Lycée Bellevue – Toulouse **Année 2024-2025**
MPSI – Mathématiques

Feuille de T. D. B9
Applications linéaires

Exercices de cours

(1) Démontrer que les applications suivantes sont linéaires puis déterminer leurs noyaux et images.

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (3x-y, x+2y+z) \end{array}$$

$$g: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x-y, 3x+3y, x+2y) \end{array}$$

(2) Mêmes questions avec :

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{K}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ P & \longmapsto & P(2) \end{array} \qquad g: \begin{array}{rcl} \mathbb{K}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_2[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$$

(3) Parmi les applications linéaires proposées dans les deux exercices précédents, lesquelles sont injectives ? Surjectives ?

(4) Soit p l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ défini par $\forall (x,y,z) \in E$

$$p(x,y,z) = (x+y-z, x+y-z, x+y-z)$$

Démontrer que p est un projecteur et déterminer ses éléments caractéristiques.

(5) Soit $a = (a_1, \ldots, a_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$ vérifiant :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = 1$$

a. Démontrer que l'application

$$p : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \left(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k \right) a$$

est un endomorphisme de $E = \mathbb{R}^n$.

b. Démontrer que p est un projecteur sur une droite vectorielle parallèlement à un hyperplan.

(6) Soit s l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^2$ défini par :

$$\forall (x,y) \in E \qquad s(x,y) = (x, -2x-y)$$

Démontrer que s est une symétrie et déterminer ses éléments caractéristiques.

Travaux dirigés

$\boxed{1}$ Soit E l'espace vectoriel des suites arithmétiques à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Démontrer que l'application

$$f: \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (u_0, u_1 - u_0) \end{array}$$

est un isomorphisme.

$\boxed{2}$ Démontrer que les applications suivantes sont linéaires. Calculer leurs noyaux et leurs images. Déterminer ensuite les dimensions de ces noyaux et images.

$$f_1: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x-y, x+y, x+2y) \end{array}$$

$$f_2: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x-y, 2x-y) \end{array}$$

$$f_3: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & 3x+y-5z \end{array}$$

$$f_4: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ x & \longmapsto & (4x, 0, -x, x/2) \end{array}$$

$$f_5: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^5 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x_1, \ldots, x_5) & \longmapsto & (0, 0, x_2, 0) \end{array}$$

$$f_6: \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & a+d \end{array}$$

$$f_7: \begin{array}{rcl} \mathbb{K}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_3[X] \\ P & \longmapsto & XP' - 3P \end{array}$$

$$f_8: \begin{array}{rcl} \mathbb{K}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ P & \longmapsto & (P(1), P(2)) \end{array}$$

$$f_9: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ u & \longmapsto & (u_{n+1}) - (u_n) \end{array}$$

$\boxed{3}$ Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linéaire telle que

$$f(1,0,0) = (1,-1,0)$$
$$f(0,1,0) = (1,1,0)$$
$$f(0,0,1) = (1,1,1)$$

a. Justifier que f est uniquement déterminée et donner $f(x,y,z)$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

b. Démontrer que f est un automorphisme et déterminer f^{-1}.

$\boxed{4}$ Pour tout $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ on note :

$$\varphi(y) = y'' - 4y' + 20y$$

a. Justifier que φ est une application linéaire de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

b. Déterminer le noyau de φ et sa dimension.

$\boxed{5}$ Soit E, F, G trois espaces vectoriels et

$$f : E \to F \qquad g : F \to G$$

deux applications linéaires.

a. Démontrer que l'application $g \circ f$ est nulle si et seulement si $\operatorname{im} f \subseteq \ker g$.

b. Démontrer que :

$$\ker f \subseteq \ker g \circ f \quad \text{et} \quad \operatorname{im} g \circ f \subseteq \operatorname{im} g$$

c. En déduire que si $g \circ f$ est un isomorphisme alors f est injective et g est surjective.

$\boxed{\textbf{6}}$ Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E. On note $f^2 = f \circ f$. Démontrer que :

$$\begin{aligned} \ker f = \ker f^2 &\iff \operatorname{im} f \cap \ker f = \{0_E\} \\ \operatorname{im} f = \operatorname{im} f^2 &\iff \operatorname{im} f + \ker f = E \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{7}}$ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E. Pour tout scalaire λ on note :

$$E_\lambda = \{ u \in E \mid f(u) = \lambda u\}$$

a. Démontrer que E_λ est un sous-espace vectoriel de E.

b. Démontrer que si $\lambda \neq \mu$ alors E_λ et E_μ sont en somme directe.

$\boxed{\textbf{8}}$ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E vérifiant :

$$f \circ f = 3f - 2\mathrm{Id}_E$$

a. Démontrer que f est un automorphisme et exprimer son inverse en fonction de f.

