Chapitre B9
Applications linéaires

On note • $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
• E, F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

I. Généralités

A. Définition

Définitions

Une application $f : E \to F$ est dite *linéaire* si elle est compatible avec l'addition et la multiplication par un scalaire :

$$\begin{aligned} \forall (u,v) \in E^2 \qquad & f(u+v) = f(u) + f(v) \\ \forall u \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \qquad & f(\lambda u) = \lambda f(u) \end{aligned}$$

Un *endomorphisme* est une application linéaire d'un espace vectoriel dans lui-même.

Proposition (Caractérisation d'une application linéaire)

Une application $f : E \to F$ est linéaire si et seulement si :

Contre-exemples.

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+1 \end{array} \qquad\qquad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

Remarque. Si $f : E \to F$ est linéaire alors

$$f(0_E) = \qquad\qquad \forall u \in E \qquad f(-u) =$$

Exemple. Les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ linéaires sont de la forme $f(x) = ax$ où $a \in \mathbb{R}$.

Exemples et définitions.

Les applications suivantes sont linéaires.

- *Identité de E* $\qquad \mathrm{Id}_E : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ u & \longmapsto & u \end{array}$
- *Application nulle de E dans F* $\qquad \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ u & \longmapsto & 0_F \end{array}$
- *Homothétie de E de rapport α* $\qquad h_\alpha : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ u & \longmapsto & \alpha u \end{array}$ où $\alpha \in \mathbb{K}$
- Dérivation $\qquad D : \begin{array}{ccc} \mathscr{D}(I, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{F}(I, \mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$
- Spécialisation en α $\qquad f_\alpha : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ P & \longmapsto & P(\alpha) \end{array}$ où $\alpha \in \mathbb{K}$

B. Opérations sur les applications linéaires

Notations

Pour tous espaces vectoriels E et F on note :

L'ensemble des applications linéaires de E dans F :

L'ensemble des endomorphismes de E :

Rappel. Soit f et g deux éléments de $\mathscr{L}(E, F)$ et λ un scalaire. Alors les applications de E dans F notées $(f + g)$ et λf sont définies par :

$$\forall u \in E \qquad (f+g)(u) = f(u) + g(u)$$
$$(\lambda f)(u) = \lambda\, f(u)$$

Proposition

Les applications $(f+g)$ et λf sont linéaires.

Proposition

L'ensemble $\mathscr{L}(E,F)$ muni des opérations rappelées ci-dessus est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Son élément nul $0_{\mathscr{L}(E,F)}$ est l'application nulle de E dans F.

Proposition

Soit E, F et G trois espaces vectoriels, $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications linéaires. Alors $g \circ f$ est linéaire.

Démonstration.

Proposition

Soit E, F et G trois espaces vectoriels. L'application :

$$\begin{aligned} \mathscr{L}(F,G) \times \mathscr{L}(E,F) &\longrightarrow \mathscr{L}(E,G) \\ (g,f) &\longmapsto g \circ f \end{aligned}$$

est *bilinéaire*.
Ceci signifie qu'elle est linéaire par rapport à chacune de ses variables :

$$\forall f \in \mathscr{L}(E,F) \qquad \text{l'application} \quad \begin{aligned} \mathscr{L}(F,G) &\longrightarrow \mathscr{L}(E,G) \\ g &\longmapsto g \circ f \end{aligned} \quad \text{est linéaire}$$

$$\forall g \in \mathscr{L}(F,G) \qquad \text{l'application} \quad \begin{aligned} \mathscr{L}(E,F) &\longrightarrow \mathscr{L}(E,G) \\ f &\longmapsto g \circ f \end{aligned} \quad \text{est linéaire}$$

On peut écrire ceci :

$$\begin{matrix} \forall (f,f_1,f_2) \in \mathscr{L}(E,F)^3 \\ \forall (g,g_1,g_2) \in \mathscr{L}(F,G)^3 \end{matrix} \qquad \forall \lambda \in \mathbb{K} \qquad \begin{cases} g \circ (\lambda f_1 + f_2) = \lambda (g \circ f_1) + g \circ f_2 \\ (\lambda g_1 + g_2) \circ f = \lambda (g_1 \circ f) + g_2 \circ f \end{cases}$$

Démonstration. La première linéarité est conséquence de la linéarité de g. La seconde est conséquence de la définition de l'application $\lambda g_1 + g_2$. □

Remarque. Le triplet $(\mathscr{L}(E), +, \circ)$ est donc un anneau, non commutatif en général.

