Corrigé du Devoir à la Maison n°10

1. (a) La fonction f est quotient de deux fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$, donc elle est définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$.
Comme $f(x) \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 = f(0)$, donc f vérifie les hypothèses du théorème.

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit la propriété :
$$\mathscr{P}_n : \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad f^{(n)}(x) = (-1)^n n! \frac{x-n}{(x+1)^{n+2}}$$
On démontre par récurrence que cette propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
<u>Initialisation.</u> Si $n = 0$ on obtient :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad (-1)^n n! \frac{x-n}{(x+1)^{n+2}} = \frac{x}{(x+1)^2} = f(x) = f^{(0)}(x)$$
La proposition $\mathscr{P}_0$ est donc vraie.
<u>Hérédité.</u> Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$ la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad f^{(n)}(x) = (-1)^n n! \frac{x-n}{(x+1)^{n+2}}$$
Par dérivation :
$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad f^{(n+1)}(x) &= (-1)^n n! \frac{(x+1)^{n+2} - (x-n)(n+2)(x+1)^{n+1}}{(x+1)^{2n+4}}\\ &= (-1)^n n! \frac{(x+1) - (x-n)(n+2)}{(x+1)^{n+3}}\\ &= (-1)^n n! \frac{-(n+1)x + (n^2+2n+1)}{(x+1)^{n+3}}\\ &= (-1)^{n+1}(n+1)! \frac{x-(n+1)}{(x+1)^{n+3}}\end{aligned}$$
La propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est donc vraie. L'hérédité est démontrée.
<u>Conclusion.</u> Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$ la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie :
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad f^{(n)}(x) = (-1)^n n! \frac{x-n}{(x+1)^{n+2}}$$

   (c) On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad f^{(n)}(n) = 0$.
La dérivée n-ème de f s'annule donc au point $\alpha_n = n$.

2. On démontre le lemme par récurrence sur n.

   Initialisation. Soit f une fonction réelle de classe $\mathscr{C}^0$ sur I.

   S'il existe un réel $a_0 \in I$ tel que $f(a_0) = 0$, alors en posant $c = a_0$ on obtient bien un réel c tel que $f^{(0)}(c) = 0$. Le résultat est donc vrai au rang $n = 0$.

   Hérédité. Supposons que le lemme est vrai pour un entier naturel n fixé, démontrons qu'il l'est alors au rang $n + 1$.

   Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^{n+1}$, et $a_0, \dots, a_{n+1}$ des éléments de I tels que $a_0 < \cdots < a_{n+1}$ et $f(a_0) = \cdots = f(a_{n+1}) = 0$.

   On applique le théorème de Rolle sur chaque segment $[a_i, a_{i+1}]$, pour i allant de 0 à n.

   Soit $i \in \{0, \dots, n\}$. Alors :
   - la fonction f est continue sur $[a_i, a_{i+1}]$,
   - la fonction f est dérivable sur $]a_i, a_{i+1}[$,
   - $f(a_i) = f(a_{i+1})$.

   Les deux premières conditions sont vérifiées car f est supposée de classe de $\mathscr{C}^{n+1}$, donc au moins de classe $\mathscr{C}^1$, et donc elle est dérivable sur I.

   D'après le théorème de Rolle ces trois conditions montrent qu'il existe $b_i \in]a_i, a_{i+1}[$ tel que $f'(b_i) = 0$.

   Comme les a_k appartiennent à I qui est un intervalle alors les b_i sont dans I.

   Ainsi il existe $n + 1$ réels $b_0 < b_1 < \cdots < b_n$ de I tels que $f'(b_0) = \cdots = f'(b_n) = 0$.

   La fonction f' est de classe $\mathscr{C}^n$ car f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$, donc on peut appliquer l'hypothèse de récurrence : il existe $c \in I$ tel que $f'^{(n)}(c) = 0$.

   Il existe donc $c \in I$ tel que $f^{(n+1)}(c) = 0$. Le lemme est valide au rang $n + 1$.

   Conclusion. Par récurrence, le lemme est démontré pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. (a) La fonction $f : x \mapsto \frac{\sin(x^2)}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$, donc *a fortiori* sur $\mathbb{R}_+^*$.

   Elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ par quotient de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$.

   L'équivalence usuelle $\sin u \underset{(0)}{\sim} u$ montre que $f(x) \underset{(0)}{\sim} \frac{x^2}{x} = x$ et ainsi :

   $$f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

   On peut prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

   (b) Comme la fonction sinus prend ses valeurs dans l'intervalle $[-1, 1]$ alors :

   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad -\frac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x}$$

   Par théorème d'encadrement : $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ et donc $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} f(0)$.

