Lycée Bellevue – Toulouse **Année 2024-2025**
MPSI – Mathématiques

Programme de colles
Semaine 21
du 17 au 21 mars 2025

Questions de cours

Sauf mention explicite il faut connaître l'énoncé et la démonstration.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et E_1 un sous-espace vectoriel de E. Alors $f(E_1)$ est un sous-espace vectoriel de F.
2. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors f est injective si et seulement si $\ker f = \{0_E\}$.
3. Soit H un hyperplan de E. Alors il existe une droite vectorielle supplémentaire de H dans E.
4. Soit p un endomorphisme de E, F son image et G son noyau. Si $p \circ p = p$ alors $E = F \oplus G$.

Exercices

Chapitre A9. Dérivation

I. Fonction dérivée
II. Théorèmes
III. Dérivées successives
IV. Dérivation des fonctions complexes
V. Convexité

Chapitre B8. Espaces vectoriels

I. Espaces vectoriels
II. Sous-espaces vectoriels
III. Sommes de sous-espaces vectoriels
IV. *Familles finies de vecteurs* — *Hors programme*
V. *Sous-espaces affines* — *Hors programme*

Programme prévisionnel de la semaine suivante

Chapitres B8 (Espaces vectoriels) et début du B9 (Application linéaires).

Chapitre A9. **Dérivation**

I. Fonction dérivée

Dérivabilité en un point. Dérivabilité à gauche, à droite. La dérivabilité implique la continuité. Fonction dérivée, opérations : combinaison linéaire, produit, quotient, composition, dérivée de la réciproque.

II. Théorèmes

Si f dérivable présente un extremum local alors sa dérivée s'y annule. Point critique. Théorème de Rolle. Égalité des accroissements finis, inégalité des accroissements finis. Application aux suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$. Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable, alors f est croissante (resp. décroissante, constante) si et seulement si f' est positive (resp. négative, nulle). Théorème de limite de la dérivée.

III. Dérivées successives

Définition. Classes $\mathcal{C}^n$ et $\mathcal{C}^\infty$. Exemples : x^n, e^x, $\ln x$, $\cos x$, $\sin x$. Formule de Leibniz.

IV. Dérivation des fonctions complexes

Définition. Propriété : $f : I \to \mathbb{C}$ est dérivable si et seulement si $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ le sont, et alors $f' = (\operatorname{Re} f)' + (\operatorname{Im} f)'$. Les théorèmes sur les extrema, le théorème de Rolle et le théorème des accroissements finis ne sont plus valables, mais l'inégalité des accroissements finis l'est encore, du moins pour la majoration.

V. Convexité

Définition, inégalité de Jensen. Lemme des trois pentes, théorème de croissance des pentes. Régularité : si f est convexe alors f est dérivable à gauche et à droite en tout point a et $f'_g(a) \leqslant f'_d(a)$. Si f est convexe sur un intervalle ouvert alors f est continue.

Cas des fonctions dérivables, deux fois dérivables. Position par rapport aux tangentes.

Fonction concaves, résultats similaires.

Chapitre B8. **Espaces vectoriels**

I. Espaces vectoriels

Définition, premières propriétés ($\lambda u = 0$ si et seulement si $\lambda = 0_\mathbb{K}$ ou $u = 0_E$). Exemples de référence : $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{M}_{n\,p}(\mathbb{K})$, fonctions, suites. Produit cartésien de n espaces vectoriels.

II. Sous-espaces vectoriels

Définition, caractérisation. Un sous-espace vectoriel est un espace vectoriel. Définition d'une combinaison linéaire.

Exemples : sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$. Espaces vectoriels $\mathbb{R}_n[X]$, $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$, etc.

Intersection, sous-espace engendré par une famille finie de vecteurs.

III. Sommes de sous-espaces vectoriels

Somme de deux sous-espaces vectoriels, somme directe, supplémentaires.

IV. Familles finies de vecteurs

Familles génératrices, libres, liées. Une famille de polynômes non-nuls de degrés échelonnés est libre. Base, coordonnées, bases canoniques. Définition de la dimension, sans démonstration, sans théorèmes.

Extension aux familles infinies. Combinaison linéaire des éléments d'une partie de E, partie génératrice. Suites presque nulles, supports d'une suite. Parties de E libres, liées. Base infinie.

V. Sous-espaces affines

Translation, sous-espace affine. Unicité de la direction. Intersection de deux sous-espaces affines.

Exemples classiques : ensembles des solutions d'un système linéaire, d'une équation différentielle linéaire.