Chapitre A8
Développements limités

I. Généralités

Cadre

Dans toute cette partie f est une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ telle que :

- Ou bien D est un intervalle non réduit à un point contenant 0.
- Ou bien D est un tel intervalle privé de 0.

Ceci signifie que f peut admettre une limite en 0.

Dans tout ce chapitre n désigne un entier naturel.

A. Définition

Définition

On dit que$f$ admet un *développement limité en* 0 *à l'ordre* n s'il existe des réels $c_0, c_1, \ldots, c_n$ tels que :

Remarque. On peut aussi écrire :

Exemples.

(i) Développement limité de $\frac{1}{1-x}$ en 0.

(ii) La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'admet pas de développement limité en 0 à l'ordre 1.

B. Propriétés

Lemme 1

Une fonction f admet un développement limité à l'ordre $n = 0$ en 0 si et seulement si elle admet une limite finie en 0. Ce développement limité est alors

$$f(x) = c_0 + o(1) \qquad \text{avec} \qquad c_0 = \lim_{x \to 0} f(x).$$

<u>Démonstration</u>. La fonction f admet un développement limité en 0 si et seulement si il existe un réel c_0 tel que $f(x) = c_0 + \varepsilon(x)$, où ε est une fonction admettant 0 pour limite en 0. Ceci équivaut à : il existe $c_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = c_0$.

Cette dernière propriété signifie exactement que f admet une limite finie en 0. □

Proposition

Supposons que f est définie en 0, *i.e.*, $0 \in D$.

- La fonction f admet un développement limité à l'ordre 0 en 0 si et seulement si elle est continue en 0.
- La fonction f admet un développement limité à l'ordre 1 en 0 si et seulement si elle est dérivable en 0.

Remarques.

- Ceci ne se généralise pas aux ordres supérieurs.

  Par exemple l'existence d'un développement limité à l'ordre 2 n'implique pas la dérivabilité seconde de f.
- Les deux sens de ces équivalences sont donnés par les deux lemmes suivants.

Lemme 2

Supposons que f est définie en 0.

(i) Si f est continue en 0 alors f admet le développement limité

$$f(x) \underset{(0)}{=} f(0) + o(1).$$

(ii) Si f est dérivable en 0 alors f admet le développement limité

$$f(x) \underset{(0)}{=} f(0) + f'(0)x + o(x).$$

<u>Démonstration</u>.

(i) Si f est continue en 0 alors $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} f(0)$, donc $f(x) - f(0) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

Ainsi $f(x) - f(0) \underset{(0)}{=} o(1)$, et donc : $f(x) \underset{(0)}{=} f(0) + o(1)$.

Il s'agit bien d'un développement limité de f à l'ordre 0 en 0.

(ii) Si f est dérivable en 0 alors $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \xrightarrow[x\to 0]{} f'(0)$, donc $\frac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

Ainsi $f(x) - f(0) - f'(0)x \underset{(0)}{=} o(x)$, donc : $f(x) \underset{(0)}{=} f(0) + f'(0)x + o(x)$.

Il s'agit bien d'un développement limité de f à l'ordre 1 en 0. □

Lemme 3

Supposons que f est définie en 0.

(i) Si f admet le développement limité $f(x) \underset{(0)}{=} c_0 + o(1)$ en 0 alors f est continue en 0 et $c_0 = f(0)$.

(ii) Si f admet le développement limité $f(x) \underset{(0)}{=} c_0 + c_1x + o(x)$ en 0 alors f est dérivable en 0, et $c_0 = f(0)$, $c_1 = f'(0)$.

<u>Démonstration</u>.

(i) Nous verrons dans le chapitre A10 (Limites et continuité) que, pour une fonction f définie en 0 :

$$f \text{ est continue en } 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \text{ admet une limite finie en } 0$$

Donc ce point est conséquence du lemme 1.

