

TD. B10 Dimension

Exercices de cours

- ① Soit $E = \mathbb{R}^3$, $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$ avec :
- $$u_1 = (3, 10, 10) \quad u_2 = (6, 7, -6)$$
- Enfin soit $G = \{(x, y, z) \in E \mid 10x - 6y + 3z = 0\}$.
- Donner la dimension de F et démontrer qu'il est inclus dans G .
 - Justifier que G ne peut être de dimension 3 et en déduire que $F = G$.
- ② Soit $E = \mathbb{R}^4$. Déterminer le rang des familles de vecteurs suivantes :
- $$\mathcal{F}_1 = ((1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1))$$
- $$\mathcal{F}_2 = ((1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 0))$$
- $$\mathcal{F}_3 = \emptyset$$
- $$\mathcal{F}_4 = ((1, 0, 0, 0), (2, 0, 0, 0), \dots, (n, 0, 0, 0)) \quad n \in \mathbb{N}^*$$
- $$\mathcal{F}_5 = ((1, 0, 0, 0), (2, 1, 0, 0), (3, 2, 1, 0), (4, 3, 2, 1), (5, 4, 3, 2))$$

- ③ Démontrer qu'il existe une unique forme linéaire $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\varphi(1, 1, 1) = 3 \quad \varphi(1, 2, 3) = 5 \quad \varphi(1, 3, 6) = -2$$

Calculer $\varphi(u)$ pour tout élément $u = (x, y, z)$ de \mathbb{R}^3 .

- ④ Soit f l'application linéaire définie par

$$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z, t) \longmapsto \begin{pmatrix} 3x + 3y + 3z + 3t, \\ 3x - 3y + z + t, \\ 2x + 2y + z + t \end{pmatrix}$$

Calculer le noyau de f et démontrer que f est surjective.

Travaux dirigés

- ① Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$ on considère les sous-espaces vectoriels :

$$F = \{(x, y, z, t) \in E \mid 3x - y - z = 2y + t = 0\}$$

$$G = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3) \quad \text{où} \quad \begin{aligned} v_1 &= (1, -1, 2, 2) \\ v_2 &= (2, 1, 4, -2) \\ v_3 &= (1, 2, 2, -4) \end{aligned}$$

Donner une base et la dimension des sous-espaces vectoriels F , G , $F \cap G$, et $F + G$.

- ② Dans $E = \mathbb{R}^3$ on note F le sous-espace vectoriel engendré par $u_1 = (7, 5, 0)$ et $u_2 = (6, 10, 5)$.

a. Démontrer que F est le plan vectoriel d'équation $5x - 7y + 8z = 0$.

b. Soit G la droite vectorielle engendrée par le vecteur $u_3 = (8, 9, 3)$. Démontrer que G est un supplémentaire de F dans E .

- ③ Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$ on considère la famille \mathcal{F} composée des vecteurs :

$$u_1 = (1, -1, -1, -1)$$

$$u_2 = (2, 0, 2, 0)$$

$$u_3 = (-1, -1, 2, -1)$$

- Démontrer que cette famille est libre.
- Soit G l'ensemble des vecteurs (x, y, z, t) tels que $y = t$. Démontrer que $\text{Vect } \mathcal{F} = G$ par inclusion puis en raisonnant sur la dimension.
- Compléter \mathcal{F} en une base de E .

- ④ Soit $E = \mathbb{R}^4$ et F, G, H les sous-ensembles de E d'équations respectives :

$$F : x - 2y + 2t = 3y + z = 0$$

$$G : 4x - 2y + z = 2x + z + 2t = 0$$

$$H : x + t = x - y - z = 0$$

- Justifier que F, G, H sont des sous-espaces vectoriels de E et donner leurs dimensions.
- Calculer $F \cap G$ et $F \cap H$.
- En déduire que $F + G = E$, puis démontrer que $F + H$ est le sous-ensemble de E d'équation $x + y + z + 2t = 0$.

- ⑤ Soit $E = \mathbb{R}^4$ puis :

$$F = \{(x, y, z, t) \in E \mid x - y + z - t = 0\}$$

- Déterminer la dimension de F .
- Soit G le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs $u_1 = (1, 2, 3, 4)$ et $u_2 = (4, 3, 2, 1)$.
- Démontrer que $F + G = E$. En déduire la dimension de $F \cap G$.
 - Déterminer une base d'un supplémentaire de $F \cap G$ dans F .

- ⑥ Soit H et H' deux hyperplans distincts d'un espace vectoriel E de dimension $n \geq 2$.

Déterminer $H + H'$ et en déduire la dimension de $H \cap H'$.

