Corrigé partiel du T. D. A11
Dérivation

5 Soit $f(x) = \arcsin(1 - x^2)$.

a. Déterminer l'ensemble de définition de f, et le réduire par parité.

b. Sur quel ensemble f est-elle dérivable ?

a. La fonction arc-sinus est définie et continue sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $]-1, 1[$.
On calcule :

$$\begin{array}{ccccc} -1 \leqslant 1 - x^2 \leqslant 1 & \Longleftrightarrow & 0 \leqslant x^2 \leqslant 2 & \Longleftrightarrow & -\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2} \\ -1 < 1 - x^2 < 1 & \Longleftrightarrow & 0 < x^2 < 2 & \Longleftrightarrow & -\sqrt{2} < x < 0 \\ & & & & \text{ou} \quad 0 < x < \sqrt{2} \end{array}$$

Ainsi, par composition, la fonction f est définie et continue sur $\left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$ et dérivable sur $\left]-\sqrt{2}, 0\right[\cup \left]0, \sqrt{2}\right[$.

Comme la fonction f est paire on peut réduire son étude à l'intervalle $\left[0, \sqrt{2}\right]$.

b. On a justifié que la fonction f est dérivable sur $\left]-\sqrt{2}, 0\right[\cup \left]0, \sqrt{2}\right[$. Pour tout x dans cet ensemble on calcule :

$$f'(x) = \frac{-2x}{\sqrt{1 - (1 - x^2)^2}} = \frac{-2x}{|x|\sqrt{2 - x^2}}$$

Pour la dérivabilité de f en $\pm\sqrt{2}$ on utilise le théorème de limite de la dérivée :

- la fonction f est continue sur $\left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$
- la fonction f est dérivable sur $\left]-\sqrt{2}, 0\right[\cup \left]0, \sqrt{2}\right[$
- les limites de f sont :

$$\lim_{x \to -\sqrt{2}} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to \sqrt{2}} f(x) = -\infty$$

Par le théorème de limite de la dérivée f n'est pas dérivable en $\sqrt{2}$ ni en $-\sqrt{2}$.

Pour la dérivabilité en 0 :

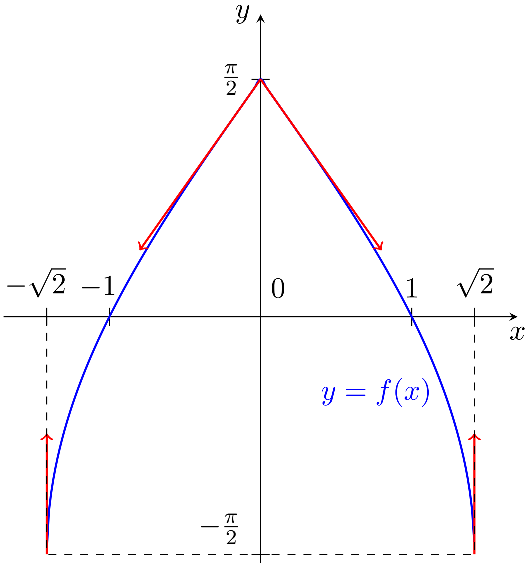
- la fonction f est continue sur $\left[0, \sqrt{2}\right]$
- la fonction f est dérivable sur $\left]0, \sqrt{2}\right[$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\sqrt{2}$.

Par le théorème de limite de la dérivée f est dérivable à droite en 0, de dérivée $-\sqrt{2}$.

De même on montre que f est dérivable à gauche en 0, de dérivée $\sqrt{2}$.

Ainsi f est dérivable à gauche et à droite en 0, mais ses dérivées ne sont pas égales. Donc elle n'est pas dérivable en 0.

On obtient une courbe comme la suivante :



⑥ Soit f la fonction définie par :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} \frac{\sin x^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démontrer que f est dérivable.

Est-elle de classe $\mathscr{C}^1$?

Par composition et quotient la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.

On étudie sa dérivabilité puis sa classe en 0.

Tout d'abord :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sin(x^2)}{x^2} \xrightarrow[x \to 0]{} 1.$$

Ceci montre que f est dérivable en 0, de dérivée $f'(0) = 1$.

On peut donc exprimer sa dérivée sur $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 2\cos(x^2) - \frac{\sin(x^2)}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On en déduit que $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = 1 = f'(0)$, donc la fonction f' est continue en 0 et la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ en 0.

Elle est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

⑦ Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 + 3x + x^3 \sin \frac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

a. Démontrer que la fonction f possède un développement limité en 0 à l'ordre 2.
b. Justifier que la fonction f est dérivable en 0, mais qu'elle n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$.

a. La fonction $x \mapsto \sin \frac{1}{x^2}$ est bornée donc : $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \dfrac{1}{x^2} = 0$.

On en déduit que f admet en 0 le développement limité à l'ordre 2 suivant :

$$f(x) \underset{(0)}{=} 1 + 3x + x^2 o(x)$$

b. Comme f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 alors par troncature f admet un développement limité à l'ordre 1 en 0, et donc f est dérivable en 0.

On peut ajouter que $f'(0) = 3$, car il s'agit du coefficient de degré 1.

Ceci peut être vérifié directement :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 3 + x^2 \sin \tfrac{1}{x^2} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 3$$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 3$.

Démontrons que f n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ en 0.

Tout d'abord, f est dérivable su $\mathbb{R}^*$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad f'(x) = 3 + 3x^2 \sin \frac{1}{x^2} - 2 \cos \frac{1}{x^2}$$

La fonction $x \mapsto \cos \frac{1}{x^2}$ n'admet pas de limite en 0.

Pour justifier ceci on considère les deux suites $(u_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\right)$ et $(v_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi n + \pi}}\right)$.

Ces deux suites convergent vers 0. Si g admettait une limite ℓ en 0, alors par composition les deux suites $(g(u_n))$ et $(g(v_n))$ tendraient vers ℓ, mais c'est impossible car elles sont constantes, égale à 1 et à -1.

Ainsi la fonction f' n'admet pas de limite en 0, donc elle n'est pas continue et f n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$.

Cet exemple montre qu'une fonction peut admettre un développement limité à l'ordre 2 en un point sans être deux fois dérivable.

La fonction f n'est en fait même pas de classe $\mathscr{C}^1$. Donc cet exemple montre aussi qu'une fonction peut admettre un développement limité à l'ordre 1 sans être de classe $\mathscr{C}^1$.

⑧ Démontrer que la fonction logarithme népérien est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et donner ses dérivées successives.

On démontre par récurrence sur $n > 0$ la propriété $\mathscr{P}_n$: la fonction ln est n fois dérivable, sa dérivée n-ème est :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \ln^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$$

⑨ Calculer les dérivées successives de :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 e^{3x} \end{array}$$

On pose $a(x) = x^3$ et $b(x) = e^{3x}$.
Les fonctions a et b sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, de dérivées successives :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad a^{(k)}(x) = \begin{cases} \frac{3!}{(3-k)!}x^{3-k} & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant 3 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad b^{(k)}(x) = 3^k e^{3x}$$

Par produit la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$, et grâce à la formule de Leibniz on obtient ses dérivées successives :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad f^{(n)}(x) = 3^n e^{3x}\left(x^3 + nx^2 + \frac{n(n-1)}{3}x + \frac{n(n-1)(n-2)}{27}\right)$$

$\boxed{1}$ Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

$f_1 : x \mapsto x\arctan x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$ $\qquad f_2 : x \mapsto \arccos\sqrt{1-x^2}$

$f_3 : x \mapsto \ln\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$ $\qquad f_4 : x \mapsto \arctan \operatorname{sh} x$ $\qquad f_5 : x \mapsto \arccos\frac{1}{\operatorname{ch} x}$

$f_6 : x \mapsto \ln|\tan x|$ $\qquad f_7 : x \mapsto 2\arctan\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \arcsin\sqrt{1-x^2}$

On obtient :

$f_1'(x) = \arctan x$ $\qquad f_2'(x) = \frac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad f_3'(x) = -\frac{1}{\sin x}$

$f_4'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch} x}$ $\qquad f_5'(x) = \frac{x}{|x|\operatorname{ch} x}$ $\qquad f_6'(x) = \tan x + \cot x$

$f_7'(x) = \left(1 + \frac{|x|}{x}\right)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\boxed{2}$ Déterminer l'ensemble de définition, l'ensemble de dérivabilité et la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes.

$f_1 : x \mapsto \cos\sqrt{x}$ $\quad f_2 : x \mapsto \arcsin\frac{3-x}{2}$ $\quad f_3 : x \mapsto \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$

$f_4 : x \mapsto \begin{cases} \ln(x+1) & \text{si } x \geqslant 0, \\ \frac{x}{1-x} & \text{sinon} \end{cases}$ $\quad f_5 : x \mapsto \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$

$f_6 : x \mapsto x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ $\quad f_7 : x \mapsto \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$ $\quad f_8 : x \mapsto \lfloor x\rfloor + \sqrt{x-\lfloor x\rfloor}$

$f_3 : x \mapsto \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$

Le réel $\sqrt{x^2-1}$ est défini si et seulement si $x^2-1 \geqslant 0$, donc si et seulement si $x \in \left]-\infty,-1\right] \cup \left[1,+\infty\right[$.
Si $x \geqslant 1$ alors $x+\sqrt{x^2-1}$ est strictement positif, donc $f_3(x)$ est défini.
Si $x \leqslant -1$ alors $x+\sqrt{x^2-1} < x+\sqrt{x^2} = x+|x|$, comme x est négatif alors $x+\sqrt{x^2-1} < 0$ donc $f_3(x)$ n'est pas défini.
Finalement f_3 est définie sur $\mathscr{D}_3 = \left[1,+\infty\right[$.

Si $x > 1$ alors $x^2-1 > 0$. La fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction ln est dérivable sur son ensemble de définition, donc par composition la fonction f_3 est dérivable sur $\left]1,+\infty\right[$.

Étudions la dérivabilité de f_3 en 1.

On écrit pour tout $x > 1$:

$$\frac{f_3(x)-f_3(1)}{x-1} = \frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{x-1}$$

On sait que

$$\ln(u) \underset{(1)}{\sim} u-1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 1}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) = 1$$

donc par composition de limites :

$$\frac{f_3(x)-f_3(1)}{x-1} \underset{(1)}{\sim} \frac{x+\sqrt{x^2-1}-1}{x-1} = 1+\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$$

Ceci donne :

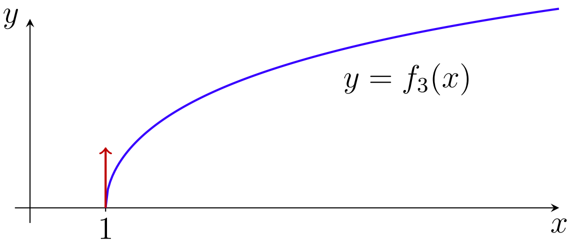
$$\lim_{x\to 1}\frac{f_3(x)-f_3(1)}{x-1} = +\infty$$

La fonction f_3 n'est donc pas dérivable en 1.

Finalement f_3 est dérivable sur $\left]1,+\infty\right[$ et on calcule :

$$\forall x \in \left]1,+\infty\right[\qquad f_3'(x) = \frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

On peut démontrer de plus que $f_3(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln x$, et tracer la courbe suivante :



$f_5 : x \mapsto \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$

La fonction f_5 est définie si $\cos x \neq 1$ et si $\frac{1+\cos x}{1-\cos x} \geqslant 0$. La première condition est valide si et seulement si x n'est pas multiple de 2π, la première est toujours valide, car : $\quad \forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \leqslant \cos x \leqslant 1$

La fonction f_5 est donc définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Si $x \neq \pi + 2k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ alors $\frac{1+\cos x}{1-\cos x} > 0$.

Donc par quotient et composition la fonction f_5 est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

On calcule, pour tout x dans cet ensemble :

$$\begin{aligned} f_5'(x) &= -\frac{\sin x}{(1-\cos x)^2}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = -\frac{\sin x}{1-\cos x}\sqrt{\frac{1}{(1-\cos x)(1+\cos x)}} \\ &= -\frac{\sin x}{|\sin x|}\frac{1}{1-\cos x} \end{aligned}$$

On étudie maintenant la dérivabilité en $\pi + 2k\pi$.

Comme la fonction est 2π-périodique, il suffit d'étudier sa dérivabilité en π.

On peut utiliser le théorème de limite de la dérivée, ou revenir à la définition de la dérivabilité, ce que nous faisons ci-dessous.