(ii) On suppose que f admet en 0 le développement limité suivant à l'ordre 1 :

$$f(x) = c_0 + c_1x + x\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

Alors $f(0) = c_0$ d'après le point précédent, et

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = c_1 + \varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} c_1.$$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = c_1$. □

Proposition (Troncature d'un développement limité)

Supposons que f admet en 0 le développement limité suivant :

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + x^n \varepsilon(x) \qquad \text{avec} \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Soit k un entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$. Alors f admet en 0 le développement limité suivant à l'ordre k :

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_k x^k + x^k \varepsilon_2(x) \qquad \text{avec} \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon_2(x) = 0.$$

Démonstration. On écrit :

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_k x^k + x^k \Big(c_{k+1} x + c_{k+2} x^2 + \cdots c_n x^{n-k} + x^{n-k} \varepsilon(x) \Big).$$

Soit $\varepsilon_2(x) = c_{k+1} x + c_{k+2} x^2 + \cdots + c_n x^{n-k} + x^{n-k} \varepsilon(x)$.

Alors $\lim_{x \to 0} \varepsilon_2(x) = 0$, donc f admet bien un développement limité en 0 à l'ordre k, celui-ci est la restriction du développement limité à l'ordre n. $\square$

Proposition (Unicité d'un développement limité)

Si f admet un développement limité en 0 à l'ordre n alors ce développement limité est unique.

Démonstration.

Proposition (Parité des développements limités)

Soit f une fonction admettant un développement limité en 0. Si f est paire alors ce développement limité est de la forme :

$$f(x \underset{(0)}{=} c_0 + c_2x^2 + c_4x^4 + \cdots + c_{2k}x^{2k} + o(x^{2k}) \qquad \text{avec} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Si f est impaire alors ce développement limité est de la forme :

$$f(x) \underset{(0)}{=} c_1x + c_3x^3 + \cdots + c_{2k+1}x^{2k+1} + o(x^{2k+1}) \qquad \text{avec} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Démonstration.

Définition

Soit f une fonction admettant un développement limité en 0. Soit p l'indice du plus petit coefficient non-nul de ce développement limité. On peut alors écrire

$$f(x) \underset{(0)}{=} x^p(a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m + o(x^m)) \qquad \text{avec} \quad a_0 \neq 0.$$

Cette écriture est la *forme normalisée* du développement limité de f en 0.
Le monôme a_0x^p est le *terme prépondérant* du développement limité.

Proposition

Le développement limité ci-dessus implique l'équivalence : $\quad f(x) \underset{(0)}{\sim} a_0x^p.$

C. Développements limités des fonctions usuelles

Théorème

Les développements limités suivants en 0 sont valables pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 1. Développement limité de $(1+x)^\alpha$ pour $\alpha = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ -1,\ \frac{1}{2}$.

▷ **Exercice 1.**

II. Calculs de développements limités

A. Opérations

Exemple 2.

(i) Développement limité de e^{3x} en 0 à l'ordre 4.

(ii) Développement limité de $\ln(1-x)$ en 0 à l'ordre 5.

(iii) Développement limité de $\frac{1}{1-x^2}$ en 0 à l'ordre 5.

(iv) (Addition de DL) Développement limité de $e^x + e^{3x}$ en 0 à l'ordre 4.

(v) (Multiplication de DL) Développement limité de $e^x \cos x$ en 0 à l'ordre 4.

▷ **Exercices 2, 3, 4.**

Exemple 3.

(i) Développement limité de $\frac{1}{3+x}$ en 0 à l'ordre 3.

(ii) Développement limité de $\ln(2-x)$ en 0 à l'ordre 3.

▷ **Exercice 5.**

Exemple 4.

(i) Développement limité de $\exp(2x - x^2)$ en 0 à l'ordre 4.

(ii) (Composition de développements limités) $\ln(\cos x)$ en 0 à l'ordre 5.

(iii) (Quotient de développements limités) $\frac{1}{\cos x}$ en 0 à l'ordre 5.

(iv) Développement limité de $\tan x$ en 0 à l'ordre 5.

▷ **Exercice 6.**

Remarque : manipulation des petits o.

$o(3x^2) \underset{(0)}{=}$	$o(x^2) + o(x^3) \underset{(0)}{=}$	$o(x^2 + x^3) \underset{(0)}{=}$
$x^4 o(x^3) \underset{(0)}{=}$	$o(x^4)o(x^3) \underset{(0)}{=}$	$x^4 + o(x^3) \underset{(0)}{=}$

B. Primitivation

Théorème (Primitivation de développements limités)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I contenant 0. On Suppose que f' admet le développement limité à l'ordre n :

$$f'(x) \underset{(0)}{=} c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + o(x^n).$$

Alors f admet le développement limité suivant à l'ordre $n+1$:

$$f(x) \underset{(0)}{=} f(0) + c_0 x + c_1 \frac{x^2}{2} + \cdots + c_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

Démonstration. Admise pour l'instant. Nécessite le théorème des accroissements finis (chapitre A11 : Dérivation).