   (c) On note $a_n = \sqrt{2\pi n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Alors $f(a_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors les réels $a_1, \dots, a_{n+1}$ appartiennent à $\mathbb{R}_+^*$, intervalle sur lequel f est de classe $\mathscr{C}^\infty$, ils vérifient $a_1 < a_2 < \cdots < a_{n+1}$ et $f(a_1) = \cdots = f(a_{n+1}) = 0$.

   Le lemme 1 montre qu'il existe $\alpha_n \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f^{(n)}(\alpha_n) = 0$.

(d) On calcule :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad f'(x) = 2\cos(x^2) - \frac{\sin(x^2)}{x^2}$$

Supposons que f' admet pour limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$.

Soit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_n = \sqrt{2n\pi}$ et $v_n = \sqrt{2n\pi + \pi}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ces deux suites tendent vers $+\infty$, donc par composition de limites les deux suites $(f'(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f'(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers ℓ.

Or $f'(u_n) = 2$ et $f'(v_n) = -2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui donne $\ell = 2 = -2$.

Cette contradiction montre que f' n'admet pas de limite en $+\infty$.

4. (a) La fonction tangente admet $+\infty$ pour limite à gauche en $\frac{\pi}{2}$, donc par composition de limites :

$$\lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} g(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

Cette limite est finie par hypothèse, puisqu'elle est égale à $f(a)$.

On peut donc prolonger g par continuité en $\frac{\pi}{2}$ en posant $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(a)$.

(b) La fonction g est continue sur $\left[\arctan a, \frac{\pi}{2}\right[$ puisqu'elle est la composée des fonctions

$$\tan : \left[\arctan a, \frac{\pi}{2}\right[\to [a, +\infty[\qquad \text{et} \qquad f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$$

qui sont continues, l'une par propriété et l'autre par hypothèse.

De plus la fonction g a été prolongée par continuité en $\frac{\pi}{2}$, donc elle est continue sur $\left[\arctan a, \frac{\pi}{2}\right]$

La fonction g est dérivable sur l'intervalle $\left]\arctan a, \frac{\pi}{2}\right[$ par composition, car la fonction tan est dérivable sur son ensemble de définition, et la fonction f est dérivable sur $]a, +\infty[$ par hypothèse.

De plus :

$$g(\arctan a) = f(a) \qquad \text{et} \qquad g\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(a)$$

Par application du théorème de Rolle, il existe $c \in \left]\arctan a, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $g'(c) = 0$.

(c) Comme $g = f \circ \tan$, alors par dérivation :

$$\forall x \in \left]\arctan a, \frac{\pi}{2}\right[\qquad g'(x) = (1 + \tan^2 x) f'(\tan x)$$

Comme $(1 + \tan^2 c) > 0$, l'égalité $g'(c) = 0$ donne $f'(\tan c) = 0$.

On pose $\alpha = \tan c$. La fonction tangente est strictement croissante sur l'intervalle $\left]\arctan a, \frac{\pi}{2}\right[$. Comme c appartient à cet intervalle alors α appartient à l'intervalle $]a, +\infty[$.

Il existe donc $\alpha \in]a, +\infty[$ tel que $f'(\alpha) = 0$.

5. Comme la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[a,+\infty[$ alors elle est continue sur $[a,+\infty[$, dérivable sur $]a,+\infty[$. De plus elle vérifie $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} f(a)$.

   Les hypothèses du lemme 2 sont satisfaites.

   En conséquence il existe $\alpha \in]a,+\infty[$ tel que $f'(\alpha)=0$.
6. Comme $x \in [a,+\infty[$, alors l'intervalle $[x,x+1]$ est inclus dans l'intervalle $[a,+\infty[$.

   Par restriction la fonction f est continue sur $[x,x+1]$ et dérivable sur $]x,x+1[$.

   D'après le théorème des accroissements finis il existe $c_x \in]x,x+1[$ tel que :
$$f'(c_x) = \frac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)-x} = f(x+1)-f(x)$$
   Ceci est le résultat attendu.
7. (a) Comme f' est monotone sur un voisinage de $+\infty$ alors d'après le théorème de la limite monotone elle admet une limite (éventuellement infinie) en $+\infty$.

   (b) On note ℓ la limite de f' en $+\infty$. Alors $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

   On sait que pour tout $x>a$ il existe $c_x \in]x,x+1[$ tel que $f'(c_x)=f(x+1)-f(x)$. Comme $c_x > x$, alors par théorème de comparaison :
$$c_x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$
   Comme $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$ alors par composition de limites :
$$f'(c_x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$$
   Or $\quad f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} f(a) \quad$ donc par composition et somme de limites :
$$f(x+1)-f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} f(a)-f(a)=0$$
   Par unicité de la limite $\ell=0$, donc la fonction f' admet 0 pour limite en $+\infty$:
$$f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$
8. (a) On suppose que f' n'est monotone sur aucun voisinage de $+\infty$, donc sur tout voisinage de $+\infty$ la fonction f'' prend au moins une valeur positive et une valeur négative.