Le taux d'accroissement de f_5 en π est :

$$\frac{f_5(x) - f_5(\pi)}{x - \pi} = \frac{1}{x-\pi}\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$$

On pose $h = x - \pi$. Alors :

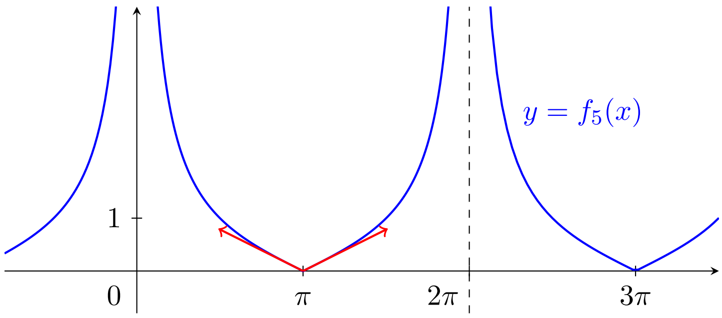
$$\frac{f_5(x) - f_5(\pi)}{x - \pi} = \frac{1}{h}\sqrt{\frac{1-\cos h}{1+\cos h}} \underset{(h\to 0)}{\sim} \frac{1}{h}\sqrt{\frac{h^2}{4}} = \frac{|h|}{2h}$$

On en déduit :

$$\lim_{x \underset{<}{\to} \pi} \frac{f_5(x) - f_5(\pi)}{x - \pi} = -\frac{1}{2} \qquad \lim_{x \underset{<}{\to} \pi} \frac{f_5(x) - f_5(\pi)}{x - \pi} = \frac{1}{2}$$

Ainsi f_5 est dérivable à gauche et à droite en π, de dérivées $f_g'(\pi) = -\frac{1}{2}$ et $f_d'(\pi) = \frac{1}{2}$.
Elle n'est donc pas dérivable en π.

La courbe de f_5 est la suivante :



On peut ajouter qu'il est possible de simplifier l'expression de f_5 dès le départ, en multipliant par une quantité conjuguée ou en utilisant les formules en $t = \tan \frac{x}{2}$:

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{ 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \} \qquad f_5(x) = \frac{|\sin x|}{1 - \cos x} = \left| \frac{1}{\tan \frac{x}{2}} \right|$$

Cette dernière expression en particulier explique bien l'aspect de la courbe.

$f_7 : x \mapsto \dfrac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}}$

Cette fonction est définie sur $[-1, 1]$. Par composition et quotient elle est continue.

Toujours par composition elle est dérivable sur $]-1, 1[$, de dérivée :

$$\forall x \in \,]-1, 1[\qquad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}\left(1 + \sqrt{1 - x^2}\right)}$$

Le théorème de limite de la dérivée montre qu'elle n'est pas dérivable en ± 1, mais on peut aussi calculer la limite du taux d'accroissement :

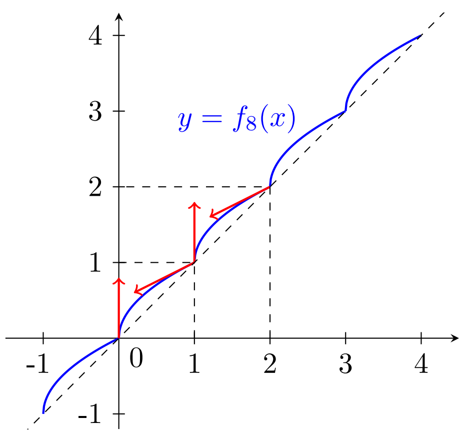
$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\sqrt{1 - x} + \sqrt{1 + x}}{\sqrt{1 - x}\left(1 + \sqrt{1 - x^2}\right)} \xrightarrow[x \to 1]{} +\infty$$

Ceci montre que f n'est pas dérivable en 1, et de même en -1.

$f_8 : x \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$

Cette fonction a été étudiée dans l'exercice 4 de la feuille de TD A10.

Nous avons vu qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$, et que sa courbe est la suivante :



La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, de dérivée nulle. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, comme $x - \lfloor x \rfloor > 0$ alors par composition f_8 est dérivable en x.
Ainsi f_8 est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, de dérivée :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \qquad f_8'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x - \lfloor x \rfloor}}$$

Pour la dérivabilité en un point n entier on calcule les limites à gauche et à droite du taux d'accroissement. On rappelle :

$$\begin{aligned} &\forall x \in [n-1, n[\qquad f_8(x) = n - 1 + \sqrt{x - n + 1} \\ &\forall x \in [n, n+1[\qquad f_8(x) = n + \sqrt{x - n} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} &\lim_{\substack{x \to n \\ <}} \frac{f_8(x) - f_8(n)}{x - n} = \lim_{\substack{x \to n \\ <}} \frac{\sqrt{x - n + 1} - 1}{x - n} = \lim_{\substack{x \to n \\ <}} \frac{1}{\sqrt{x - n + 1} + 1} = \frac{1}{2} \\ &\lim_{\substack{x \to n \\ >}} \frac{f_8(x) - f_8(n)}{x - n} = \lim_{\substack{x \to n \\ >}} \frac{\sqrt{x - n}}{x - n} = \lim_{\substack{x \to n \\ >}} \frac{1}{\sqrt{x - n}} = +\infty \end{aligned}$$

On en déduit que f_8 est dérivable à droite en n, de dérivée $f_d'(n) = \frac{1}{2}$, mais qu'elle n'est pas dérivable à gauche.

$\boxed{3}$ Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes.

Étudier leurs prolongements par continuité et la dérivabilité de ceux-ci.

$$f_1 : x \mapsto x \sin \tfrac{1}{x} \qquad\qquad f_2 : x \mapsto x^2 \sin \tfrac{1}{x}$$

Les fonctions f_1 et f_2 sont définies sur $\mathbb{R}^*$, de classe $\mathscr{C}^\infty$ par composition.
Comme la fonction $|\sin|$ est majorée par 1 alors :

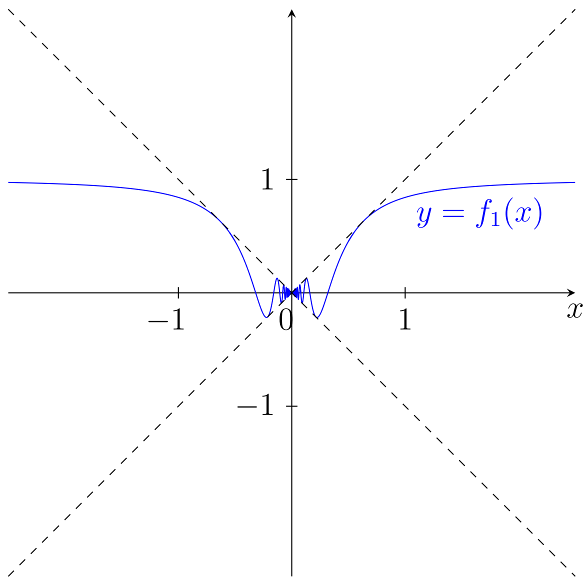
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad |f_1(x)| \leqslant |x| \qquad \text{et} \qquad |f_2(x)| \leqslant \left|x^2\right|$$

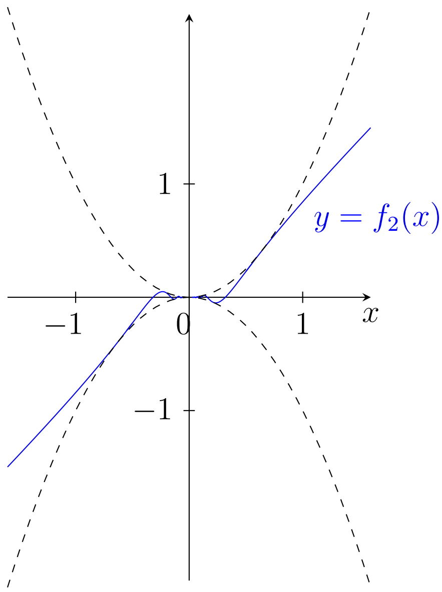
Par théorème d'encadrement, les deux fonctions tendent vers 0 lorsque x tend vers 0.
On peut donc les prolonger par continuité en posant $f_1(0) = f_2(0) = 0$.
Étudions maintenant leur dérivabilité en 0, grâce à leurs taux d'accroissement.

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad \frac{f_1(x) - f_1(0)}{x - 0} = \sin \frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad \frac{f_2(x) - f_1(0)}{x - 0} = x \sin \frac{1}{x} = f_1(x)$$

Nous avons vu que la fonction $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ n'admet pas de limite lorsque x tend vers $+\infty$. Donc la fonction f_1 n'est pas dérivable en 0. Par contre la fonction f_2 est dérivable en 0, de dérivée $f_2(0) = 0$.

Voici l'allure des courbes de ces fonctions :





La fonction f_2 est un exemple de fonction dérivable dont la dérivée n'est pas continue. En effet, on a démontré qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, que sa dérivée en 0 est 0, et on calcule :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f_2'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

La fonction $x \mapsto 2x \sin \frac{1}{x}$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0, mais la fonction $x \mapsto \cos \frac{1}{x}$ n'admet pas de limite lorsque x tend vers 0. On le démontre de la même façon que pour $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$.

Donc $f_2'(x)$ n'admet pas de limite lorsque x tend vers 0. En particulier elle ne tend pas vers $f_2'(0)$, et donc elle n'est pas continue.

Ainsi la fonction f_2 est dérivable mais sa dérivée n'est pas continue.

$\boxed{4}$ Établir les égalités suivantes.

a. $\forall x \in [-1,1] \qquad \arcsin\left(2x^2-1\right) = 2\arcsin|x| - \dfrac{\pi}{2}$

b. $\forall x \in [-1,0[\,\cup\,]0,1] \qquad \arctan\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \begin{cases} \arccos x & \text{si } x>0 \\ \arccos x \; - \pi & \text{si } x<0 \end{cases}$

a. On pose : $f(x) = \arcsin(2x^2-1) - 2\arcsin|x|$

On utilise les équivalences :

$$\begin{array}{llll} \forall x \in \mathbb{R} & -1 \leqslant 2x^2-1 \leqslant 1 & \Longleftrightarrow & -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ & -1 < 2x^2-1 < 1 & \Longleftrightarrow & -1 < x < 0 \quad \text{ou} \quad 0 < x < 1 \\ & -1 \leqslant |x| \leqslant 1 & \Longleftrightarrow & -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ & -1 < |x| < 1 & \Longleftrightarrow & -1 < x < 1 \end{array}$$

La fonction $x \mapsto 2x^2-1$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

La fonction arcsin est définie et continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$.

La fonction $x \mapsto |x|$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Par composition et soustraction, la fonction f est définie et continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,0[\,\cup\,]0,1[$.

Sa dérivée est :

$$\begin{aligned} \forall x \in\,]-1,0[\,\cup\,]0,1[\qquad f'(x) &= \frac{4x}{\sqrt{1-(2x^2-1)^2}} - 2\frac{x}{|x|}\frac{1}{\sqrt{1-|x|^2}} \\ &= \frac{4x}{2|x|\sqrt{1-x^2}} - \frac{2x}{|x|\sqrt{1-x^2}} = 0 \end{aligned}$$

Comme sa dérivée est nulle alors f est constante sur tout intervalle. Elle est donc constante sur $]-1,0[$ et $]0,1[$.

Par continuité, f est constante sur $[-1,0]$ et $[0,1]$, donc sur $[-1,1]$.

En effet, si K est la valeur de f sur $]0,1[$:

$$\forall x \in\,]0,1[\qquad f(x) = K$$

Alors :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 1} f(x) = K$$

Or comme f est continue en 0 et en 1 alors :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$$

On en déduit que $f(0) = f(1) = K$, donc f est constante sur $[0,1]$ égale à K.

On procède de même sur $[-1,0]$, donc finalement f est constante sur $[-1,1]$.

On calcule $f(0) = -\frac{\pi}{2}$ donc f est constante égale à $-\frac{\pi}{2}$ sur $[-1,1]$, ce qui donne le résultat demandé.

b. Soit $f(x) = \arctan \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

Cette fonction est définie sur $\mathscr{D} = [-1, 0[\cup]0, 1]$, continue par composition et quotient. Elle est dérivable sur $\mathscr{D}' =]-1, 0[\cup]0, 1[$, également par composition et quotient.

