Chapitre A10
Développements limités

I. Généralités

Dans toute cette partie on note D une partie de $\mathbb{R}$ telle que $0 \in \overline{D}$.

A. Définition

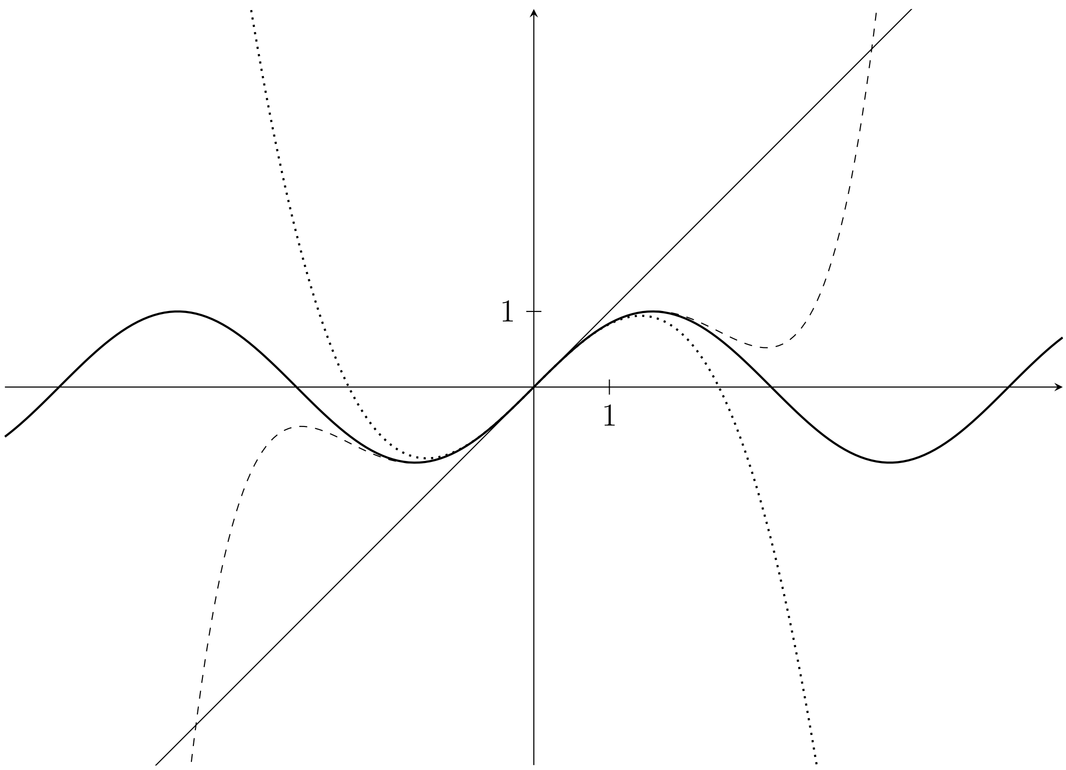
Définition. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction, n un entier naturel. On dit que f admet un développement limité en 0 à l'ordre n s'il existe des scalaires $c_0, c_1, \ldots, c_n$ tels que :

Remarque. On peut aussi écrire :

Exemples. *(i)* Développements limités en 0 du sinus (voir figure 1).

(ii) Développement limité de $\frac{1}{1-x}$ en 0.

FIGURE 1 – La fonction sinus et ses premiers développements limités.



(iii) La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'admet pas de développement limité en 0 à l'ordre 1.

B. Propriétés

Proposition. *Une fonction f admet un développement limité à l'ordre $n = 0$ en 0 si et seulement si elle admet une limite finie en 0. Cette limite est alors c_0.*

Démonstration. La fonction f admet un développement limité en 0 si et seulement si il existe un réel c_0 tel que $f(x) = c_0 + \varepsilon(x)$, où ε est une fonction admettant 0 pour limite en 0. Ceci équivaut à $\lim_{x\to 0} f(x) = c_0$, donc f admet une limite finie en 0. $\square$

Propositions. *Supposons que f est définie en* 0.

(i) La fonction f admet un développement limité à l'ordre 0 en 0 si et seulement si elle est continue en 0. Si c'est le cas alors $c_0 = f(0)$.

(ii) La fonction f admet un développement limité à l'ordre 1 en 0 si et seulement si elle est dérivable en 0. Si c'est le cas alors $c_1 = f'(0)$.

Remarque. Ceci ne se généralise pas aux ordres supérieurs.

Par exemple l'existence d'un développement limité à l'ordre 2 n'implique pas la dérivabilité seconde de f.