- ⑦ Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ puis :

$$F = \{P \in E \mid P(1) = P(2) = 0\}$$

- Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E et en donner une base.
- Démontrer que $\mathbb{R}_1[X]$ est un supplémentaire de F dans E .

8 Soit n un entier naturel. On note $\mathcal{M} = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, puis \mathcal{T} et \mathcal{T}' les sous-espaces vectoriels de \mathcal{M} contenant les matrices respectivement triangulaires supérieures et triangulaires inférieures.

- Déterminer les sous-espaces $\mathcal{T} + \mathcal{T}'$ et $\mathcal{T} \cap \mathcal{T}'$, donner leurs dimensions.
- Démontrer que l'application $M \mapsto {}^t M$ est un automorphisme de \mathcal{M} .
Quelle est l'image de \mathcal{T} par cet automorphisme ?
- Déduire des deux questions précédentes la dimension de \mathcal{T} et de \mathcal{T}' .
- Retrouver ce résultat directement en exhibant des bases de \mathcal{T} et \mathcal{T}' .

9 Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on définit sur \mathbb{R} :

$$f_k : t \mapsto \cos^k t \quad \text{et} \quad g_k : t \mapsto \cos(kt)$$

- Démontrer que la famille $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est libre.
- Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$f_n \in \text{Vect}(g_0, \dots, g_n)$$
- Déduire des questions précédentes que la famille $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est libre.

10 On définit les applications :

$$f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x_1, \dots, x_5) \longmapsto (x_1 + 2x_2, x_1 - 2x_2 - 2x_3, \\ x_2 + x_3 - x_4, 2x_2 - 2x_4 + x_5)$$

$$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z) \longmapsto (4y - z, 3x + 2y + z, \\ -3x + 2y - 2z, x - 6y + z)$$

En utilisant le théorème du rang :

- Démontrer que f est surjective.
- Démontrer que l'image de g est un hyperplan.

11 Soit n un entier positif non-nul et f l'endomorphisme de \mathbb{R}^n défini par :

$$f(x_1, \dots, x_n) = (x_2, x_3, \dots, x_n, x_1)$$

Déterminer le rang de f puis de celui de $g = \text{Id} - f$.

12 Pour tout $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ on note :

$$\varphi(y) = y'' - 4y' + 20y$$

- Justifier que φ est une application linéaire de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.
- Déterminer le noyau de φ .
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On note $\mathbb{R}_n[x]$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n , et $\psi : \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}_n[x]$
$$y \longmapsto \varphi(y).$$

Démontrer que ψ est bien définie puis que c'est un automorphisme.

13 Soit n un entier naturel strictement positif.

- Soit a, b_0, \dots, b_n des scalaires.

Démontrer qu'il existe un et un seul polynôme P de degré au plus n tel que :

$$\forall k = 0, \dots, n \quad P^{(k)}(a) = b_k$$

- Soit $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ des scalaires distincts, β_0, \dots, β_n des scalaires quelconques.

Démontrer qu'il existe un et un seul polynôme P de degré au plus n tel que :

$$\forall k = 0, \dots, n \quad P(\alpha_k) = \beta_k$$

14 Soit n un entier naturel. On considère \mathcal{S} et \mathcal{A} les sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M} = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contenant les matrices respectivement symétriques et antisymétriques. On définit l'application :

$$f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M} \\ M \longmapsto \frac{1}{2}(M + {}^t M)$$

- Démontrer que \mathcal{S} et \mathcal{A} sont l'image et le noyau de f .
- Démontrer que f est un projecteur.
Que peut-on en déduire au sujet de \mathcal{S} et \mathcal{A} ?
Quelle est la symétrie associée à f ?
- Déterminer les dimensions de \mathcal{S} et de \mathcal{A} . Vérifier que leur somme donne le résultat attendu.

15 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{rg } f = \text{rg}(f \circ f)$.

- Démontrer que $\text{im } f = \text{im } f \circ f$ et $\text{ker } f = \text{ker } f \circ f$.
- Démontrer que $E = \text{im } f \oplus \text{ker } f$.
- Réciproquement, démontrer que si $\text{im } f$ et $\text{ker } f$ sont supplémentaires dans E alors $\text{rg } f = \text{rg } f \circ f$.

16 Soit f et g deux endomorphismes de E , espace vectoriel de dimension finie n , tels que $f \circ f = 0$ et $f \circ g + g \circ f = \text{Id}_E$. Démontrer que n est pair.