On calcule :

$$\forall x \in \mathscr{D}' \qquad f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos' x$$

Comme $]-1, 0[$ et $]0, 1[$ sont des intervalles alors il existe deux constantes K_1 et K_2 telles que :

$$\forall x \in \mathscr{D}' \qquad f(x) = \begin{cases} \arccos x \ + K_1 & \text{si } x \in]-1, 0[\\ \arccos x \ + K_2 & \text{si } x \in]0, 1[\end{cases}$$

Comme f est continue sur $\mathscr{D}$ alors ces égalités se prolongent à $\mathscr{D}$:

$$\forall x \in \mathscr{D} \qquad f(x) = \begin{cases} \arccos x \ + K_1 & \text{si } x \in [-1, 0[\\ \arccos x \ + K_2 & \text{si } x \in]0, 1] \end{cases}$$

Les valeurs en -1 et 1 montrent que $K_1 = -\pi$ et $K_2 = 0$, donc :

$$\forall x \in [-1, 0[\cup]0, 1] \qquad f(x) = \begin{cases} \arccos x \ - \pi & \text{si } x < 0 \\ \arccos x & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

$\boxed{5}$ Étudier les fonctions suivantes.

$$f_1 : x \mapsto \arcsin \frac{x}{1+x^2} \qquad f_2 : x \mapsto \arccos \frac{2\sqrt{x}}{x+1} \qquad f_3 : x \mapsto \arccos \operatorname{th} x + \arcsin \frac{1}{\operatorname{ch} x}$$

$f_2 : x \mapsto \arccos \frac{2\sqrt{x}}{x+1}$

On étudie d'abord la fonction $g : x \mapsto \frac{2\sqrt{x}}{x+1}$

Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}_+$, par quotient elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad g'(x) = \frac{1-x}{\sqrt{x}(x+1)^2}$$

On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Pour la limite en $+\infty$ on a utilisé l'équivalence : $g(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2\sqrt{x}}{x} = \frac{2}{\sqrt{x}} \longrightarrow 0$

La fonction arccos est définie et continue sur $[-1, 1]$, dérivable sur $]-1, 1[$.

Par composition et d'après le tableau de variations ci-dessus, la fonction f_2 est définie est continue sur $[0, +\infty[$, dérivable sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

Sa dérivée est :

$$\forall x \in \,]0,1[\,\cup\,]1,+\infty[\qquad f_2'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}(x+1)|x-1|}$$

Pour la dérivabilité en 0 et en 1 on applique trois fois le théorème de limite de la dérivée :

- la fonction f_2 est continue sur $[0,+\infty[$
- la fonction f_2 est dérivable sur $]0,1[\,\cup\,]1,+\infty[$
- les limites de f_2' sont :

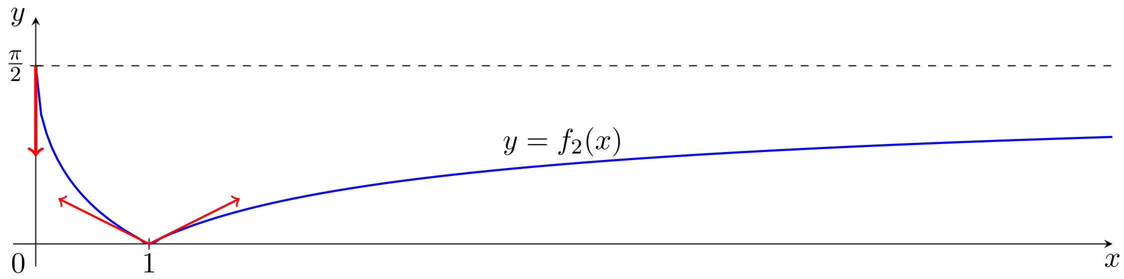
$$\lim_{x\to 0} f_2'(x) = +\infty \qquad \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} f_2'(x) = -\frac{1}{2} \qquad \lim_{\substack{x\to 1\\ >}} f_2'(x) = \frac{1}{2}$$

D'après le théorème de limite de la dérivée f_2 n'est pas dérivable en 0, elle est dérivable à gauche en 1 de dérivée $-\frac{1}{2}$ et à droite en 1 de dérivée $\frac{1}{2}$.
Ces deux dernières dérivées sont différentes donc f_2 n'est pas dérivable en 1.

On obtient le tableau de variations suivant :

x	0			1		$+\infty$
$f_2'(x)$	$\Vert$	$-\infty$	$-$	$-\frac{1}{2}\ \Vert\ \frac{1}{2}$	$+$	
$f_2(x)$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$		0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

Puis la courbe :



$f_3 : x \mapsto \arccos \operatorname{th} x + \arcsin \frac{1}{\operatorname{ch} x}$

Les fonctions hyperboliques sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

On sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \operatorname{ch} x \geqslant 1 \qquad \text{et} \qquad (\operatorname{ch} x = 1 \iff x = 0)$$

Ceci montre que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \frac{1}{\operatorname{ch} x} \in \,]0,1] \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{1}{\operatorname{ch} x} = 1 \iff x = 0\right)$$

La fonction arcsin est définie et continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$.

Par composition la fonction $x \mapsto \arcsin \frac{1}{\operatorname{ch} x}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

La fonction arccos est définie et continue sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $]-1, 1[$. Or on sait que la fonction th est dérivable et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad -1 < \operatorname{th} x < 1$$

Par composition la fonction $x \mapsto \arccos \operatorname{th} x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Par somme la fonction f_3 est définie et continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
Sa dérivée est :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad f_3'(x) = -\frac{1}{\operatorname{ch} x} - \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x |\operatorname{sh} x|}$$

Comme $\operatorname{sh} x$ est du signe de x alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad f_3'(x) = -\frac{1}{\operatorname{ch} x}\left(1 + \frac{x}{|x|}\right)$$

Ceci donne :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad f_3'(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{\operatorname{ch} x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

En particulier, comme $\mathbb{R}_-$ est un intervalle alors la fonction f_3 est constante sur $\mathbb{R}_-$.

Pour la dérivabilité en 0 on utilise le théorème de limite de la dérivée :
- la fonction f_3 est continue sur $\mathbb{R}$
- la fonction f_3 est dérivable sur $\mathbb{R}^*$
- les limites de f_3' sont :

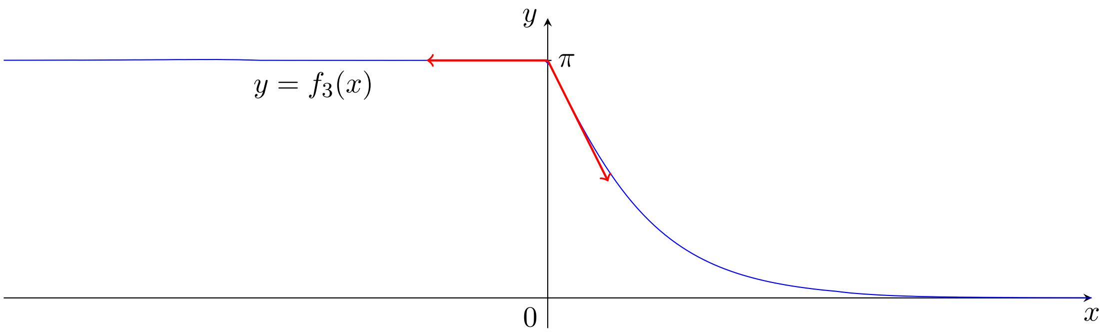
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f_3'(x) = 0 \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f_3'(x) = -2$$

D'après le théorème de limite de la dérivée la fonction f_3 est dérivable à gauche en 0 de dérivée 0 et à droite de dérivée -2.
Ces deux dérivées ne sont pas égales donc la fonction f_3 n'est pas dérivable en 0.

On obtient le tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_3'(x)$		0	‖	-2 $\quad -$	
$f_3(x)$	π	$\longrightarrow$	π	$\searrow$	0

Puis la courbe :



6 Soit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable. Démontrer que la fonction

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & e^{u(t)} \end{array}$$

est dérivable et donner sa dérivée.

On note x et y les parties réelles et imaginaires de u. Alors x et y sont deux fonctions réelles, et pour tout $t \in \mathbb{R}$: $\quad u(t) = x(t) + iy(t)$

On en déduit :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad e^{u(t)} = e^{x(t)} e^{iy(t)} = e^{x(t)} \cos y(t) + ie^{x(t)} \sin y(t)$$

Comme la fonction u est dérivable alors par propriété ses parties réelles et imaginaires sont dérivables, donc x et y sont dérivables.

Les fonctions exponentielle, cosinus et sinus sont dérivables, donc par composition et produit les fonctions $t \mapsto e^{x(t)} \cos y(t)$ et $t \mapsto e^{x(t)} \sin y(t)$ sont dérivables.

Or ces fonctions sont les parties réelles et imaginaires de la fonction $t \mapsto e^{u(t)}$, donc par propriété cette fonction est dérivable.

On calcule sa dérivée :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R} \qquad f'(t) &= \Big(x'(t)e^{x(t)} \cos y(t) - y'(t)e^{x(t)} \sin y(t)\Big) \\ &\qquad\qquad + i\Big(x'(t)e^{x(t)} \sin y(t) + y'(t)e^{x(t)} \cos y(t)\Big) \\ &= e^{x(t)}((x'(t) + iy'(t)) \cos y(t) + i(x'(t) + iy'(t)) \sin y(t)) \\ &= e^{x(t)}(x'(t) + iy'(t))(\cos y(t) + i \sin y(t)) \\ &= e^{x(t)} u'(t) e^{iy(t)} = u'(t)e^{u(t)} \end{aligned}$$

On a démontré que la formule $(e^u)' = u'e^u$ est valable aussi si u est une fonction complexe.

7 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et a un point intérieur de I. On définit :

$$m : h \longmapsto \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$

a. Démontrer que si f est dérivable en a alors m admet une limite finie en 0.
b. La réciproque est-elle vraie ?

a. On peut écrire :

$$\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = \frac{1}{2}\left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \frac{f(a-h) - f(a)}{-h}\right)$$

Si f est dérivable en a alors :

$$\lim_{u \to 0} \frac{f(a+u) - f(a)}{u} = f'(a)$$

On en déduit par composition de limites :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = \frac{1}{2}(f'(a) + f'(a)) = f'(a)$$

b. La réciproque et fausse : il est possible que m admette une limite en 0 alors que f n'est pas dérivable en a.

Par exemple si f est la fonction valeur absolue et $a = 0$, alors f n'est pas dérivable en 0, mais :

$$\forall h \neq 0 \qquad m(h) = \frac{|h| - |-h|}{2h} = \frac{|h| - |h|}{2h} = 0$$

La fonction m admet une limite en 0 alors que f n'est pas dérivable en a.

On peut ajouter que si f est dérivable à gauche et à droite en a alors la limite de m en 0 est la moyenne entre les dérivées à gauche et à droite de f en a.

8 Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x + y) = f(x) + f(y)$$

Soit f une fonction vérifiant la relation ci-dessus.
On fixe $y \in \mathbb{R}$. Comme f est dérivable alors en dérivant par rapport à x on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x + y) = f'(x)$$

Ceci est valable pour tout $y \in \mathbb{R}$, et en particulier pour $x = 0$:

$$\forall y \in \mathbb{R} \qquad f'(y) = f'(0)$$

Posons $a = f'(0)$. Alors $f' = a$. Comme f est définie sur $\mathbb{R}$ qui est un intervalle alors il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = ax + b$
Réciproquement, si f est une fonction de la forme $f(x) = ax + b$, alors la relation de l'énoncé équivaut à :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad a(x + y) + b = ax + b + ay + b$$

Elle est vraie si et seulement si $b = 0$.
En conclusion les fonctions dérivables vérifiant la relation $f(x + y) = f(x) + f(y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sont les fonctions linéaires $x \mapsto ax$ où a est un réel quelconque.

9 Démontrer que l'équation différentielle

$$ty' - y = 0 \qquad y(1) = 1$$

possède une unique solution dérivable sur $\mathbb{R}$.

Sur l'ensemble $\mathbb{R}^*$ l'équation équivaut à :

$$y' - \frac{1}{t}y = 0 \tag{1}$$

Le théorème de résolution des équations différentielles de ce type donne les solutions sur un intervalle.

Ici $\mathbb{R}^*$ est l'union des deux intervalles $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.

Soit $a(t) = \frac{1}{t}$, puis $A(t) = \ln|t|$. Alors A est une primitive de a.

Comme $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle alors les solutions de l'équation (1) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions $y(t) = \lambda e^{A(t)} = \lambda t$, où λ est une constante réelle.

Comme $\mathbb{R}_-^*$ est un intervalle alors les solutions de l'équation (1) sur $\mathbb{R}_-^*$ sont les fonctions $y(t) = \mu e^{A(t)} = -\mu t$, où μ est une constante réelle.

Quitte à remplacer μ par $-\mu$ on peut écrire $y(t) = \mu t$ sur $\mathbb{R}_-^*$.