L'élément neutre pour la loi $\circ$ est Id_E, noté aussi id_E ou id.

On note couramment gf, f^2, f^k au lieu de $g \circ f$, $f \circ f$, $f \circ \cdots \circ f$.

C. Isomorphismes

Définition

Un *isomorphisme* est une application linéaire bijective.

Proposition

Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Si f est un isomorphisme, alors sa réciproque $f^{-1} : F \to E$ est linéaire (c'est donc également un isomorphisme).

Démonstration.

Proposition

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, G)$ deux isomorphismes.
Alors $g \circ f$ est un isomorphisme, de réciproque $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Définition

Un *automorphisme* est un endomorphisme bijectif, ou de façon équivalente un isomorphisme d'un espace vectoriel dans lui-même.

L'ensemble des automorphismes de E est noté $\mathrm{GL}(E)$ et appelé *groupe linéaire* de E.

Alors $(\mathrm{GL}(E), \circ)$ est un groupe. C'est le groupe des inversibles de l'anneau $(\mathscr{L}(E), +, \circ)$.

D. Applications linéaires et somme directe

Proposition

Soit $f : E \to F$ une application linéaire et E_1 un sous-espace vectoriel de E. Alors la restriction de f à E_1, notée $f_{|E_1}$, est une application linéaire de E_1 dans F.
De plus l'application de $\mathscr{L}(E,F)$ dans $\mathscr{L}(E_1,F)$ qui à f associe sa restriction à E_1 est linéaire.

Démonstration. Soit $(u,v) \in E_1^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Alors $\lambda u + v \in E_1$ car E_1 est un sous-espace vectoriel de E, et :

$$\begin{aligned} f_{|E_1}(\lambda u + v) &= f(\lambda u + v) && \text{par définition de la restriction} \\ &= \lambda f(u) + f(v) && \text{car } f \text{ est linéaire} \\ &= \lambda f_{|E_1}(u) + f_{|E_1}(v) && \text{car } u \text{ et } v \text{ appartiennent à } E_1. \end{aligned}$$

Ceci montre que $f_{|E_1}$ est linéaire.

De plus si f et g sont deux applications linéaires de E dans F et λ est un scalaire alors :

$$\forall u \in E_1 \quad (\lambda f + g)_{|E_1}(u) = (\lambda f + g)(u) = \lambda f(u) + g(u) = \lambda f_{|E_1}(u) + g_{|E_1}(u)$$

Ceci montre que $(\lambda f + g)_{|E_1} = \lambda f_{|E_1} + g_{|E_1}$, donc l'application de restriction $f \mapsto f_{|E_1}$ est bien linéaire. □

Théorème

Soit E et F deux espace vectoriels. Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Soit $f_1 : E_1 \to F$ et $f_2 : E_2 \to F$ deux applications linéaires.
Alors il existe une unique application linéaire $f : E \to F$ telle que $f_{|E_1} = f_1$ et $f_{|E_2} = f_2$.

En résumé : *Une application linéaire sur E est uniquement déterminée par ses restrictions à E_1 et E_2.*

Démonstration. Si une telle application existe, alors :

$$\forall u_1 \in E_1 \quad f(u_1) = f_1(u_1) \qquad \text{et} \qquad \forall u_2 \in E_2 \quad f(u_2) = f_2(u_2)$$

Comme f est linéaire alors :

$$\forall (u_1,u_2) \in E_1 \times E_2 \qquad f(u_1 + u_2) = f_1(u_1) + f_2(u_2)$$

Ceci définit une application de E dans F car tout élément u de E s'écrit de façon unique comme somme $u = u_1 + u_2$ avec $u_1 \in E_1$ et $u_2 \in E_2$, puisque $E_1 \oplus E_2 = E$.