   En effet, si f'' est de signe constant sur un voisinage de $+\infty$ alors f' est monotone sur ce voisinage, ce qui est supposé faux.

   On construit une suite croissante de signes alternés de la façon suivante.

   <u>Initialisation.</u> Comme $]a,+\infty[$ est un voisinage de ∞ alors il existe $x_0 \in]a,+\infty[$ tel que $f''(x_0)>0$.

   <u>Hérédité.</u> Supposons donné un réel x_n tel que $f''(x_n)$ est du signe de $(-1)^n$.

   Comme $]x_n,+\infty[$ est un voisinage de $+\infty$ alors il existe $x_{n+1} \in]x_n,+\infty[$ tel que $f''(x_{n+1})$ est du signe de $(-1)^{n+1}$.

   <u>Conclusion.</u> Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a défini un réel x_n tel que $f''(x_n)$ est du signe de $(-1)^n$. De plus $x_0>a$, et pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $x_n<x_{n+1}$, donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante avec $x_0>a$.

(b) Comme la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]a, +\infty[$ alors la fonction f'' est continue.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme $f''(x_n)$ et $f''(x_{n+1})$ sont de signes distincts et non-nuls alors d'après le théorème de valeurs intermédiaires il existe $y_n \in]x_n, x_{n+1}[$ tel que $f''(y_n) = 0$.

On peut ajouter que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad x_n < y_n < x_{n+1} < y_{n+1} < x_{n+2}$

Ainsi la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

On applique maintenant le lemme 1 à la fonction f'' au rang $n-2$, où n est un entier tel que $n \geqslant 2$.

Comme f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle $]a, +\infty[$, alors f'' est de classe $\mathscr{C}^{n-2}$ sur cet intervalle.

Les réels $y_0, \cdots, y_{n-2}$ vérifient $y_0 < y_1 < \cdots < y_{n-2}$ et $f''(y_0) = \cdots = f''(y_{n-2})$.

Il existe donc $\alpha_n \in]a, +\infty[$ tel que $f''^{(n-2)}(\alpha_n) = 0$, *i.e.*, $f^{(n)}(\alpha_n) = 0$.

Ceci est valable pour tout $n \geqslant 2$, mais on sait déjà que $f(a) = 0$, et qu'il existe $\alpha \in]a, +\infty[$ tel que $f'(\alpha) = 0$.

Donc finalement pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $\alpha_n \in [a, +\infty[$ tel que $f^{(n)}(\alpha_n) = 0$.

9. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit la propriété $\mathscr{P}_n$ suivante :

$\mathscr{P}_n$: Soit a est un réel, f une fonction continue sur $[a, +\infty[$, de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]a, +\infty[$, telle que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} f(a)$.
Alors il existe $\alpha_n \in]a, +\infty[$ tel que $f^{(n)}(\alpha_n) = 0$.

On démontre par récurrence que cette propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui prouvera le théorème.

Initialisation. La propriété $\mathscr{P}_1$ est conséquence du lemme 2.

En effet, si f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]a, +\infty[$ alors elle est dérivable sur cet intervalle, et donc le lemme peut être appliqué.

Hérédité. Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie.

Soit f une fonction vérifiant les hypothèses de la propriété $\mathscr{P}_{n+1}$, c'est-à-dire celles du théorème.

Deux cas sont possibles : soit la fonction f' est monotone sur un certain voisinage de $+\infty$, soit elle n'est monotone sur aucun voisinage de $+\infty$.

Dans le premier cas on applique l'hypothèse de récurrence à la fonction f' sur l'intervalle $[\alpha, +\infty[$.

La fonction f' est continue sur l'intervalle $[\alpha, +\infty[$ et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle $]\alpha, +\infty[$, car f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle $]a, +\infty[$ et $a < \alpha$.

La fonction f' vérifie $f'(\alpha) = 0$ et d'après la question 7b : $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Ceci donne : $\quad f'(\alpha) = \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$

Alors d'après la propriété $\mathscr{P}_n$ il existe $\beta \in]\alpha, +\infty[$ tel que $f'^{(n)}(\beta) = 0$.

En posant $\alpha_{n+1} = \beta$ on obtient $f^{(n+1)}(\alpha_{n+1}) = 0$.

On a démontré que la propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie dans le premier cas.

Dans le second cas, on a montré dans la question 8 ci-dessus que pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe $\alpha_k \in \,]a, +\infty[$ tel que $f^{(k)}(\alpha_k) = 0$, donc ceci est vrai en particulier pour $k = n+1$, et la propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie

Finalement la propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie dans les deux cas, donc l'hérédité est établie.

Conclusion. Par récurrence la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Le théorème est démontré.