Sur l'ensemble $\{0\}$ l'équation de départ admet une unique solution : $y(0) = 0$.

Les solutions de l'équation de départ sont par restrictions solutions sur $\mathbb{R}_+^*$, sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\{0\}$, donc ce sont les fonctions :

$$\begin{aligned} y : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \begin{cases} \lambda t & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ \mu t & \text{si } t < 0 \end{cases} \end{aligned} \qquad \text{avec } \lambda \text{ et } \mu \text{ constantes réelles}$$

On remarque que cette fonction est dérivable à gauche et à droite en 0, de dérivées $f'_g(0) = \mu$ et $f'_d(0) = \lambda$.

Or une solution de l'équation différentielle de départ sur $\mathbb{R}$ est supposée dérivable, donc en particulier dérivable en 0. Ses dérivées à gauche et à droite sont donc égales, ce qui impose $\lambda = \mu$.

La condition initiale $y(1) = 1$ donne $\lambda = 1$, donc finalement la fonction $y : t \mapsto t$ est la solution unique de l'équation proposée.

10 Soit $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables telles que $f(a) = g(a)$ et $f(b) = g(b)$. Prouver qu'il existe $c \in \,]a, b[$ tel que $f'(c) = g'(c)$.

Soit $h = f - g$.
La fonction h est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et $h(a) = h(b) = 0$.
D'après le théorème de Rolle il existe $c \in \,]a, b[$ tel que $h'(c) = 0$.
Comme $h = f - g$ alors $h' = f' - g'$ donc $h'(c) = f'(c) - g'(c)$, ce qui donne $f'(c) = g'(c)$.
Il existe donc bien $c \in \,]a, b[$ tel que $f'(c) = g'(c)$.

11 Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(0) = 1$ et $f(1) = e$.
Démontrer qu'il existe $x \in \,]0, 1[$ tel que $f'(x) = f(x)$.

Pour tout $x \in [0, 1]$ on pose $g(x) = f(x)e^{-x}$.
Cette fonction est définie et dérivable sur $[0, 1]$, elle vérifie $g(0) = g(1) = 1$.
Sa dérivée est : $\forall x \in [0, 1] \quad g'(x) = (f'(x) - f(x))e^{-x}$.

- La fonction g est continue sur $[0, 1]$.
- La fonction g est dérivable sur $]0, 1[$;
- $g(0) = g(1)$.

D'après le théorème de Rolle il existe $c \in \,]0, 1[$ tel que $g'(c) = 0$.
Comme $e^{-c} \neq 0$ alors le réel c vérifie bien $f'(c) = f(c)$.

12 Soit $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

a. On suppose que f est dérivable en a et que $f'(a) > 0$.
Démontrer qu'il existe $x \in \,]a, b]$ tel que $f(x) > f(a)$.

b. On suppose que f est deux fois dérivable sur $[a, b]$, que $f(a) = f(b)$, et que $f'(a) > 0$, $f'(b) > 0$. Démontrer que f'' s'annule sur $]a, b[$.

a. Méthode 1.

On raisonne par contraposée en supposant que pour tout $x \in \,]a, b]$: $\quad f(x) \leqslant f(a)$.

Alors pour tout $x > a$: $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant 0$.

Cette fonction de x admet $f'(a)$ pour limite lorsque x tend vers a par valeurs supérieures, car f est dérivable an a.

On en déduit donc $f'(a) \leqslant 0$ par théorème de comparaison.

Par contraposée si $f'(a) > 0$ alors il existe $x \in \,]a, b]$ tel que $f(x) > f(a)$.

Méthode 2.

Comme f est dérivable en a alors la fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet $f'(a)$ pour limite lorsque x tend vers a par valeurs supérieures.

Comme cette limite est strictement positive alors la fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est strictement positive sur un voisinage de a à droite, c'est-à-dire sur un intervalle $[a, a+\varepsilon]$ où $\varepsilon > 0$.

Soit par exemple $x = a + \varepsilon$. Alors $\frac{f(x)-f(a)}{\varepsilon} > 0$ et donc $f(x) > f(a)$.

b. D'après la question précédente il existe $c_1 \in]a, b]$ tel que $f(c_1) > f(a)$.

De même, comme $f'(b) > 0$ alors il existe $c_2 \in [a, b[$ tel que $f(c_2) < f(b)$.

Comme $f(a) = f(b)$ alors $f(c_2) < f(a) < f(c_1)$.

Par théorème des valeurs intermédiaires, f étant continue, il existe d entre c_1 et c_2 tel que $f(d) = f(a)$. On a alors $d \in]a, b[$, ceci car $a < c_1$ et $c_2 < b$.

On applique le théorème de Rolle sur les intervalles $[a, d]$ et $[d, b]$.

La fonction f est bien continue sur ces intervalles et dérivable sur les intervalles $]a, d[$ et $]d, b[$, car elle est deux fois dérivable sur $[a, b]$.

Par théorème de Rolle il existe $e_1 \in]a, d[$ et $e_2 \in]d, b[$ tels que $f'(e_1) = f'(e_2) = 0$.

Alors $e_1 \neq e_2$ car $e_1 < d < e_2$.

On applique le théorème de Rolle à la fonction f', qui est continue sur $[e_1, e_2]$ et dérivable sur $]e_1, e_2[$, car f est deux fois dérivable sur $[a, b]$.

Il montre que f'' s'annule sur $]e_1, e_2[$, donc sur $]a, b[$.

14 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique de classe $\mathscr{C}^1$.

a. Démontrer que f' est périodique.
b. Démontrer que f' s'annule.
c. Démontrer que f est lipschitzienne.

a. Soit T une période de f. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x+T) = f(x)$$

La dérivée de la fonction $x \mapsto x + T$ est la fonction $x \mapsto 1$, donc en dérivant on obtient par composition :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x+T) = f'(x)$$

La fonction f' est donc périodique de période T.

b. Comme la fonction f est T-périodique alors $f(0) = f(T)$.

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$, donc elle est continue sur $[0, T]$ et dérivable sur $]0, T[$.

D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]0, T[$ tel que $f'(c) = 0$.

c. Comme la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ alors la fonction f' est continue.

Une fonction continue sur un segment est bornée, donc la fonction f' est bornée sur le segment $[0, T]$.

Comme elle est T-périodique alors elle est bornée sur $\mathbb{R}$ tout entier.

En effet la périodicité montre que pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $f([nT,(n+1)T]) = f([0,T])$, et comme $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [nT,(n+1)T]$ alors :

$$f(\mathbb{R}) = f\left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [nT,(n+1)T]\right) = f([0,T])$$

Soit M un majorant de $|f'|$.

La fonction f est dérivable sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et la fonction $|f'|$ est majorée par M donc par inégalité des accroissements finis la fonction f est M-lipschitzienne.

15 Soit P un polynôme scindé de $\mathbb{R}[X]$.

On note $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ ses racines, rangées dans l'ordre strictement croissant.

a. Démontrer qu'il existe des racines $\beta_1, \ldots, \beta_{k-1}$ de P' telles que :

$$\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \cdots < \beta_{k-1} < \alpha_k$$

b. Démontrer que P' est scindé.

a. On applique le théorème de Rolle sur chaque intervalle $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$, pour i allant de 1 à $k-1$.

b. On note m_i la multiplicité de α_i. Alors la somme des m_i est égal à n, le degré de P.

Par propriété des polynômes chaque α_i est racine de P' de multiplicité $m_i - 1$.

La somme des multiplicités des racines $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \ldots, \beta_{k-1}, \alpha_k$ dans le polynôme P' est donc au minimum :

$$\sum_{i=1}^{k} (m_i - 1) + \sum_{i=1}^{k-1} 1 = n - k + k - = n - 1$$

Comme le polynôme P' est de degré $n-1$ alors il n'admet pas d'autres racines, et donc il est scindé.

16 Démontrer que pour tout $x > 0$:

$$\frac{x}{1+x^2} \leqslant \arctan x \leqslant x$$

Il suffit d'appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction arc-tangente sur l'intervalle $[0,x]$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction arc-tangente est continue sur $[0,x]$ et dérivable sur $]0,x[$ donc d'après le théorème des accroissements finis il existe $c \in]0,x[$ tel que :

$$f'(c) = \frac{\arctan x - \arctan 0}{x - 0} \qquad \text{donc} \qquad \frac{1}{1+c^2} = \frac{\arctan x}{x}$$

Comme $c \in]0,x[$ alors $\frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{1+c^2} < 1$ et donc, x étant strictement positif :

$$\frac{x}{1+x^2} \leqslant \arctan x \leqslant x.$$

17 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I. Soit x un point de I, et h un réel non-nul tel que $x+h$ appartient à I.

a. Démontrer qu'il existe un réel $\theta \in]0,1[$ tel que :
$$f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h)$$

b. Si $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, calculer un tel réel θ. Donner une interprétation géométrique de ce dernier résultat.

a. On applique le théorème des accroissements finis à la fonction f sur l'intervalle $[x, x+h]$ (ou $[x+h, x]$ si h est négatif).

On supposera dans la suite que h est positif pour simplifier, mais les résultats sont similaires sinon.

Par énoncé x et $x+h$ sont éléments de I, lequel est un intervalle, donc l'intervalle $[x, x+h]$ est inclus dans I.

Or f est dérivable sur I, donc elle est continue sur $[x, x+h]$ et dérivable sur $]x, x+h[$.

D'après le théorème des accroissements finis il existe un élément c de $]x, x+h[$ tel que
$$f'(c) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Par équivalences :
$$x < c < x+h \iff 0 < c - x < h \iff 0 < \frac{c-x}{h} < 1$$

On pose : $\theta = \frac{c-x}{h}$

Alors $c = x + \theta h$ et donc il existe $\theta \in]0,1[$ tel que $f'(x+\theta h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, ce qui donne :
$$f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h)$$

b. Si $f(x) = ax^2 + bx + c$ alors l'égalité ci-dessus s'écrit :
$$a(x+h)^2 + b(x+h) + c = ax^2 + bx + c + 2h[a(x+\theta h) + b]$$

Ceci équivaut à $\theta = \frac{1}{2}$.

On en déduit que sur une parabole, si on trace une corde reliant deux points A et B d'abscisses a et b, alors la tangente à la parabole parallèle à cette corde est la tangente au point d'abscisse $\frac{a+b}{2}$.

18 Démontrer que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$: $\left|e^{ib} - e^{ia}\right| \leqslant |b-a|$

On peut inverser a et b sans perdre de généralité, donc on suppose $a \leqslant b$.
Méthode 1. La fonction complexe $f : t \mapsto e^{it}$ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Sa dérivée est :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad f'(t) = ie^{it}$$

Celle-ci est de module 1 donc :

$$\forall t \in \,]a,b[\qquad |f'(t)| \leqslant 1$$

D'après l'inégalité des accroissements finis pour les fonctions complexes ceci implique que :

$$|f(a) - f(b)| \leqslant |a-b|$$

C'est exactement le résultat souhaité.
Méthode 2. On utilise l'angle moyen :

$$e^{ia} - e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}}\left(e^{i\frac{a-b}{2}} - e^{-i\frac{a-b}{2}}\right) = e^{i\frac{a+b}{2}} 2i \sin\frac{a-b}{2}$$

On sait que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad |\sin t| \leqslant |t|$$

On en déduit

$$\left|e^{ia} - e^{ib}\right| = \left|e^{i\frac{a+b}{2}}\right| 2 \left|\sin\frac{a-b}{2}\right| \leqslant 2\left|\frac{a-b}{2}\right| = |a-b|$$

Le résultat est démontré.