Démontrons qu'elle est linéaire.

Soit $(u,v) \in E$. On note $u = u_1 + u_2$ et $v = v_1 + v_2$ avec u_1 et v_1 éléments de E_1, et u_2, v_2 éléments de E_2. Soit également λ un scalaire.

Comme E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels alors $\lambda u_1 + v_1$ est élément de E_1 et $\lambda u_2 + v_2$ est élément de E_2. De plus :

$$f(\lambda u + v) = f((\lambda u_1 + v_1) + (\lambda u_2 + v_2)) = f_1(\lambda u_1 + v_1) + f_2(\lambda u_2 + v_2)$$

Comme f_1 et f_2 sont linéaires alors :

$$f(\lambda u + v) = \lambda f_1(u_1) + f_1(v_1) + \lambda f_2(u_2) + f_2(v_2) = \lambda f(u) + f(v)$$

La fonction f est donc bien linéaire. Elle est uniquement déterminée par la formule $f(u_1 + u_2) = f_1(u_1) + f_2(u_2)$ d'après le début de cette démonstration, donc la propriété est démontrée. $\square$

II. Image et noyau

A. Définitions

Proposition

Soit $f : E \to F$ une application linéaire, E_1 un sous-espace vectoriel de E et F_1 un sous-espace vectoriel de F. Alors :

- $f(E_1)$ est un sous-espace vectoriel de F.
- $f^{-1}(F_1)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. On utilise la caractérisation des sous-espaces vectoriels.

Exemples.

$f(\{0_E\}) =$ $f^{-1}(F) =$

Ce sont bien des sous-espaces vectoriels respectivement de F et de E.

Définitions

Soit $f : E \to F$ une application linéaire.

On appelle *image* de f et on note $\operatorname{im} f$ l'ensemble :

On appelle *noyau* de f et on note $\ker f$ l'ensemble :

Exemple 1. Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x - 2y - z, 2x - z) \end{array}$

Démontrer que f est linéaire, calculer son noyau et son image.

▷ **Exercices 1, 2.**

B. Propriétés

Proposition

L'image de f est un sous-espace vectoriel de F, le noyau de f est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. En effet :

- $\operatorname{im} f = f(E)$ et E est un sous-espace vectoriel de E,
- $\ker f = f^{-1}(\{0_F\})$ et $\{0_F\}$ est un sous-espace vectoriel de F. □

Remarque. Caractérisation des éléments de l'image et du noyau :

Exemple 2. Soit A une matrice fixée de taille (n, p). L'application suivante est linéaire :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array}$$

Ceci est conséquence de la distributivité de la multiplication matricielle par rapport à l'addition.

Le noyau de cette application est l'ensemble des matrices colonnes à p lignes X telles que $AX = 0_{n,1}$.

On en déduit que l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$, ceci en identifiant $\mathbb{K}^p$ et $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ grâce à l'isomorphisme évident $\mathbb{K}^p \xrightarrow{\sim} \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

Exemple 3. L'application suivante est bien définie et linéaire :

$$\begin{aligned} f : \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}) \\ y &\longmapsto y'' + 5y' - 6y \end{aligned}$$

On en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène :

$$y'' + 5y' - 6y = 0$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$. En effet, c'est le noyau de f.

Théorème

Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Alors :

(i) f est injective si et seulement si $\ker f = \{0_E\}$.

(ii) f est surjective si et seulement si $\operatorname{im} f = F$.

Démonstration. *(ii)* On rappelle que f est surjective si et seulement si :

$$\forall v \in F \qquad \exists u \in E \qquad f(u) = v$$

Ceci signifie exactement que $\operatorname{im} f = F$.