Exemple 5. Démonstration de la formule du développement limité de $\ln(1+x)$.

Exemple 6.

(i) Développement limité de la fonction arcsin en 0 à l'ordre 5.

(ii) Développement limité de la fonction arctan en 0 à l'ordre $2n+1$.

C. Formule de Taylor-Young

Rappel.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Une fonction est *de classe* $\mathscr{C}^n$ si elle est n fois dérivable et sa dérivée n-ème est continue.
- Une fonction est *de classe* $\mathscr{C}^\infty$ si elle est dérivable n fois pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Lemme (Formule de Taylor-Young en 0)

Soit n un entier naturel et f une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ en 0. Alors f admet le développement limité :

Exemple 7. Cas $n = 0, 1, 2$.

Démonstration.

Corollaire

Une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un intervalle I admet un développement limité à tout ordre en tout point de I.

Exemple 8. Démonstration des formules donnant les développements limités des fonctions exponentielle, sinus, cosinus, et $x \mapsto (1+x)^\alpha$.

III. Développement limité au voisinage d'un point quelconque

Cadre

Soit a un réel. Dans cette partie f est une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ telle que :

- Ou bien D est un intervalle non réduit à un point contenant a.
- Ou bien D est un tel intervalle privé de a.

Définition

On dit que f admet un *développement limité en a à l'ordre n* s'il existe des scalaires $c_0, c_1, \ldots, c_n$ tels que :

Remarques.

- De façon équivalente :

  Ou encore, pour tout h tel que $a+h \in D$:

- Les propriétés d'unicité et de troncature sont toujours valables.

Méthode

Pour obtenir un développement limité d'une fonction au voisinage d'un point a, on pose $h = x - a$ et on calcule un développement limité de $h \mapsto f(a+h)$ au voisinage de $h = 0$.

Exemple 9.

(i) Développement limité de $\frac{1}{x}$ au voisinage de $a = 2$ à l'ordre 2.

(ii) Développement limité de e^x au voisinage de $a = 4$ à l'ordre 2.

(iii) Développement limité de $\cos x$ à l'ordre 3 en $a = \frac{\pi}{3}$.

▷ **Exercice 7.**

Théorème (Primitivation de développements limités)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, et soit a un point de I. Supposons que f' admet le développement limité à l'ordre n :

$$f'(x) \underset{(a)}{=} c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n + o((x-a)^n).$$

Alors f admet le développement limité suivant à l'ordre $n+1$:

$$f(x) \underset{(a)}{=} f(a) + c_0(x-a) + c_1\frac{(x-a)^2}{2} + \cdots + c_n\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + o((x-a)^{n+1}).$$

Théorème (Formule de Taylor-Young)

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ en a. Alors f admet le développement limité :

$$f(x) \underset{(a)}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + o((x-a)^n).$$

▷ **Exercice 8.**

IV. Applications

A. Calculs de limites

Exemple 10.

$$(i) \quad \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x-\ln(1+x)} \qquad\qquad (ii) \quad \lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^3}$$

▷ **Exercice 9.**

B. Tangentes

Remarque. D'après la formule de Taylor-Young, si f est de classe $\mathscr{C}^2$ en a alors :

$$f(x) \underset{(a)}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + o((x-a)^2).$$

Ceci montre que le développement limité d'une fonction à l'ordre 1 donne la tangente à la courbe. Le terme suivant donne la position de la courbe par rapport à cette tangente.

▷ **Exercices 10, 11.**

C. Développement asymptotique

Définition

Un *développement asymptotique* d'une fonction est un développement limité en $\pm\infty$, obtenu en posant $h = \frac{1}{x}$.

Il peut contenir des termes non polynomiaux.

Exemple 11.

(i) Développement asymptotique de $f(x) = \dfrac{2x^2+5}{x+3}$ en $\pm\infty$ à l'ordre 2.

(ii) Comportement asymptotique de $u_n = \sqrt[n]{n}$.

▷ **Exercices 12, 13.**

Proposition : Formule de Stirling

Exemple 12. On peut en déduire le développement asymptotique suivant :

$$\ln(n!) \underset{(+\infty)}{=}$$

▷ **Exercice 14.**