19 À l'aide du théorème des accroissements finis, déterminer : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left((x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}\right)$

On pose : $\forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad f(t) = te^{\frac{1}{t}}$
La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par composition et produit. On calcule :

$$\forall t \in \mathbb{R}^* \qquad f'(t) = \left(1 - \frac{1}{t}\right)e^{\frac{1}{t}}$$

Notons maintenant x un réel strictement positif.
La fonction f est continue sur $[x, x+1]$ et dérivable sur $]x, x+1[$ donc d'après le théorème des accroissements finis il existe $c_x \in \,]x, x+1[$ tel que :

$$f'(c_x) = f(x+1) - f(x)$$

Comme $c_x \in \,]x, x+1[$ alors par théorème de comparaison c_x tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$. Or on constate que :

$$\lim_{t\to+\infty} f'(t) = \lim_{t\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{t}\right)e^{\frac{1}{t}} = 1$$

Par composition de limites

$$\lim_{x\to+\infty} f'(c_x) = 1$$

puis par définition de c_x :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \left((x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}\right) = 1}$$

Remarque. Il est possible de calculer cette limite directement, grâce au changement de variable $h = \frac{1}{x}$:

$$\begin{aligned}(x+1)e^{\frac{1}{1+x}} - xe^{\frac{1}{x}} &= \left(\tfrac{1}{h}+h\right)e^{\frac{h}{1+h}} - \frac{1}{h}e^h = \tfrac{1}{h}\left((1+h)e^{h\times\frac{1}{1+h}} - e^h\right)\\ &\underset{(0)}{=} \tfrac{1}{h}\left((1+h)e^{h+o(h)} - e^h\right)\\ &\underset{(0)}{=} \tfrac{1}{h}((1+h)(1+h+o(h)) - (1+h+o(h)))\\ &\underset{(0)}{=} \tfrac{1}{h}(h+o(h)) = 1+o(1) \xrightarrow[h\to 0]{} 1\end{aligned}$$

20 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]a,b[$, telle que $f(a) = f(b)$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer qu'il existe des éléments distincts $c_1, \dots, c_n$ de $]a,b[$ tels que :

$$\sum_{k=1}^{n} f'(c_k) = 0.$$

Partager le segment $[a,b]$ en n segments.

On partage le segment $[a,b]$ en n segments de longueur $\frac{b-a}{n}$.
Pour ceci on définit, pour tout $k = 0, \dots, n$: $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$.
Soit $k \in \{1, \dots, n\}$ fixé. Comme la fonction f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ alors :

- f est continue sur $[x_{k-1}, x_k]$.
- f est dérivable sur $]x_{k-1}, x_k[$.

D'après le théorème des accroissements finis il existe $c_k \in]x_{k-1}, x_k[$ tel que :

$$f'(c_k) = \frac{f(x_{k1}) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

Comme $x_k - x_{k-1} = \frac{1}{n}$ ceci donne :

$$\forall k = 1, \dots, n \qquad f'(c_k) = n(f(x_k) - f(x_{k-1}))$$

Par somme télescopique :

$$\sum_{k=1}^{n} f'(c_k) = n\sum_{k=1}^{n} f(x_k) - f(x_{k-1}) = n(f(x_n) - f(x_0)) = n(f(b) - f(a)) = 0.$$

Comme $x_{k-1} < c_k < x_k$ pour tout $k = 1, \dots, n$ alors les c_k sont bien distincts.

21 Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

On suppose que $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = \ell > 0$.

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

La fonction f' admet en $+\infty$ la limite ℓ strictement postive donc elle est supérieure à $\frac{\ell}{2}$ au voisinage de $+\infty$.
Il existe donc $x_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \geqslant x_0$: $\quad f'(x) \geqslant \frac{\ell}{2}$.
Soit $x \in]x_0, +\infty[$.
La fonction f est dérivable donc elle est continue sur $[x_0, x]$ et dérivable sur $]x_0, x[$.
D'après le théorème des accroissements finis il existe $t_x \in]x_0, x[$ tel que :

$$f'(t_x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Comme $t_x > x_0$ alors $f'(t_x) \geqslant \frac{\ell}{2}$ et donc :

$$\forall x > x_0 \qquad f(x) \geqslant f(x_0) + \frac{\ell}{2}(x - x_0).$$

Par théorème de comparaison : $\quad f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.

22 Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dérivable.

a. Soit y un réel strictement compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$. Démontrer que la fonction $\varphi : x \mapsto f(x) - xy$ n'est pas injective.
b. En déduire que f' prend toutes les valeurs comprises entre $f'(a)$ et $f'(b)$.

a. Comme f est dérivable alors par somme la fonction φ est dérivable, de dérivée :

$$\forall x \in [a, b] \qquad \varphi'(x) = f'(x) - y.$$

On raisonne par l'absurde en supposant que la fonction φ est injective.

Comme elle est continue sur l'intervalle $[a, b]$ ceci implique qu'elle est strictement monotone, et donc sa dérivée est positive ou négative, *i.e.*, de signe constant.

Or $\varphi'(a) = f'(a) - y$ et $\varphi'(b) = f'(b) - y$. Comme y est strictement compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$ alors $\varphi'(a)$ et $\varphi'(b)$ sont non-nuls est de signes opposés. Ainsi φ' n'est pas de signe constant.

Cette contradiction montre que φ n'est pas injective.

b. Soit y un réel compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$.

Si $y = f'(a)$ ou $y = f'(b)$ alors il existe bien $c \in [a, b]$ tel que $f'(c) = y$.

Si y est strictement compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$ alors on considère la fonction φ de la question précédente.

On a démontré que cette fonction n'est pas injective, donc il existe deux réels x_1 et x_2 distincts dans $[a, b]$ tels que $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$.

Ceci donne $f(x_1) - yx_1 = f(x_2) - yx_2$, donc comme $x_1 \neq x_2$: $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = y$.
Quitte à inverser x_1 et x_2 on peut supposer $x_1 < x_2$.
La fonction f est continue sur $[x_1, x_2]$ et dérivable sur $]x_1, x_2[$, car elle est dérivable.
D'après le théorème des accroissements finis il existe $c \in \,]x_1, x_2[$ tel que $f'(c) = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$, et donc il existe $c \in [a, b]$ tel que $y = f'(c)$.
Ceci démontre que f' prend toutes les valeurs entre $f'(a)$ et $f'(b)$.

Ce résultat est le *théorème de Darboux* : si f est dérivable alors sa dérivée n'est pas obligatoirement continue mais elle vérifie quand même le théorème des valeurs intermédiaires.

$\boxed{23}$ On fixe un entier m et on note :

$$I_m = \left]m\pi - \frac{\pi}{2}, m\pi + \frac{\pi}{2}\right[$$

a. Démontrer qu'il existe un unique $\alpha_m \in I_m$ tel que : $\tan \alpha_m = \alpha_m$
b. Déterminer α_0, puis α_{-m} en fonction de α_m.

On suppose dorénavant que m est strictement positif et on pose : $h_m(x) = m\pi + \arctan x$

c. Démontrer que I_m est stable par h_m, et que h_m admet α_m pour unique point fixe.
d. Démontrer que h_m est *contractante* sur I_m, *i.e.*, k-lipschitzienne avec $|k| < 1$.
e. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = m\pi$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = h_m(u_n)$
Démontrer que (u_n) converge vers α_m.

a. La fonction $f_m : x \mapsto \tan x - x$ est continue, strictement croissante sur I_m, de limites $\pm\infty$, donc bijective de I_m dans $\mathbb{R}$.
b. On démontre que $\alpha_0 = 0$ et $\alpha_{-m} = -\alpha_m$ car $-I_m = I_{-m}$.
c. Comme $\arctan x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors I_m est stable par h_m.
On démontre que $h_m(x) = x$ équivaut à $\tan x = x$, donc x est point fixe de h_m si et seulement si $x = \alpha_m$.
d. $h'_m(x) = \frac{1}{1+x^2}$, majorée par $k_m = \frac{4}{4+\pi^2}$ sur I_m.
On applique l'inégalité des accroissements finis.
e. On démontre par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |u_n - \alpha_m| \leqslant k_m^n |u_0 - \alpha_m|$$

On applique ensuite le théorème d'encadrement.

24 Soit a et b deux fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un intervalle I et (E) l'équation différentielle :

$$y'(t) - a(t)y(t) = b(t)$$

a. Justifier que (E) possède des solutions.

b. Démontrer que ces solutions sont de classe $\mathscr{C}^\infty$.

a. Il s'agit du problème de Cauchy. Comme les fonctions a et b sont continues (car de classe $\mathscr{C}^\infty$), et I est un intervalle, alors l'équation différentielle (E) admet une solution.

Celle-ci serait uniquement déterminée si l'on adjoignait une condition initiale à l'équation différentielle.

b. Soit f une solution de l'équation (E). Ceci signifie que f est une fonction dérivable telle que : $\forall t \in I \quad f'(t) = a(t)f(t) + b(t)$

On démontre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction f est n fois dérivable.

Initialisation. La fonction f est dérivable car elle est solution de (E).

Hérédité. Supposons que f est dérivable n fois pour un entier $n > 0$.

Les fonctions a et b sont de classe $\mathscr{C}^\infty$. En conséquence les fonctions f, a et b sont dérivables n fois, donc par produit et somme la fonction $t \mapsto a(t)f(t)+b(t)$ est dérivable n fois.

Ainsi f' est dérivable n fois, donc f est dérivable $n+1$ fois. Ceci prouve l'hérédité.

Conclusion. Par récurrence, la fonction f est dérivable n fois pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Ceci signifie exactement que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

25 Calculer les dérivées successives des fonctions suivantes.

$f_1(x) = x^2 e^{2x}$ $\quad f_2(x) = \cos^2 x$ $\quad f_3(x) = \frac{1}{1-x}$

$f_4(x) = \frac{1-x}{1+x}$ $\quad f_5(x) = \cos 2x \sin 3x$ $\quad f_6(x) = \ln(2-3x)$

$f_7(x) = (x^2+4x+6)e^{-x}$ $\quad f_8(x) = x(x-2)^p \quad (p \in \mathbb{N})$

$f_1(x) = x^2 e^{2x}$

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad f_1^{(n)}(x) = \left(x^2 + nx + \frac{n(n-1)}{2}\right) 2^n e^{2x}$$

$f_2(x) = \cos^2 x$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad f_2^{(n)}(x) = 2^{n-1} \cos\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

$f_3(x) = \frac{1}{1-x}$

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad f_3^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

$f_4(x) = \frac{1-x}{1+x}$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad f_4^{(n)}(x) = \frac{2(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$$

$f_5(x) = \cos 2x \sin 3x$

Par linéarisation : $f_5(x) = \frac{1}{2}(\sin 5x + \sin x)$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad f_5^{(n)}(x) = \frac{1}{2}\Big(5^n \sin(5x + n\frac{\pi}{2}) + \sin(x + n\frac{\pi}{2})\Big)$$

$f_6(x) = \ln(2-3x)$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad f_6^{(n)}(x) = -\frac{3^n(n-1)!}{(2-3x)^n}$$

$f_7(x) = (x^2+4x+6)e^{-x}$

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad f_7^{(n)}(x) = (-1)^n(x^2 + (4-2n)x + (6-5n+n^2))e^{-x}$$

$f_8(x) = x(x-2)^p$ avec $p \in \mathbb{N}$

On pose $g(x) = x$ et $h(x) = (x-2)^p$. La formule de Leibniz donne :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad f_8^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)}(x) h^{(n-k)}(x)$$

Les dérivées successives de g sont $g^{(0)}(x) = x$, $g^{(1)}(x) = 1$, puis $g^{(k)}(x) = 0$ pour $k \geqslant 2$. On en déduit que si $n \geqslant 1$ alors :

$$f_8^{(n)}(x) = xh^{(n)}(x) + nh^{(n-1)}(x)$$

Si $1 \leqslant n \leqslant p$ alors :

$$\begin{aligned} f_8^{(n)}(x) &= x\frac{p!}{(p-n)!}(x-2)^{p-n} + n\frac{p!}{(p-n+1)!}(x-2)^{p-n+1} \\ &= \frac{p!}{(p-n+1)!}(x-2)^{p-n}[(p-n+1)x + n(x-2)] \\ &= \frac{p!}{(p-n+1)!}(x-2)^{p-n}[(p+1)x - 2n] \end{aligned}$$

Si $n = p+1$ alors :

$$f_8^{(n)}(x) = 0 + (p+1) \times p! = (p+1)!$$

Enfin si $n > p+1$ alors $f_8^{(n)}(x) = 0$.