17 Soit E un espace vectoriel de dimension paire.

- Démontrer qu'il existe un endomorphisme f de E tel que $\text{ker } f = \text{im } f$.
- Plus généralement, si E est de dimension quelconque, F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\dim F + \dim G = \dim E$, démontrer qu'il existe $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $F = \text{ker } f$ et $G = \text{im } f$.

18 Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f, g deux endomorphismes de E tels que $f + g$ est bijectif.

- Démontrer que :

$$\text{im } f + \text{im } g = E \quad \text{et} \quad \text{ker } f \cap \text{ker } g = \{0_E\}$$

- On suppose de plus que $f \circ g = 0$.

Démontrer que $\text{im } g = \text{ker } f$, et que $\text{ker } g$ et $\text{im } f$ en sont deux supplémentaires.

19 Soit n et p deux entiers tels que $1 \leq p \leq n$, et B un polynôme fixé de degré p . On définit :

$$f : \mathbb{K}_{n-p}[X] \times \mathbb{K}_{p-1}[X] \longrightarrow \mathbb{K}_n[X] \\ (Q, R) \longmapsto BQ + R$$

- Démontrer que f est bien définie et linéaire.
- Exprimer le degré de $f(Q, R)$ en fonction de ceux de Q et de R . En déduire le noyau de f .
- Démontrer que f est un isomorphisme.
Quel théorème retrouve-t-on ?

20 Soit $\Delta : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[X]$
 $P \longmapsto P(X) - P(X - 1)$.

- Démontrer que Δ est linéaire.
- Déterminer son noyau.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et Δ_n la restriction de Δ à $\mathbb{K}_n[X]$.
Démontrer que $\text{im } \Delta_n = \mathbb{K}_{n-1}[X]$.
- En déduire que Δ est surjective.

21 Soit A une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\mathbb{K}[A]$ l'ensemble des polynômes en A : $\mathbb{K}[A] = \{P(A) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$.

- Justifier que $\mathbb{K}[A]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- En considérant l'application $M \mapsto AM$, démontrer que A^{-1} est un polynôme en A .

22 Soit E un espace vectoriel de dimension finie non-nulle.

À toute forme linéaire φ sur E et tout vecteur a de E on associe l'application $\varphi_a : u \mapsto \varphi(u)a$.

- Justifier que φ_a est un endomorphisme de E .
- On suppose que φ et a ne sont pas nuls.
Démontrer que $\text{rg}(\varphi_a) = 1$, et donner une condition nécessaire et suffisante pour que φ_a soit un projecteur.
- Soit f un endomorphisme de E de rang 1.
Démontrer qu'il existe $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ et $a \in E$ tels que $f = \varphi_a$.

23 Soit E, F, G trois espaces vectoriels de dimensions finies. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$ et $h \in \mathcal{L}(E, G)$.

- Démontrer que si $h = g \circ f$ alors $\text{im } h \subseteq \text{im } g$ et $\ker f \subseteq \ker h$.

On suppose que $\text{im } h \subseteq \text{im } g$. Le but de la suite est de démontrer qu'il existe $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que $h = g \circ \varphi$.

- Soit (w_1, \dots, w_m) une base de $\text{im } h$. Démontrer que chaque w_i possède un antécédent u_i par h et v_i par g .
- Soit $E_1 = \text{Vect}(u_1, \dots, u_m)$. Démontrer que E_1 est un supplémentaire de $\ker h$ dans E .
- Construire une application linéaire $\varphi : E \rightarrow F$ vérifiant $h = g \circ \varphi$.

On suppose maintenant que $\ker f \subseteq \ker h$.

- Construire une application linéaire $\psi : F \rightarrow G$ telle que $h = \psi \circ f$.

24 Soit n et m deux entiers avec $0 \leq m \leq n$.

Soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ une famille de m formes linéaires non-nulles de E , espace vectoriel de dimension n .

Pour tout $k = 1, \dots, m$ on note $H_k = \ker \varphi_k$.

Soit $F = H_1 \cap \dots \cap H_m$.

Le but de cet exercice est de démontrer que F est de dimension $n - m$ si et seulement si la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ est libre.

On définit l'application

$$f : E \longrightarrow \mathbb{K}^m \\ u \longmapsto (\varphi_1(u), \dots, \varphi_m(u))$$

- Justifier que f est linéaire, déterminer son noyau. Minorer la dimension de ce noyau.
- Justifier que si $\dim F = n - m$ alors pour tout $k = 1, \dots, m$, le vecteur e_k de \mathbb{K}^m possède un antécédent u_k par f .
En déduire que la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ est libre.
- Démontrer que si $\text{rg } f < m$ alors $\text{im } f$ est inclus dans un hyperplan H de \mathbb{K}^m . En déduire que la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ est liée.
- Conclure.