▷ **Exercice 1.**

Démonstration.

(i) D'après la propriété précédente, la fonction f admet un développement limité à l'ordre 0 en 0 si et seulement si $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = c_0$.

Si f est définie en 0 ceci revient à la continuité de f en 0 avec $f(0) = c_0$.

(ii) Supposons que f admet un développement limité à l'ordre 1 :

$$f(x) = c_0 + c_1 x + x\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

Alors $f(0) = c_0$, et

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = c_1 + \varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} c_1.$$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = c_1$.

Réciproquement supposons que f est dérivable en 0 et posons $\varepsilon(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} - f'(0)$.

Alors $\varepsilon \xrightarrow[0]{} 0$ et $f(x) = f(0) + f'(0)x + x\varepsilon(x)$, ce qui montre bien que f admet un développement limité en 0 à l'ordre 1. □

Proposition (Troncature d'un développement limité). *Supposons que f admet en 0 le développement limité suivant :*

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + x^n \varepsilon(x) \qquad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Soit k un entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$. Alors f admet en 0 le développement limité suivant à l'ordre k :

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_k x^k + x^k \varepsilon_2(x) \qquad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0.$$

Démonstration. On écrit :

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_k x^k + x^k \Big(c_{k+1} x + c_{k+2} x^2 + \cdots c_n x^{n-k} + x^{n-k} \varepsilon(x) \Big).$$

Soit $\varepsilon_2(x) = c_{k+1} x + c_{k+2} x^2 + \cdots + c_n x^{n-k} + x^{n-k} \varepsilon(x)$.

Alors $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$, donc f admet bien un développement limité en 0 à l'ordre k, celui-ci est la restriction du développement limité à l'ordre n. □

Proposition (Unicité d'un développement limité). *Si f admet un développement limité en 0 à l'ordre n alors ce développement limité est unique.*

Démonstration.

Proposition (Parité des développements limités). *Soit f une fonction admettant un développement limité en 0. Si f est paire alors ce développement limité est de la forme :*

Si f est impaire alors ce développement limité est de la forme :

Démonstration.

Définition. Soit f une fonction admettant un développement limité en 0. Soit p l'indice du plus petit coefficient non-nul de ce développement limité. On peut alors écrire

$$f(x) \underset{(0)}{=} x^p(a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m + o(x^m))$$

avec $a_0 \neq 0$. Cette écriture est la forme normalisée du développement limité de f en 0.

Proposition. *Le développement limité ci-dessus implique l'équivalence :* $f(x) \underset{(0)}{\sim} a_0 x^p$

De plus le signe de $f(x)$ *au voisinage de* 0 *est le signe de* $a_0 x^p$*.*

C. Développements limités des fonctions usuelles

Théorème. *Les développements limités suivants en 0 sont valables pour tout* $n \in \mathbb{N}$*.*

Exemple 1. Développement limité de $(1+x)^\alpha$ pour $\alpha = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ -1,\ \frac{1}{2}$.

▷ **Exercice 2.**

II. Calculs de développements limités

A. Opérations

Exemple 2.

(i) Développement limité de e^{3x} en 0 à l'ordre 4.

(ii) Développement limité de $\ln(1-x)$ en 0 à l'ordre 5.

(iii) Développement limité de $\frac{1}{1-x^2}$ en 0 à l'ordre 5.

(iv) (Addition de DL) Développement limité de $e^x + e^{3x}$ en 0 à l'ordre 4.

(v) (Multiplication de DL) Développement limité de $e^x \cos x$ en 0 à l'ordre 4.

▷ **Exercices 3, 4, 5.**

Exemple 3.

(i) Développement limité de $\frac{1}{3+x}$ en 0 à l'ordre 3.

(ii) Développement limité de $\ln(2-x)$ en 0 à l'ordre 3.

▷ **Exercice 6.**

Exemple 4.

(i) Développement limité de $\exp(2x - x^2)$ en 0 à l'ordre 4.

(ii) (Composition de développements limités) $\ln(\cos x)$ en 0 à l'ordre 5.

(iii) (Quotient de développements limités) $\frac{1}{\cos x}$ en 0 à l'ordre 5.

(iv) Développement limité de $\tan x$ en 0 à l'ordre 5.

▷ **Exercice 7.**

Remarque : manipulation des petits o.