On constate que la formule obtenue pour $n = 1, \dots, p$ est valable aussi pour $n = 0$ et $n = p+1$, donc finalement :

$$f_8^{(n)}(x) = \begin{cases} \dfrac{p!}{(p-n+1)!}(x-2)^{p-n}[(p+1)x - 2n] & \text{si } 0 \leqslant n \leqslant p+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

26 Calculer les dérivées successives de $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x \cos x \end{array}$ et $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x \sin x. \end{array}$

On pose $h = f + ig$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad h(x) = e^{(1+i)x}$
On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad h^{(n)}(x) = (1+i)^n e^{(1+i)x}$$

Puis :

$$h^{(n)}(x) = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n e^{(1+i)x} = 2^{\frac{n}{2}} e^{i\frac{n\pi}{4}} e^{(1+i)x} = 2^{\frac{n}{2}} e^x e^{i\left(x + \frac{n\pi}{4}\right)}$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad f^{(n)}(x) = 2^{\frac{n}{2}} e^x \cos\left(x + n\frac{\pi}{4}\right) \quad \text{et} \quad g^{(n)}(x) = 2^{\frac{n}{2}} e^x \sin\left(x + n\frac{\pi}{4}\right)$$

27 Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables n fois telles que :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} = 0.$$

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable n fois telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) = 0$$

Notons $g(x) = e^x$. Alors cette fonction est de classe $\mathscr{C}^\infty$, de dérivées successives $g^{(k)} = g$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) = 0.$$

D'après la formule de Leibniz :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad (fg)^{(n)}(x) = 0$$

On en déduit que la fonction $h = fg$ est polynomiale de degré au plus $n-1$.
Justifions ceci.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on note $\mathbb{R}_k[x]$ l'ensemble des fonctions polynomiales de degré au plus k, avec $\mathbb{R}_{-1}[x] = \{0\}$.
On définit la propriété $\mathscr{P}_k$: $h^{(n-k)}$ est polynomiale de degré au plus $k-1$, ie $h^{(n-k)} \in \mathbb{R}_{k-1}[x]$.
On démontre par récurrence finie que cette propriété est vraie pour tout $k \in \{0, n\}$.
<u>Initialisation.</u> Par hypothèse $h^{(n)} = 0$, donc $h^{(n)} \in \mathbb{R}_{-1}[x]$.

Hérédité. Si pour un $k \in \{0, \dots, n-1\}$ on a $h^{(n-k)} \in \mathbb{R}_{k-1}[x]$ alors $h^{(n-(k+1))}$ est une primitive de $h^{(n-k)}$, donc elle est polynomiale de degré au plus k.

Ceci car elle est définie sur $\mathbb{R}$ qui est un intervalle.

Conclusion. Par récurrence finie la propriété $\mathscr{P}_k$ est vraie pour tout $k \in \{0, \dots n\}$.

Elle est donc vraie pour $k = n$, et ainsi h est une fonction polynomiale de degré au plus $n-1$.

On en déduit que f est de la forme $f(x) = P(x)e^{-x}$ où $P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$.

Réciproquement si f est une telle fonction alors la fonction P vérifie $P^{(n)} = 0$, donc f est solution du problème.

Finalement l'ensemble des solutions est l'ensemble des fonctions $x \mapsto P(x)e^{-x}$ où P est une fonction polynomiale de degré au plus $n-1$.

28 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

En considérant les fonctions $f : x \mapsto e^{ax}$ et $g : x \mapsto e^{bx}$, vérifier que la formule du binôme est conséquence de la formule de Leibniz.

Les fonctions f et g sont de classe $\mathscr{C}^\infty$, de dérivées successives :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad f^{(n)}(x) = a^n e^{ax} \qquad \text{et} \qquad g^{(n)}(x) = b^n e^{bx}$$

D'après la formule de Leibniz les dérivées successives de la fonction fg sont :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

Ceci donne, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k e^{ax} b^{n-k} e^{bx} = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \right) e^{(a+b)x}.$$

Mais comme $(fg)(x) = e^{(a+b)x}$ alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad (fg)^{(n)}(x) = (a+b)^n e^{(a+b)x}$$

Pour $x = 0$ ceci donne :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Il s'agit de la formule du binôme.

On a donc bien démontré la formule du binôme en utilisant la formule de Leibniz.

En utilisant des fonctions de plusieurs variables il est possible de démontrer que la formule du binôme implique la formule de Leibniz, donc que ces deux formules sont équivalentes.

29 Déterminer les classes des fonctions suivantes, toutes définies sur $\mathbb{R}$.

$$f_1 : x \mapsto \begin{cases} \ln(x+1) & \text{si } x \geqslant 0 \\ \frac{x}{1-x} & \text{sinon} \end{cases} \qquad f_2 : x \mapsto |x|^3$$

$$f_3 : x \mapsto \begin{cases} x^3 \ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad f_4 : x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$$

$f_1 : x \mapsto \begin{cases} \ln(x+1) & \text{si } x \geqslant 0 \\ \frac{x}{1-x} & \text{sinon} \end{cases}$

Par composition et quotient cette fonction est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.

Ses premières dérivées sont :

$$f_1^{(1)}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & \text{si } x > 0 \\ \frac{1}{(x-1)^2} & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad f_1^{(2)}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{(x+1)^2} & \text{si } x > 0 \\ \frac{2}{(1-x)^3} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Étudions maintenant la classe de f_1 en 0.

Comme $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f_1(x) = 0$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f_1(x) = 0$ et $f_1(0) = 0$ alors f_1 est continue en 0.

Ceci implique que f_1 est continue sur $\mathbb{R}$, *i.e.*, elle est de classe $\mathscr{C}^0$.

Pour la dérivabilité on constate que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f_1'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f_1'(x) = 1$. Ainsi :

- f_1 est continue sur $\mathbb{R}$,
- f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}^*$,
- $\lim\limits_{x \to 0} f_1'(x) = 1$,

D'après le théorème de limite de la dérivée f_1 est dérivable en 0, de dérivée $f_1'(0) = 1$.

De plus $\lim\limits_{x \to 0} f_1'(x) = f_1'(0)$ donc f_1' est continue en 0.

Ainsi f_1 est de classe $\mathscr{C}^1$.

Pour la dérivabilité seconde, on calcule $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f_1''(x) = -1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f_1''(x) = 2$.

Ceci montre que f_1' n'est pas de classe $\mathscr{C}^2$ en 0. En fait d'après le théorème de limite de la dérivée elle est dérivable à gauche et à droite, mais de dérivées secondes différentes, donc elle n'est pas dérivable en 0.

En conclusion, f_1 est de classe $\mathscr{C}^1$ mais pas de classe $\mathscr{C}^2$.

$f_2 : x \mapsto |x|^3$

La fonction valeur absolue est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ donc par produit la fonction f_2 est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.

La dérivée de la fonction $x \mapsto |x|$ est $x \mapsto \frac{x}{|x|}$. On calcule alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad f_2'(x) = 3x|x| \qquad f_2''(x) = 6|x| \qquad f_2'''(x) = 6\frac{x}{|x|} \qquad f_2^{(4)}(x) = 0$$

Comme la fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$ alors la fonction f_2 est continue sur $\mathbb{R}$.

Le théorème de limite de la dérivée montre qu'elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec $f_2'(0) = 0$.

Le théorème de limite de la dérivée appliqué à f_2' montre que f_2 est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, avec $f_2''(0) = 0$.

La fonction f_2'' n'est pas dérivable en 0 donc f_2 n'est pas de classe $\mathscr{C}^3$.

Finalement la fonction f_2 est de classe $\mathscr{C}^2$ mais pas de classe $\mathscr{C}^3$.

$f_3 : x \mapsto \begin{cases} x^3 \ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Par produit cette fonction est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$. Ses premières dérivées sur cet ensemble sont :

$$f_3^{(0)}(x) = \begin{cases} x^3 \ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad f_3^{(1)}(x) = \begin{cases} 3x^2 \ln x + x^2 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$f_3^{(2)}(x) = \begin{cases} 6x \ln x + 5x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad f_3^{(3)}(x) = \begin{cases} 6 \ln x + 11 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

On sait par croissances comparées que pour tout $\alpha > 0$: $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha \ln x = 0$

On en déduit :

$$\lim_{x \to 0} f_3^{(0)}(x) = \lim_{x \to 0} f_3^{(1)}(x) = \lim_{x \to 0} f_3^{(2)}(x) = 0$$

On montre que la fonction f_3 est continue en 0 (car $f_3(0) = 0$), puis grâce au théorème de limite de la dérivée qu'elle est de classe $\mathscr{C}^1$ en 0 avec $f_3'(0) = 0$, puis qu'elle est de classe $\mathscr{C}^2$ en 0 avec $f_3''(0) = 0$, et enfin qu'elle n'est pas de classe $\mathscr{C}^3$.

Pour ce dernier point on peut aussi appliquer la définition de la dérivabilité :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f_3^{(2)}(x) - f_3^{(2)}(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} (6 \ln x + 5) = -\infty$$

Donc $f_3^{(2)}$ n'est pas dérivable à droite en 0, et *a fortiori* $f_3^{(2)}$ n'est pas dérivable.

En conséquence f_3 n'est pas trois fois dérivable, et donc f_3 est de classe $\mathscr{C}^2$.

$f_4 : x \mapsto \dfrac{x}{1 + |x|}$

Cette fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ mais n'est pas deux fois dérivable.

Elle est continue sur $\mathbb{R}$ par quotient de fonctions continues.

Elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$, ses deux premières dérivées sont :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad f_4'(x) = \frac{1}{(1 + |x|)^2} \qquad \text{et} \qquad f_4''(x) = \frac{-2x}{|x|(1 + |x|)^3}$$

Le théorème de limite de la dérivée montre que f_4 est dérivable en 0 de dérivée $f_4'(0) = 1$ et que sa dérivée n'est pas dérivable en 0.

30 Soit $f(x) = xe^{x^2}$.

a. Démontrer que f réalise une bijection de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
b. Justifier que f^{-1} admet un développement limité à tout ordre en 0 et donner ce développement limité à l'ordre 5.

a. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ par produit.
   On calcule $f'(x) = (2x^2+1)e^{x^2}$. cette dérivée est strictement positive.
   Ainsi f est strictement croissante, de plus elle est continue et ses limites en $+\infty$ et $-\infty$ sont respectivement $+\infty$ et $-\infty$, donc d'après le théorème de la bijection f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
b. Par théorème, comme f est dérivable alors f^{-1} est dérivable sur l'ensemble :

$$\left\{x \in \mathbb{R} \mid f'(f^{-1}(x)) \neq 0\right\}$$

La fonction f' étant strictement positive, f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Par théorème du cours, comme f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ alors sa réciproque f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur son ensemble de dérivabilité, et donc f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

La formule de Taylor-Young montre qu'alors f^{-1} admet un développement limité en tout point et à tout ordre.

On calcule $f(x) = x + x^3 + \frac{1}{2}x^5 + o_0(x^5)$.

On pose $f^{-1}(x) = a_0 + a_1x + \cdot + a_5x^5 + o_0(x^5)$.

Comme $f(0) = 0$ alors $f^{-1}(0) = 0$, donc $a_0 = 0$.

On calcule le développement limité de $f \circ f^{-1}$ en 0 à l'ordre 5 :

$$\begin{aligned} f \circ f^{-1}(x) = a_1x + a_2x^2 + (a_3 + a_1^3)x^3 + (a_4 + 3a_1^2a_2)x^4 \\ + \left(a_5 + 3a_1a_2^2 + 3a_1a_3 + \frac{a_1^5}{2}\right)x^5 + o_0(x^5). \end{aligned}$$

Or on sait que $f \circ f^{-1}(x) = x$. Par unicité du développement limité on obtient :

$$a_1 = 1 \qquad a_2 = 0 \qquad a_3 + a_1^3 = 0 \qquad a_4 + 3a_1^2a_2 = 0 \qquad a_5 + 3a_1a_2^2 + 3a_1a_3 + \frac{a_1^5}{2} = 0.$$

Ceci donne :

$$a_1 = 1 \qquad a_2 = 0 \qquad a_3 = -1 \qquad a_4 = 0 \qquad a_5 = \frac{5}{2}$$

Soit finalement :

$$f^{-1}(x) = x - x^3 + \frac{5}{2}x^5 + o_0(x^5).$$

$\boxed{\textbf{31}}$ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

a. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.
b. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un polynôme P_n tel que :

$$\forall x < 0 \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{\frac{1}{x}}$$

c. Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

a. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ car :

- la fonction $x \mapsto 0$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$
- par composition la fonction $x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_-^*$.

b. Soit $\mathscr{P}_n$ la proposition : il existe un polynôme P_n tel que :

$$\forall x < 0 \qquad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{\frac{1}{x}}$$

On démontre par récurrence que cette proposition est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Initialisation. La proposition $\mathscr{P}_0$ est vraie avec $P_0 = 1$. En effet, pour tout $x > 0$:

$$f^{(0)}(x) = e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^0} e^{\frac{1}{x}}$$

Hérédité. Supposons que la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors il existe un polynôme P_n tel que :

$$\forall x < 0 \qquad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{\frac{1}{x}}$$

Par produit et quotient la fonction $f^{(n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$. On calcule sa dérivée :

$$\forall x > 0 \qquad f^{(n+1)}(x) = \frac{x^2 P_n'(x) - (2nx+1)P_n(x)}{x^{2(n+1)}} e^{\frac{1}{x}}$$

Posons

$$P_{n+1} = X^2 P_n' - (2nX+1)P_n$$

Comme P_n est un polynôme alors P_{n+1} est un polynôme et :

$$\forall x < 0 \qquad f^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}(x)}{x^{2(n+1)}} e^{\frac{1}{x}}$$

La proposition $\mathscr{P}_{n+1}$ est démontrée.
Ceci prouve que la proposition $\mathscr{P}_n$ est héréditaire.
Conclusion. Par récurrence, la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c. On sait déjà que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$, démontrons que f est également de classe $\mathscr{C}^\infty$ en 0.

