1+t^4}.$$

- ⑨ Exprimer l'inégalité Taylor-Lagrange pour la fonction exponentielle avec $a = 0$, $x = 1$, à un ordre n quelconque. En déduire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) = e.$$

- ⑩ Calculer de deux façons différentes :

$$I = \int_0^\pi e^{it} \, dt.$$

- ⑪ Calculer : $I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{t+i} \, dt$.

Travaux dirigés

- ① Calculer les intégrales suivantes.

$$I_1 = \int_0^1 t^2(t^3+1)^5 \, dt \quad I_2 = \int_1^{1000} \frac{dt}{2\sqrt[3]{t}-1}$$

$$I_3 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x + \tan x} \quad F(x) = \int_0^x t^3 e^{-t^2} \, dt$$

$$I_5 = \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\frac{3}{2}} \, dt \quad I_6 = \int_1^{e^\pi} \sin(\ln t) \, dt$$

- ② Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ calculer :

$$F(x) = \int_0^x [t] \, dt.$$

Démontrer que la fonction F est continue.

- ③ Calculer les intégrales suivantes ($n \in \mathbb{N}$) :

$$I_1 = \int_0^1 \text{Min}(2, e^t) \, dt \quad I_2 = \int_0^n e^{\lfloor x \rfloor} \, dx$$

$$I_3 = \int_0^1 |3u-1| \, du \quad I_4 = \int_0^{n\pi} |\cos t| \, dt$$

- ④ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on définit la fonction :

$$f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} n^2 & \text{si } \frac{1}{n+1} < t \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(t) \, dt$ et $\int_0^1 \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) \right) dt$.

5 Démontrer que les suites suivantes convergent et déterminer leurs limites.

a. $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2}$ b. $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{5n - 2k}$
 c. $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n^3 k^2}{n^6 + k^6}$ d. $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 3nk}}$
 e. $u_n = \frac{1}{n} (\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{4} + \dots + \sqrt[n]{2^n})$
 f. $u_n = n \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2}$ g. $u_n = \prod_{k=1}^n \sqrt[2n]{1 + \frac{k}{n}}$.

6 Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\int_0^1 f = \frac{1}{2}$.

Démontrer que f admet un point fixe.

7 Soit f, g deux fonctions continues de $[a, b]$ dans \mathbb{R} , avec g positive. Démontrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que :

$$\int_a^b f(t)g(t) dt = f(c) \int_a^b g(t) dt.$$

8 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que :

$$\int_a^b f^2 = \int_a^b f^3 = \int_a^b f^4.$$

Démontrer que f est constante égale à 0 ou à 1.

9 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b t f(t) dt = 0$$

Démontrer que f s'annule au moins deux fois.

10 Soit $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ convexe et de classe \mathcal{C}^2 .

Démontrer que : $\int_0^{2\pi} f(t) \cos t dt \geq 0$.

11 Soit f l'application définie par :

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (a, b) \mapsto \int_0^1 \frac{ax + b}{(x+1)(x-2)} dx.$$

- Démontrer que f est linéaire.
- On pose $u_1 = (1, 1)$ et $u_2 = (1, -2)$. Démontrer que la famille (u_1, u_2) est une base de \mathbb{R}^2 . Donner les coordonnées d'un vecteur quelconque $u = (a, b)$ dans cette base.
- Calculer $f(u_1)$ et $f(u_2)$.
- Expliciter $f(a, b)$ pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

12 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note :

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2} dt.$$

a. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{2n+1}.$$

En déduire que la suite (I_n) converge.

b. Calculer $I_n + I_{n+1}$.

c. Déterminer la limite de la suite :

$$u_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}.$$

13 Intégrales de Wallis

Pour tout entier positif n on pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt.$$

- Calculer I_0 et I_1 .
- Démontrer que la suite (I_n) est convergente.
- À l'aide d'une intégration par parties démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad (n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$.
- Démontrer que la suite $((n+1)I_n I_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est constante et donner sa valeur.
- En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Justifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n.$$

En déduire que les suites $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(I_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont équivalentes.

g. Démontrer que : $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

14 Démontrer que : $\int_0^\pi \frac{\sin t}{n+t} dt \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{2}{n}$

15 Lemme de Lebesgue v1

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 .

Démontrer que :

$$\int_a^b f(t) \sin(nt) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

16 Lemme de Lebesgue v2

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Démontrer que :

$$\int_a^b f(t) \sin(nt) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

- Si f est constante.
- Si f est en escalier.
- Si f est continue par morceaux.

17 Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et : $\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n = \sum_{k=1}^n k^\alpha$.

a. Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$k^\alpha \leq \int_k^{k+1} t^\alpha dt \leq (k+1)^\alpha.$$

- En déduire un encadrement de S_n par deux intégrales, puis démontrer que $S_n \sim \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.
- Retrouver ce résultat grâce aux sommes de Riemann.

