

TD. A8

Développements limités

Exercices de cours

1) Donner un développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$.

2) Calculer par produit le développement limité de $e^x(1+e^{2x})$ en 0 à l'ordre 4 et vérifier ainsi l'un des développements limités calculés précédemment.

3) Donner les développements limités de $\frac{1}{1+x}$ et de $\frac{1}{1-x}$ à l'ordre 5. Calculer la somme, puis le produit de ces développements limités et vérifier ainsi deux fois l'un des développements limités calculés précédemment.

4) Donner un développement limité de $\cos(2x)$ en 0 à l'ordre 6 en utilisant le développement limité de $\cos u$, puis la formule $\cos(2x) = 1 - 2 \sin^2 x$.

5) Calculer les développements limités de :

a. e^{2+x} en 0 à l'ordre 3

b. $\sqrt{4+x}$ en 0 à l'ordre 2.

6) Donner les développements limités des fonctions suivantes en 0 à l'ordre 3 :

a. $\ln(e^{-x} + 1)$ b. $\frac{1}{\cos x - \sin x}$

7) Donner un développement limité en 4 à l'ordre 2 de $f : x \mapsto \sqrt{x+5}$.

8) À l'aide de la formule de Taylor-Young, donner le développement limité de la fonction \sin en $a = -\frac{\pi}{4}$ à l'ordre 3.

9) Calculer :

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x - e^{-x})}{e^x + e^{-x} - 2}$ b. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2-x}}{\ln(x) - \ln(2-x)}$

10) On considère : $f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$.

a. Donner un développement limité de $g(h) = \frac{1}{(1+h)^2}$ à l'ordre 3 en 0.

b. Donner un développement limite de f en 0 et en 1 à l'ordre 2.

c. Donner un développement limite de f en 2 à l'ordre 3.

Dans ces trois cas, donner la tangente à la courbe de f et la position de la courbe par rapport à cette tangente.

11) Donner un développement limité en 2 à l'ordre 1 de :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{x+7} - 3}.$$

Démontrer que f est prolongeable par continuité en 2 et que ce prolongement par continuité est dérivable.

12) Décrire le comportement asymptotique en $+\infty$ de :

$$f(x) = \sqrt{1+x+x^2}.$$

13) Décrire le comportement asymptotique de la suite :

$$u_n = \left(\frac{n + \ln n}{n} \right)^n.$$

14) Donner un équivalent en $+\infty$ de $\binom{2n}{n}$.

Travaux dirigés

1) Calculer, dans chacun des cas suivants, le développement limité à l'ordre n de $f_i(x)$ en 0.

$n = 5 \quad f_1(x) = \sin(x - x^2)$

$n = 4 \quad f_2(x) = e^{\frac{x}{2}} \sin 2x$

$n = 6 \quad f_3(x) = (1 - \cos x)^2$

$n = 6 \quad f_4(x) = \arccos x$

$n = 2 \quad f_5(x) = \frac{x^2}{x - \ln(1+x)}$

$n = 5 \quad f_6(x) = \frac{\arcsin 2x}{x}$

$n = 3 \quad f_7(x) = \ln(1 + x\sqrt{1+6x})$

$n = 5 \quad f_8(x) = \operatorname{th} x$

$n = 6 \quad f_9(x) = \cos^5 x$

$n = 6 \quad f_{10}(x) = \int_0^x e^{-t^2/2} dt$

$n = 5 \quad f_{11}(x) = \arctan 2x + \ln \frac{1-x}{1+x}$

2) Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f(x) = o(x^n)$

b. Démontrer que f admet un développement limité en 0 à tout ordre mais que ce développement limité est nul.

3 Développement limité de la tangente en 0.

- Donner le développement limité de la fonction tangente en 0 à l'ordre 0.
- Sachant que $\tan' x = 1 + \tan^2 x$, calculer par intégrations successives le développement limité de $\tan x$ en 0 à l'ordre 1, puis 3, puis 5.

4 Variante du précédent.

- Justifier que la fonction tangente admet un développement limité en 0 de la forme :

$$\tan x = a_0 + a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + o(x^5).$$

- Sachant que $\tan' x = 1 + \tan^2 x$, déterminer les valeurs de a_1, a_3, a_5 .

5 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par :

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$$

- Démontrer que f est prolongeable par continuité sur \mathbb{R} et que ce prolongement est deux fois dérivable.
- En utilisant la fonction $g(x) = x - 1 + e^{-x}$, étudier les variations de f .
- Décrire le comportement de f au voisinage de 0. Tracer l'allure de sa courbe.