Pour ceci on considère la proposition :

$$\mathscr{P}_n : f \text{ est de classe } \mathscr{C}^n \text{ en } 0 \text{ et } f^{(n)}(0) = 0$$

On démontre par récurrence que cette proposition est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation. Comme $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} e^{\frac{1}{x}} = 0$ alors $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$, ce qui montre que f est continue en 0. La proposition $\mathscr{P}_0$ est vraie.

Hérédité. Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$ la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie. Alors la fonction $f^{(n)}$ est définie en 0 et $f^{(n)}(0) = 0$. De plus $f^{(n)}$ est continue en 0.

Démontrons que la fonction $f^{(n+1)}$ admet 0 pour limite en 0.

Tout d'abord $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f^{(n+1)}(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} 0 = 0$.

Ensuite d'après la question précédente il existe un polynôme P_{n+1} tel que :

$$\forall x < 0 \qquad f^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}(x)}{x^{2(n+1)}} e^{\frac{1}{x}}$$

En posant $y = \frac{1}{x}$ on obtient

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{1}{x^{2(n+1)}} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \to -\infty} y^{2(n+1)} e^y$$

Par croissances comparées cette limite est nulle. Comme $x \mapsto P_{n+1}(x)$ est une fonction polynomiale alors elle admet une limite finie en 0 et donc :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{P_{n+1}(x)}{x^{2(n+1)}} e^{\frac{1}{x}} = 0$$

Finalement :

$$\lim_{x \to 0} f^{(n+1)}(x) = 0$$

Ainsi on sait que :

- $f^{(n)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ par hypothèse de récurrence
- $f^{(n+1)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ car f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$
- $\lim\limits_{x \to 0} f^{(n+1)}(x) = 0$

D'après le théorème de limite de la dérivée $f^{(n)}$ est dérivable en 0 et $f^{(n+1)}(0) = 0$.

La fonction $f^{(n+1)}$ est continue en 0 car $\lim\limits_{x \to 0} f^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(0)$, donc f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ en 0. La propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est démontrée.

Ainsi la propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie au rang $n + 1$ si elle l'est au rang n.

Conclusion. Par récurrence, la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ceci implique que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ en 0, et finalement f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

32 Soit I un intervalle non réduit à un point. Déterminer les fonctions convexes et concaves sur I.

Soit a un point de I. Comme f est convexe et concave alors la fonction pente p_a est croissante et décroissante, donc constante.
Soit α sa valeur. Alors :

$$\forall x \in I \setminus \{a\} \qquad f(x) = f(a) + \alpha(x - a)$$

On remarque que cette égalité est valable aussi pour $x = a$.
Elle montre que f est affine : en posant $\beta = f(a) - \alpha a$ on obtient :

$$\forall x \in I \qquad f(x) = \alpha x + \beta$$

Réciproquement, si la fonction f est affine, *i.e.*, de la forme $f(x) = \alpha x + \beta$ alors toutes ses fonctions pentes s'écrivent $p_a(x) = \alpha$, elles sont constantes donc croissantes et décroissantes, et ainsi f est convexe et concave.
On a démontré que les fonctions convexes et concaves sont les fonctions affines, *i.e.*, les fonctions donc les courbes sont des droites.

33 Démontrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe majorée est constante.

Soit M un majorant de f. On peut alors majorer la fonction pente en 0 :

$$\begin{aligned} \forall x > 0 \qquad p_0(x) &= \frac{f(x) - f(0)}{x} \leqslant \frac{M - f(0)}{x} \\ \forall x < 0 \qquad p_0(x) &= \frac{f(x) - f(0)}{x} \geqslant \frac{M - f(0)}{x} \end{aligned}$$

Comme f est convexe alors la fonction p_0 est croissante. D'après le théorème de la limite monotone elle admet des limites en $-\infty$ et $+\infty$.
Comme $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{M - f(0)}{x} = 0$ alors par théorème de comparaison :

$$\lim_{x \to +\infty} p_0(x) \leqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to -\infty} p_0(x) \geqslant 0$$

De plus la limite de p_0 en $-\infty$ est sa borne inférieure et sa limite en $+\infty$ est sa borne supérieure, donc $\operatorname{Sup} p_0 \leqslant 0$ et $\operatorname{Inf} p_0 \geqslant 0$, ce qui montre que $\operatorname{Inf} p_0 = \operatorname{Sup} p_0 = 0$, donc p_0 est nulle sur $\mathbb{R}^*$.
On obtient : $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = f(0)$
Cette égalité est vraie aussi pour $x = 0$, donc f est constante.

34 Soit f une fonction convexe sur un intervalle I non réduit à un point.

a. Soit a et b deux points de I avec $a < b$.

Démontrer que la courbe de f est au-dessus de la corde reliant les points d'affixes a et b sur les intervalles $I \cap]-\infty, a]$ et $I \cap [b, +\infty[$.

b. On suppose que I est borné. Démontrer que f est minorée.

a. La fonction pente en a est croissante sur $I \setminus \{a\}$, donc :

$$\forall x \in I \setminus \{a\} \qquad \begin{array}{lcl} x \leqslant b & \Longrightarrow & p_a(x) \leqslant p_a(b) \\ x \geqslant b & \Longrightarrow & p_a(x) \geqslant p_a(b) \end{array}$$

Si $x < a$ alors $x \leqslant b$ et $x - a < 0$ donc : $f(x) \geqslant p_a(b)(x-a) + f(a)$.
Si $x \geqslant b$ alors $x > a$ puis $x - a > 0$ donc : $f(x) \geqslant p_a(b)(x-a) + f(a)$.
Ceci donne :

$$\forall x \in I \setminus \{a\} \qquad \begin{array}{lcl} x < a & \Longrightarrow & f(x) \geqslant p_a(b)(x-a) + f(a) \\ x \geqslant b & \Longrightarrow & f(x) \geqslant p_a(b)(x-a) + f(a) \end{array}$$

La corde reliant les points de coordonnées $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ admet pour équation $y = p_a(b)(x-a)+f(a)$, donc nous venons de démontrer que la courbe de f est au-dessus de cette corde sur les intervalles $I \cap]-\infty, a[$ et $I \cap]b, +\infty[$.

b. Soit a, b, c trois points de I avec $a < b < c$.

Soit $\mathscr{D}_1$ la corde reliant les points d'abscisses a et b,
$\mathscr{D}_2$ la corde reliant les points d'abscisses b et c.

D'après la question précédente la courbe de f est au-dessus de la droite $\mathscr{D}_1$ sur l'intervalle $I \cap [b, +\infty[$ et au-dessus de la droite $\mathscr{D}_2$ sur l'intervalle $I \cap]-\infty, b]$.

Les fonctions affines sont bornées sur un intervalle borné, donc f est minorée sur $I \cap [b, +\infty[$ et sur $I \cap]-\infty, b]$, et ainsi f est minorée sur I.

35 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tous réels strictement positifs $x_1, \ldots, x_n$ on définit :

$$A = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad G = \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \qquad H = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)^{-1}$$

a. Démontrer que $H \leqslant G \leqslant A$.

b. Démontrer que pour tout $(x, y, z) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^3$:

$$x^3 + y^3 + z^3 \geqslant 3xyz \qquad \text{et} \qquad (x + y + z)^3 \geqslant 27xyz$$

c. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sqrt[n]{n!} \leqslant \frac{n+1}{2}$$

a. On sait que la fonction ln est concave. En effet elle est deux fois dérivable, de dérivée seconde $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2}$, cette dérivée seconde est négative donc la fonction est concave. On applique l'inégalité de Jensen aux réels $x_1, \ldots, x_n$, avec les poids $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \frac{1}{n}$. Ces poids sont bien compris entre 0 et 1, de somme égale à 1. On obtient :

$$\ln\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k\right) \geqslant \sum_{k=1}^{n}\lambda_k \ln(x_k)$$

Par application de la fonction exponentielle, croissante, on obtient :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \geqslant e^{\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\ln(x_k)\right)} = \prod_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{n}\ln x_k} = \prod_{k=1}^{n} x_k^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k}$$

Ceci donne exactement $G \leqslant A$.

En remplaçant les x_i par $\frac{1}{x_i}$, lesquels sont bien des réels strictement positifs, on obtient :

$$\sqrt[n]{\frac{1}{x_1 \cdots x_n}} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}$$

Ceci donne $\frac{1}{G} \leqslant \frac{1}{H}$, donc $H \leqslant G$.

b. Pour $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ puis $(x_1, x_2, x_3) = (x^3, y^3, z^3)$ l'inégalité $G \leqslant A$ donne :

$$\sqrt[3]{xyz} \leqslant \tfrac{1}{3}(x + y + z) \qquad \text{et} \qquad xyz \leqslant \tfrac{1}{3}\left(x^3 + y^3 + z^3\right)$$

On en déduit :

$$(x + y + z)^3 \geqslant 27xyz \qquad \text{et} \qquad x^3 + y^3 + z^3 \geqslant 3xyz$$

c. Pour $(x_1, \ldots, x_n) = (1, 2, \ldots, n)$ l'inégalité $G \leqslant A$ donne exactement :

$$\sqrt[n]{n!} \leqslant \frac{n+1}{2}$$

La formule de Stirling donne quant à elle : $\quad \sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e}$

36 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ convexe dérivable. Démontrer que :

$$f(\tfrac{1}{2}) \leqslant \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \tfrac{f(0)+f(1)}{2}$$

La fonction f est convexe dérivable donc sa courbe située au-dessus de sa tangente en $\frac{1}{2}$ et en dessous de sa corde. Ceci s'écrit :

$$\forall t \in [0,1] \qquad f'(\tfrac{1}{2})(t-\tfrac{1}{2}) + f(\tfrac{1}{2}) \leqslant f(t) \leqslant (f(1)-f(0))t + f(0)$$

Par croissance de l'intégrale :

$$f'(\tfrac{1}{2})\int_0^1 (t-\tfrac{1}{2})\mathrm{d}t + \int_0^1 f(\tfrac{1}{2})\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant (f(1)-f(0))\int_0^1 t\,\mathrm{d}t + \int_0^1 f(0)\,\mathrm{d}t$$

Or :

$$\int_0^1 (t-\tfrac{1}{2})\mathrm{d}t = \left[\frac{(t-\frac{1}{2})^2}{2}\mathrm{d}t\right]_0^1 = 0 \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Ceci donne comme demandé : $f\left(\dfrac{1}{2}\right) \leqslant \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt \leqslant \dfrac{f(0)+f(1)}{2}$.

37 Soit $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ vérifiant $f(a) = f(b) = 0$.

a. Justifier que $|f''|$ admet une borne supérieure M.
b. Démontrer que :

$$\forall x \in [a,b] \qquad |f(x)| \leqslant \frac{M}{2}(x-a)(b-x)$$

On étudiera $f \pm g$ où $g(x) = \frac{M}{2}(x-a)(b-x)$.

a. Comme la fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ alors sa dérivée seconde f'' est continue.
   Par théorème, une fonction continue sur un segment est bornée, donc la fonction f'' est bornée sur le segment $[a,b]$, et ainsi la fonction $|f''|$ admet une borne supérieure sur ce segment, laquelle est atteinte.
b. Posons $g(x) = \frac{M}{2}(x-a)(b-x)$.
   Cette fonction est deux fois dérivable, de dérivée seconde $g''(x) = -M$.
   Les fonctions $h = f - g$ et $k = f + g$ sont deux fois dérivables, de dérivées secondes $h''(x) = f''(x) + M$ et $k''(x) = f''(x) - M$.
   Or par définition de M on a $-M \leqslant f''(x) \leqslant M$ pour tout $x \in [a,b]$, donc $h''(x) \geqslant 0$ et $k''(x) \leqslant 0$.
   La fonction h est donc convexe alors que la fonction k est concave.
   Or $h(a) = h(b) = k(a) = k(b)$, donc la corde reliant les points d'abscisses a et b est l'axe des abscisses. Comme h est convexe alors la corde est au-dessus de sa courbe, comme k est concave alors la corde est en-dessous de sa courbe.
   On en déduit : $\forall x \in [a,b] \quad h(x) \leqslant 0 \leqslant k(x)$
   Puis : $\forall x \in [a,b] \quad -g(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$

Enfin : $\forall x \in [a,b] \quad |f(x)| \leqslant g(x)$

Ceci est le résultat demandé.