On utilise la définition de E_λ donnée dans l'exercice précédent.

b. Démontrer que :

$$\operatorname{im}(f - \mathrm{Id}_E) \subseteq E_2 \quad \text{et} \quad \operatorname{im}(f - 2\mathrm{Id}_E) \subseteq E_1$$

c. Soit u un vecteur de E. Démontrer que u est combinaison linéaire de $f(u) - u$ et $f(u) - 2u$.

d. Démontrer que : $E_1 \oplus E_2 = E$

$\boxed{\textbf{9}}$ Soit f l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ défini par :

$$f(x,y,z) = (2x+y+z, x+2y+z, x+y+2z)$$

On utilise encore la définition de E_λ de l'exercice 7.

a. Donner une base de E_1 et de E_4.

b. Démontrer que E_1 et E_4 sont supplémentaires dans E.

c. En déduire que : $f \circ f = 5f - 4\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$

$\boxed{\textbf{10}}$ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E. On suppose que pour tout $u \in E$ la famille $(u, f(u))$ est liée.

a. Démontrer que pour tout $u \in E$ non-nul il existe un unique $\lambda_u \in \mathbb{K}$ tel que $f(u) = \lambda_u u$.

b. Soit u et v deux vecteurs linéairement indépendants. Démontrer que $\lambda_u = \lambda_v$.

c. Démontrer que f est une homothétie.

$\boxed{\textbf{11}}$ Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ on pose :

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= (-x+2z, -x+y+z, z) \\ g(x,y,z) &= \tfrac{1}{2}(x-z, 2y, -x+z) \\ h(x,y,z) &= \tfrac{1}{3}(-x+4z, 2x-3y+4z, 2x+z) \end{aligned}$$

Démontrer que ces endomorphismes sont des projecteurs ou des symétries, et déterminer leurs éléments caractéristiques.

$\boxed{\textbf{12}}$ Donner l'expression de :

a. La symétrie de $\mathbb{R}^2$ par rapport à $\mathrm{Vect}\left((1,0)\right)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}\left((1,1)\right)$,

b. La symétrie de $\mathbb{R}^2$ par rapport à $\mathrm{Vect}\left((3,-1)\right)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}\left((-7,3)\right)$.

$\boxed{\textbf{13}}$ Soit p un endomorphisme d'un espace vectoriel E, et $q = \mathrm{id} - p$.

a. Démontrer que p est un projecteur si et seulement si q est un projecteur.

b. On suppose que p est un projecteur. Démontrer que $\operatorname{im} q = \ker p$ et $\ker q = \operatorname{im} p$.

$\boxed{\textbf{14}}$ Soit p un projecteur d'un espace vectoriel E. Démontrer qu'un endomorphisme f de E commute avec p si et seulement si $\ker p$ et $\operatorname{im} p$ sont stables par f.

$\boxed{\textbf{15}}$ Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $H = \ker f$ où :

$$f : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & 3x+y-2z \end{array}$$

On note aussi $D = \mathrm{Vect}\left(u_0\right)$ avec $u_0 = (1,-1,2)$.

a. Démontrer que $E = H \oplus D$.

b. Soit $u = (x,y,z)$ un vecteur de E. Pour quelle valeur du scalaire λ le vecteur $u - \lambda u_0$ appartient-il à H ?

c. Déduire de la question précédente l'expression du projecteur de E sur H parallèlement à D, et de celui sur D parallèlement à H.

d. Déterminer l'expression de la symétrie de E par rapport à H parallèlement à D.

$\boxed{\textbf{16}}$ Dans $E = \mathbb{R}^4$ on note :

$$\begin{aligned} F &= \{ (x,y,z,t) \in E \mid x+y+z+t = 0\} \\ G &= \mathrm{Vect}\left((1,1,1,1)\right) \end{aligned}$$

a. Démontrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

b. Donner l'expression de la symétrie de E par rapport à F parallèment à G.

$\boxed{\textbf{17}}$ Dans $E = \mathbb{R}^4$ on note :

$$\begin{aligned} F &= \{ (x,y,z,t) \in E \mid x+y = z+t = 0\} \\ G &= \mathrm{Vect}\left((1,1,1,1), (1,1,-1,-1)\right) \end{aligned}$$

Démontrer que $E = F \oplus G$ et donner l'expression du projecteur de E sur F parallèment à G.

$\boxed{\textbf{18}}$ Soit p et q deux projecteurs d'un espace vectoriel E tels que $p \circ q = q \circ p$.

a. Démontrer que $p \circ q$ est un projecteur et que :

$$\begin{aligned} \operatorname{im}(p \circ q) &= \operatorname{im} p \cap \operatorname{im} q \\ \ker(p \circ q) &= \ker p + \ker q \end{aligned}$$

b. Démontrer que si $\operatorname{im} p = \operatorname{im} q$ alors $p = q$.

c. Démontrer que si $p \circ q = 0$ alors $p + q$ est un projecteur.

d. Réciproquement, démontrer que si p, q et $p+q$ sont des projecteurs de E alors :

$$p \circ q = q \circ p = 0$$

e. Démontrer que dans la situation des deux questions précédentes :

$$\begin{aligned} \operatorname{im}(p+q) &= \operatorname{im} p \oplus \operatorname{im} q \\ \ker(p+q) &= \ker p \cap \ker q. \end{aligned}$$