18 Pour m et n entiers positifs on pose :

$$I_{mn} = \int_0^1 (1-t)^n t^m dt.$$

Utiliser la formule de Taylor avec reste intégral pour calculer la valeur de I_{mn} .

19 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose :

$$u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}.$$

- Expliciter la formule de Taylor avec reste intégral pour la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ en 0.
- En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et donner sa limite.

20 Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) = \sin x.$$

21 Soit f la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1 + \cos^2 t}.$$

- Justifier que f est bien définie sur \mathbb{R} et impaire.
- Justifier que f est de classe \mathcal{C}^∞ , décrire ses variations.
- Soit $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$. Calculer $f(x)$ à l'aide du changement de variable $u = \tan t$.
- En déduire la valeur de : $\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + \cos^2 t}$
- Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$f(x + \pi) = f(x) + f(\pi).$$
- En déduire que la fonction $g : x \mapsto f(x) - \frac{2\alpha}{\pi}x$ est périodique et représenter la courbe de f .

22 Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose :

$$f(x) = \int_0^x \sqrt{t^4 + 1} dt$$

- Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:
$$\frac{x^3}{3} \leq f(x) \leq \frac{x^3}{3} + x.$$
- En déduire un équivalent de f en $+\infty$.

23 Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on pose :

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt.$$

- Justifier que f est bien définie sur \mathbb{R}^* .
- Démontrer que f est dérivable, calculer sa dérivée, puis décrire ses variations.
- Soit $x > 0$. Justifier l'encadrement

$$\forall t \in [x, 2x] \quad e^x \leq e^t \leq e^{2x}$$

- et en déduire un encadrement de f sur \mathbb{R}_+^* .
- Donner un encadrement similaire de f sur \mathbb{R}_-^* .
- Déterminer les limites de f en $\pm\infty$.
- Justifier que f est prolongeable par continuité en 0. On notera f la prolongement obtenu.
- À l'aide du théorème de limite de la dérivée, démontrer que f est de classe \mathcal{C}^1 en 0.
- Donner un développement limité à l'ordre 3 de f en 0.
- Tracer l'allure de la courbe de f .

24 Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue, dérivable en 0.

$$\text{On pose : } \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{f(t)}{t} dt$$

- Démontrer que Φ est bien définie sur \mathbb{R}_+^* , de classe \mathcal{C}^1 , et donner sa dérivée.
- Soit $g : t \mapsto \frac{f(t)-f(0)}{t}$. Justifier que g est prolongeable par continuité en 0.
- Démontrer que la fonction $\Psi : x \mapsto \int_x^{2x} g(t) dt$ admet une limite en 0 et donner cette limite.
- En déduire que Φ est prolongeable par continuité en 0. Quelle est alors sa valeur en 0?
- Démontrer que la fonction ainsi prolongée est de classe \mathcal{C}^1 en 0 et donner sa dérivée en 0.

25 Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, et :

$$f : x \mapsto \int_0^x (x-t)\varphi(t) dt.$$

- Justifier que la fonction f est bien définie.
- Démontrer qu'elle est dérivable et exprimer sa dérivée en fonction de φ .

26 Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \int_0^x \varphi(t) \cos(x-t) dt.$$

- Justifier que f est dérivable.
- Justifier que f est deux fois dérivable et déterminer une équation différentielle dont elle est solution.

27 Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, et :

$$f : x \mapsto \int_0^1 \varphi(tx) dt.$$

- Justifier que la fonction f est bien définie.
- Démontrer qu'elle est dérivable sur \mathbb{R}^* et continue en 0.
- On suppose que φ est dérivable en 0. Démontrer que f est dérivable en 0 et donner $f'(0)$.

28 Soit $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Calculer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_0^1 \left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right) dx.$$

29 Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose :

$$f(x) = \int_0^{\sin^2 x} \arcsin \sqrt{t} dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos \sqrt{t} dt$$

- Donner l'ensemble de définition de f , sa parité et sa périodicité.
- Démontrer que f est dérivable et donner sa dérivée. Que peut-on en déduire?

30 Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on pose :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{dt}{x+t^4}.$$

- Justifier que la fonction f est bien définie et décroissante.

- b. Déterminer ses limites en $+\infty$ et en 0.
c. Démontrer que pour tout $(x, a) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$:

$$|f(x) - f(a)| \leq \frac{|x - a|}{xa}.$$

En déduire que f est continue.

- d. Démontrer que f est dérivable et donner sa dérivée.

Indication : deviner quelle fonction g conviendrait pour f' et démontrer que f est dérivable de dérivée g .