38 Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction convexe sur $]a,b[$ et continue en a.

Démontrer que f est convexe sur $[a,b[$.

On utilise la définition de la convexité.

On démontre que pour tout $(x,y) \in [a,b[^2$ et $\lambda \in [0,1]$:

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

Comme f est convexe sur $]a,b[$ alors ce résultat est valable si $(x,y) \in]a,b[^2$. Il reste à le démontrer si $x = a$.

Soit $y \in]a,b[$ et $\lambda \in]0,1[$ fixé. Démontrons que :

$$f((1-\lambda)a + \lambda y) \leqslant (1-\lambda)f(a) + \lambda f(y).$$

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $]a,b[$ convergeant vers a.

Comme f est convexe sur $]a,b[$ alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad f((1-\lambda)a_n + \lambda y) \leqslant (1-\lambda)f(a_n) + \lambda f(y).$$

Comme f est continue en a alors : $f(a_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a)$.

De plus $(1-\lambda)a_n + \lambda y \xrightarrow[n\to+\infty]{} (1-\lambda)a + \lambda y$. Comme f est convexe sur $]a,b[$ qui est ouvert alors f est continue sur $]a,b[$, donc par composition de limites :

$$f((1-\lambda)a_n + \lambda y) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f((1-\lambda)a + \lambda y).$$

Par théorème de comparaison :

$$f((1-\lambda)a + \lambda y) \leqslant (1-\lambda)f(a) + \lambda f(y).$$

On en déduit que f est convexe sur $[a,b[$.

$\boxed{\mathbf{39}}$ Soit p et q deux réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Démontrer que pour tout $(a,b)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$: $\quad ab\leqslant\dfrac{a^p}{p}+\dfrac{b^q}{q}$.

Méthode 1.
Comme $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ alors pour toute fonction concave f sur un intervalle I on a :

$$\forall(x,y)\in I^2\qquad f\left(\frac{x}{p}+\frac{y}{q}\right)\geqslant\frac{f(x)}{p}+\frac{f(y)}{q}.$$

La fonction logarithme népérien est concave sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$. En effet elle est deux fois dérivable, de dérivée seconde $\ln'':x\mapsto-\frac{1}{x^2}$, laquelle est négative.
Soit a et b deux réels strictement positifs. Soit $x=a^p$ et y^q. Alors :

$$\ln\left(\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\right)\geqslant\frac{1}{p}\ln\left(a^p\right)+\frac{1}{q}\ln\left(b^q\right)$$

En appliquant la fonction exponentielle, qui est croissante, on obtient :

$$ab\leqslant\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}.$$

Il s'agit de la formule demandée.

Méthode 2. Fixons $b\in\mathbb{R}_+^*$ et posons :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*\qquad f(x)=\frac{x^p}{p}+\frac{b^q}{q}-bx.$$

Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée : $\quad\forall x\in\mathbb{R}_+^*\quad f'(x)=x^{p-1}-b$.
Cette dérivée s'annule en $x=b^{\frac{1}{p-1}}$.
Comme $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ alors $p-1$ est bien non-nul, et de plus on calcule que $\frac{1}{p-1}=q-1$, donc la fonction f' s'annule en b^{q-1}.
Plus précisément la fonction f est décroissante sur $]0,b^{q-1}]$ et croissante sur $[b^{q-1},+\infty[$.
On calcule $f(b^{q-1})=\frac{b^{(q-1)p}}{p}+\frac{b^q}{q}-b^q$.
On obtient $(q-1)p=q$, donc $f(b^{q-1})=0$, et la fonction f est positive sur $\mathbb{R}_+^*$.
Ceci donne la formule demandée.

40 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable. Démontrer que si

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad \text{et} \quad f(b) = 0$$

alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

On définit la propriété :

$$\mathscr{P}_k : \qquad \exists b_k \in]a, b] \quad f^{(k)}(b_k) = 0$$

On démontre par récurrence finie que cette propriété est vraie pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$

Initialisation. On pose $b_0 = b$. Alors $f(b_0) = 0$ donc la propriété $\mathscr{P}_0$ est vraie.

Hérédité. Supposons que pour un certain $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ la propriété $\mathscr{P}_k$ est vraie, *i.e.*, il existe un entier $b_k \in]a, b]$ tel que $f^{(k)}(b_k) = 0$.

On applique le théorème de Rolle à la fonction $f^{(k)}$ sur l'intervalle $[a, b_k]$.

Par énoncé la fonction f est n fois dérivable sur l'intervalle $[a, b]$. Comme $k < n$ alors $f^{(k)}$ est dérivable sur $[a, b]$. Or $[a, b_k] \subseteq [a, b]$, donc par restriction :

- La fonction $f^{(k)}$ est continue sur $[a, b_k]$.
- La fonction $f^{(k)}$ est dérivable sur $]a, b_k[$.
- $f^{(k)}(a) = 0$ par énoncé, car $k \leqslant n-1$, et $f^{(k)}(b_k) = 0$ par hypothèse de récurrence. Donc $f^{(k)}(a) = f^{(k)}(b_k)$.

D'après le théorème de Rolle il existe $b_{k+1} \in]a, b_k[$ tel que $f^{(k+1)}(b_{k+1}) = 0$.

Ainsi la Propriété $\mathscr{P}_{k+1}$ est valide si la propriété $\mathscr{P}_k$ l'est. L'hérédité est prouvée.

Conclusion. Par récurrence finie la propriété $\mathscr{P}_k$ est vraie pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$.

De plus on a démontré que $a < b_n < b_{n-1} < \cdots < b_1 < b_0 = b$, donc $b_n \in]a, b[$.

La propriété $\mathscr{P}_n$ étant vraie, en notant $c = b_n$ on obtient qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

41 Une généralisation du théorème de Rolle.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable, de limites $+\infty$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

a. Démontrer qu'il existe deux réels A et B tels que $A < B$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$x \notin [A, B] \quad \Longrightarrow \quad f(x) \geqslant f(0) + 1.$$

b. En déduire qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

Autre démonstration. On définit sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ la fonction $g = \arctan \circ f \circ \tan$.

c. Démontrer que g est bien définie et qu'elle est prolongeable par continuité à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

d. Démontrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

a. Comme $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ et $f(0) + 1 \in \mathbb{R}$ alors par définition il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad x \geqslant B \quad \Longrightarrow \quad f(x) \geqslant f(0) + 1.$$

Comme $f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty$ et $f(0) + 1 \in \mathbb{R}$ alors par définition il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad x \leqslant A \quad \Longrightarrow \quad f(x) \geqslant f(0) + 1.$$

On ne peut avoir $0 \geqslant B$ car sinon on aurait $f(0) \geqslant f(0) + 1$, ce qui est faux. Ainsi $0 < B$.

De même $0 > A$. donc $A < 0 < B$, et ainsi $A < B$.

Si x n'appartient pas au segment $[A, B]$ alors $x < A$ ou $x > B$, dans les deux cas on a $f(x) \geqslant f(0) + 1$.

b. D'après le théorème des valeurs extrêmes une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Or f est continue sur le segment $[A, B]$, donc f admet un minimum m sur $[A, B]$, atteint en un point c :

$$\exists c \in [A, B] \quad f(c) = m = \operatorname*{Min}_{[A,B]} f$$

Comme $0 \in [A, B]$ alors $m \leqslant f(0)$. Par construction $f(A) > f(0)$ et $f(B) > f(0)$, donc $f(A) \neq m$ et $f(B) \neq m$. Ainsi $f(c) \neq f(A)$ et $f(c) \neq f(B)$, donc $c \neq A$ et $c \neq B$.

Or $c \in [A, B]$, donc $c \in \left]A, B\right[$, *i.e.*, c est un point intérieur à $[A, B]$.

Donc f présente un minimum local en c, et par théorème $f'(c) = 0$.

Il existe donc $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

c. La fonction tangente est bien définie sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, les fonctions f et arctangente sont définies sur $\mathbb{R}$, donc par composition $g = \arctan \circ f \circ \tan$ est bien définie sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Comme $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ <}} \tan x = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -\frac{\pi}{2} \\ >}} \tan x = -\infty$, alors par composition de limites :

$$g(x) \xrightarrow[x \to \frac{\pi}{2}]{} \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad g(x) \xrightarrow[x \to -\frac{\pi}{2}]{} \frac{\pi}{2}$$

On peut donc prolonger g par continuité à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ en posant $g(-\frac{\pi}{2}) = g(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$.

d. Par composition la fonction g est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ de dérivée :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\qquad g'(x) = (1+\tan^2 x) f'(\tan x) \frac{1}{1+f^2(\tan x)}$$

Les hypothèses suivantes sont donc vérifiées :

- La fonction g est continue sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
- La fonction g est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
- $g(-\frac{\pi}{2}) = g(\frac{\pi}{2})$.

D'après le théorème de Rolle il existe $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $g'(\alpha) = 0$.

Comme $1 + \tan^2 \alpha \neq 0$ alors ceci donne $f'(\tan \alpha) = 0$.

En posant $c = \tan \alpha$ on obtient bien un réel c tel que $f'(c) = 0$.

42 Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ $(n \geqslant 0)$ et x un réel strictement positif.

a. Démontrer qu'il existe un réel A tel que :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{x^n}{n!} A$$

b. En utilisant la fonction φ définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\varphi(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x-t)^k - \frac{(x-t)^n}{n!} A$$

démontrer qu'il existe un réel $c \in]0, x[$ tel que :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(c)$$

a. Il suffit de poser :

$$A = \frac{n!}{x^n} \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right)$$

Ce réel est bien défini car f est de classe $\mathscr{C}^n$ et x est non-nul

b. La fonction φ est bien définie car f est de classe $\mathscr{C}^n$.

On remarque que par définition de A :

$$\varphi(0) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k - \frac{x^n}{n!} A = 0$$

D'autre part, si $t = x$ alors le terme $(x-t)^k$ s'annule pour tout $k \geqslant 1$ mais il vaut 1 si $k = 0$, ce qui montre que :

$$\varphi(x) = f(x) - f(x) = 0$$

On applique le théorème de Rolle à la fonction φ sur l'intervalle $[0, x]$.

Les fonctions $f^{(k)}$ sont dérivables pour tout $k = 0, \ldots, n-1$, donc par produit et somme la fonction φ est dérivable.

Elle est donc continue sur $[0,x]$ et dérivable sur $]0,x[$.
Comme $\varphi(0)=\varphi(x)$ alors par théorème de Rolle il existe $c\in\,]0,x[$ tel que $\varphi'(c)=0$
On calcule :

$$\begin{aligned}\forall t\in\mathbb{R}_+\qquad \varphi'(t)&=-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}+\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}A\\&=-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k+\sum_{k=0}^{n-2}\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k+\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}A\\&=-\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}+\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}A\end{aligned}$$

Comme $c\in\,]0,x[$ alors $x-c\neq 0$, et donc l'égalité $\varphi'(c)=0$ donne $A=f^{(n)}(c)$.
On a donc démontré qu'il existe $c\in\,]0,x[$ tel que :

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(c).$$

Ce résultat est connu sous le nom d'*égalité de Taylor-Lagrange.*

43 Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.
On suppose que f s'annule en un nombre infini de points.
Démontrer qu'il existe $c\in[a,b]$ tel que $f(c)=f'(c)=0$.

Il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments distincts de $[a,b]$ tels que $f(u_n)=0$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est incluse dans le segment $[a,b]$, donc bornée.
D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass il existe une suite extraite de (u_n) convergente.
On note $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cette nouvelle suite, et c sa limite.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $a\leqslant v_n\leqslant b$. Par théorème de comparaison $a\leqslant c\leqslant b$, donc $c\in[a,b]$, et $f(c)$ est défini.
De plus comme f est continue alors la suite $(f(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(c)$.
Or $f(v_n)=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, donc la suite $(f(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, et ainsi $f(c)=0$.
On applique le théorème de Rolle sur chaque intervalle $[v_n,v_{n+1}]$, ou $[v_{n+1},v_n]$.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, comme f est dérivable et $f(v_n)=f(v_{n+1})$ alors il existe w_n entre v_n et v_{n+1} tel que $f'(w_n)=0$.
Par théorème d'encadrement, comme les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers c alors la suite (w_n) converge vers c.
Comme f' est continue alors la suite $(f'(w_n))$ converge vers $f'(c)$. Comme $f'(w_n)=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ alors la suite $(f'(w_n))$ converge vers 0 et donc $f'(c)=0$.
Il existe bien $c\in[a,b]$ tel que $f(c)=f'(c)=0$.