Lycée Bellevue – Toulouse **Année 2024-2025**
MPSI – Mathématiques

Programme de colles
Semaine 20
du 10 au 14 mars 2025

Questions de cours

Sauf mention explicite il faut connaître l'énoncé et la démonstration.

1. Définition, existence et unicité des coordonnées d'un vecteur dans une base.
2. Soit a et b deux éléments d'un espace vectoriel E. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Si $a + F = b + G$ alors $F = G$ et $b - a \in F$.
3. Les applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ sont de la forme $(x, y) \mapsto (ax + by, cx + dy)$ où $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.
4. Si $f : E \to F$ est un isomorphisme alors f^{-1} est linéaire.

Exercices

Chapitre A9. Dérivation

I. Fonction dérivée
II. Théorèmes
III. Dérivées successives
IV. Dérivation des fonctions complexes
V. Convexité

Programme prévisionnel de la semaine suivante

Chapitres A9 (Dérivation) et B8 (I à III).

Chapitre A9. Dérivation

I. Fonction dérivée

Dérivabilité en un point. Dérivabilité à gauche, à droite. La dérivabilité implique la continuité. Fonction dérivée, opérations : combinaison linéaire, produit, quotient, composition, dérivée de la réciproque.

II. Théorèmes

Si f dérivable présente un extremum local alors sa dérivée s'y annule. Point critique. Théorème de Rolle. Égalité des accroissements finis, inégalité des accroissements finis. Application aux suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$. Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable, alors f est croissante (resp. décroissante, constante) si et seulement si f' est positive (resp. négative, nulle). Théorème de limite de la dérivée.

III. Dérivées successives

Définition. Classes $\mathcal{C}^n$ et $\mathcal{C}^\infty$. Exemples : x^n, e^x, $\ln x$, $\cos x$, $\sin x$. Formule de Leibniz.

IV. Dérivation des fonctions complexes

Définition. Propriété : $f : I \to \mathbb{C}$ est dérivable si et seulement si $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ le sont, et alors $f' = (\operatorname{Re} f)' + (\operatorname{Im} f)'$. Les théorèmes sur les extrema, le théorème de Rolle et le théorème des accroissements finis ne sont plus valables, mais l'inégalité des accroissements finis l'est encore, du moins pour la majoration.

V. Convexité

Définition, inégalité de Jensen. Lemme des trois pentes, théorème de croissance des pentes. Régularité : si f est convexe alors f est dérivable à gauche et à droite en tout point a et $f'_g(a) \leqslant f'_d(a)$. Si f est convexe sur un intervalle ouvert alors f est continue.

Cas des fonctions dérivables, deux fois dérivables. Position par rapport aux tangentes.

Fonction concaves, résultats similaires.