$o(3x^2) \underset{(0)}{=}$	$o(x^2) + o(x^3) \underset{(0)}{=}$	$o(x^2 + x^3) \underset{(0)}{=}$
$x^4 o(x^3) \underset{(0)}{=}$	$o(x^4) o(x^3) \underset{(0)}{=}$	$x^4 + o(x^3) \underset{(0)}{=}$

B. Primitivation

Théorème (Primitivation de développements limités). *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I contenant 0. On Suppose que f' admet le développement limité à l'ordre n :*

$$f'(x) \underset{(0)}{=} c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + o(x^n).$$

Alors f admet le développement limité suivant à l'ordre $n+1$:

$$f(x) \underset{(0)}{=} f(0) + c_0 x + c_1 \frac{x^2}{2} + \cdots + c_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

Démonstration.

Exemple 5. Démonstration de la formule du développement limité de $\ln(1+x)$.

Exemple 6.

(i) Développement limité de la fonction arcsin en 0 à l'ordre 5.

(ii) Développement limité de la fonction arctan en 0 à l'ordre $2n+1$.

C. Formule de Taylor-Young

Lemme (Formule de Taylor-Young en 0). *Soit n un entier naturel et f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ en 0. Alors f admet le développement limité :*

Exemple 7. Cas $n = 0, 1, 2$.

Démonstration.

Corollaire. *Toute fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle I admet un développement limité à tout ordre en tout point de I.*

Exemple 8. Démonstration des formules donnant les développements limités des fonctions exponentielle, sinus, cosinus, et $x \mapsto (1+x)^\alpha$.

III. Développement limité au voisinage d'un point quelconque

Définition. Soit D une partie de $\mathbb{R}$, a un point de $\overline{D}$. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction, n un entier naturel. On dit que f admet un développement limité en a à l'ordre n s'il existe des scalaires $c_0, c_1, \ldots, c_n$ tels que :

Remarques.

(i) De façon équivalente :

Ou encore, pour tout h tel que $a + h \in D$:

(ii) Les propriétés d'unicité et de troncature sont toujours valables.

Théorème (Primitivation de développements limités). *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, et soit a un point de I. Supposons que f' admet le développement limité à l'ordre n :*

$$f'(x) \underset{(a)}{=} c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n + o((x-a)^n).$$

Alors f admet le développement limité suivant à l'ordre $n+1$:

$$f(x) \underset{(a)}{=} f(a) + c_0(x-a) + c_1\frac{(x-a)^2}{2} + \cdots + c_n\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + o((x-a)^{n+1}).$$

Théorème (Formule de Taylor-Young). *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ en a. Alors f admet le développement limité :*

$$f(x) \underset{(a)}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + o((x-a)^n).$$

Méthode. Pour obtenir un développement limité d'une fonction au voisinage d'un point a, on pose $h = x - a$ et on calcule un développement limité de f au voisinage de $h = 0$.

Exemple 9.

(i) Développement limité de $\frac{1}{x}$ au voisinage de $a = 2$ à l'ordre 2.

(ii) Développement limité de e^x au voisinage de $a = 4$ à l'ordre 2.

(iii) Développement limité de $\cos x$ à l'ordre 3 en $a = \frac{\pi}{3}$.

▷ **Exercices 8, 9.**

IV. Applications

A. Calculs de limites

Exemple 10.

$$\textit{(i)} \quad \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x - \ln(1+x)} \qquad\qquad \textit{(ii)} \quad \lim_{x \to 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}$$

▷ **Exercice 10.**

B. Tangentes

Remarque. D'après la formule de Taylor-Young, si f est de classe $\mathcal{C}^2$ en a alors :

$$f(x) \underset{(a)}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + o((x-a)^2).$$

Ceci montre que le développement limité d'une fonction à l'ordre 1 donne la tangente à la courbe. Le terme suivant donne la position de la courbe par rapport à cette tangente.

▷ **Exercices 11, 12.**

C. Développement asymptotique

Définition. Un développement asymptotique d'une fonction est un développement limité en $\pm\infty$, obtenu en posant $h = \frac{1}{x}$.
Il peut contenir des termes non polynomiaux.

Exemple 11.

(i) Développement asymptotique de $f(x) = \dfrac{2x^2+5}{x+3}$ en $\pm\infty$ à l'ordre 1.
(ii) Comportement asymptotique de $u_n = \sqrt[n]{n}$.

▷ **Exercices 13, 14.**

Proposition : Formule de Stirling.

Exemple 12. On peut en déduire le développement asymptotique suivant :

$$\ln(n!) \underset{(+\infty)}{=}$$

▷ **Exercice 15.** Donner un équivalent en $+\infty$ de $\binom{2n}{n}$.