6 Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le développement limité de $f(x)$ en 0 à l'ordre $n+1$ où :

$$f(x) = \ln \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \right).$$

7 Calculer, dans chacun des cas suivants, le développement limité à l'ordre n de $f_i(x)$ en a .

Décrire la courbe de f_i au voisinage du point a .

$$n=4 \quad a=1 \quad f_1(x) = \frac{\ln x}{x}$$

$$n=3 \quad a=-3 \quad f_2(x) = \frac{1}{x}$$

$$n=3 \quad a=+\infty \quad f_3(x) = \frac{1}{x+2}$$

$$n=2 \quad a=\ln 3 \quad f_4(x) = \operatorname{sh} x$$

$$n=3 \quad a=\frac{3\pi}{8} \quad f_5(x) = \cos 2x$$

$$n=2 \quad a=\frac{\pi}{4} \quad f_6(x) = \tan x$$

$$n=4 \quad a=1 \quad f_7(x) = \arctan x$$

$$n=4 \quad a=1 \quad f_8(x) = \arcsin x$$

$$n=2 \quad a=2 \quad f_9(x) = 2^x$$

$$n=2 \quad a=2 \quad f_{10}(x) = \frac{8-2x-x^2}{3+x-x^2}$$

$$n=2 \quad a=-1 \quad f_{11}(x) = \frac{\sqrt{5+7x+3x^2}-1}{x+1}$$

$$n=3 \quad a=-\infty \quad f_{12}(x) = \frac{x+2}{x^2-3x+1}$$

$$n=4 \quad a=+\infty \quad f_{13}(x) = \sqrt{x^2+3} - \sqrt{x^2+2}$$

8 Calculer les limites suivantes.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \tan x - \tan(3x)}{x(1-\cos(3x))}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\operatorname{ch} x - \cos x) - 3(\operatorname{sh} x - \sin x)}{x^7}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x}{\operatorname{sh} x} - \frac{e^{-x}}{\sin x} \right)^{\frac{1}{x^4}}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} + \cos x - \frac{1}{2} \cos^2 x \right)^{\frac{1}{x^4}}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{1-\cos 2x} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\cos 2x - e^{-2x^2}}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \arcsin x}{\sin x - \arctan x}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{\ln x}$
- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x - 1}{1 - 2 \cos(2x)}$
- $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x + \sin x}{\cos 2x + \sin 4x}$
- $\lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt[3]{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4}$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[5]{x^10+x^5+1} - x^2}{\sqrt[4]{x^4+1} + x}$
- $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\pi - 3 \arccos x}{4x^3 - x}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + 7} - \sqrt{x^2 + 5}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[5]{x^{10}+x^5+1} - x^2}{\sqrt[4]{x^4+1} + x}$

9 Déterminer le comportement asymptotique des fonctions suivantes en $\pm\infty$.

$$f_1(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x+1} \quad f_2(x) = \sqrt[3]{x^3 - 1}$$

$$f_3(x) = \sqrt{(x-1)(x-3) + 2}$$

$$f_4(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{2(x-1)^2} \quad f_5(x) = \sqrt[3]{x^2(1-8x)}$$

$$f_6(x) = \sqrt[3]{8x^3 + x^2} - \sqrt{9x^2 + x}$$

$$f_7(x) = \frac{x^2 + 1}{x-1} e^{\frac{1}{x}} \quad f_8(x) = x e^{\frac{1}{x+1}}$$

$$f_9(x) = \frac{(x+1) \ln(1+x)}{\ln x} \quad f_{10}(x) = \ln \operatorname{ch} x$$

10 Donner un développement asymptotique à l'ordre k des suites suivantes.

$$k=2 \quad u_n = \frac{n-1}{2n-3} \quad k=3 \quad v_n = \arctan n$$

$$k=3 \quad w_n = \arctan \left(n + \frac{1}{n} \right)$$

$$k=2 \quad x_n = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n} \right) \quad k=2 \quad y_n = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n$$

$$k=2 \quad z_n = \sqrt[n]{n^2 + 3n + 1}$$

11 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose :

$$u_n = \prod_{k=2n}^{3n} k.$$

À l'aide de la formule de Stirling donner un équivalent simple de u_n en $+\infty$ puis de $\sqrt[n]{u_n}$.

On pourra considérer $\frac{u_n}{2n}$.