▷ **Exercice 3.**

III. Projecteurs et symétries

A. Projecteurs

Définition

Soit E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
Pour tout $u \in E$ il existe un unique couple $(v, w) \in F \times G$ tel que $u = v + w$.
On appelle *projecteur* de E *sur* F *parallèlement à* G l'application de E dans E qui à u associe v.

Proposition

Soit p le projecteur de E sur F parallèlement à G. Alors :
(i) p est un endomorphisme de E
(ii) $\operatorname{im} p = F$ et $\ker p = G$.

Démonstration.

(i) Comme $E = F \oplus G$ alors un endomorphisme de E est uniquement déterminé par ses restrictions à F et à G.

Le projecteur de E sur F parallèlement à G est l'unique endomorphisme de E vérifiant $p_{|F}(u) = u$ pour tout $u \in F$ et $p_{|G}(u) = 0_E$ pour tout $u \in G$. C'est donc un endomorphisme.

(ii) Soit $u \in E$. On note $u = v + w$ avec $v \in F$ et $w \in G$. Alors $p(u) = v$.

Comme $p(u) = v$ alors $p(u) \in F$. Ceci montre que $\operatorname{im} p \subseteq F$.

Réciproquement, si v est un élément de F, alors *a fortiori* v est élément de E et sa décomposition selon la somme directe $E = F \oplus G$ est $v = v + 0_E$. Ceci montre que $p(v) = v$, puis que $v \in \operatorname{im} p$. Ainsi $F \subseteq \operatorname{im} p$, et $\operatorname{im} p = F$ par double inclusion.

Si $p(u) = 0_E$ alors $u = w$, donc $u \in G$. Ceci montre que $\ker p \subseteq G$.

Réciproquement, si w est élément de G alors *a fortiori* w est élément de E et sa décomposition selon la somme directe $E = F \oplus G$ est $w = 0_E + w$. Ceci montre que $p(w) = 0_E$, puis que $w \in \ker p$. Ainsi $G \subseteq \ker p$, et $\ker p = G$ par double inclusion. □

Remarque. On a démontré également que : $\quad \forall v \in F \quad p(v) = v$

Théorème

Soit p un endomorphisme de E. Alors p est un projecteur si et seulement si $p \circ p = p$. Dans ce cas p est le projecteur sur $\operatorname{im} p$ parallèlement à $\ker p$.

Lemme

Soit p un endomorphisme de E. Soit F son image et G son noyau.
Si $p \circ p = p$ alors $E = F \oplus G$.

Démonstration.

Démonstration du théorème. Supposons que p est le projecteur sur F parallèlement à G. D'après la proposition précédente $\operatorname{im} p = F$ et $\ker p = G$. Démontrons que $p \circ p = p$.

Soit $u \in E$ et v, w ses composantes selon la somme directe $E = F \oplus G$: $u = v + w$ avec $v \in F$ et $w \in G$.

Alors $p(u) = v$, donc $p \circ p(u) = p(v)$. Comme $v \in F$ alors d'après la remarque ci-dessus $p(v) = v$ et donc :

$$p \circ p(u) = v = p(u)$$

Ceci est valable pour tout $u \in E$ donc $p \circ p = p$.

Réciproquement, supposons que p est un endomorphisme de E vérifiant $p \circ p = p$. Posons $F = \operatorname{im} p$ et $G = \ker p$.

D'après le lemme F et G sont supplémentaires.

De plus, si u est élément de E alors $u = p(u) + u - p(u)$, avec $p(u) \in F$ et $u - p(u) \in G$, donc $p(u)$ est bien l'image de u par le projecteur de E sur F parallèlement à G. □

▷ **Exercice 4.**

B. Symétries

Définition

Soit E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Pour tout $u \in E$ il existe un unique couple $(v, w) \in F \times G$ tel que $u = v + w$.

On appelle *symétrie* de E par rapport à F parallèlement à G l'application de E dans E qui à u associe $v - w$.

Remarque. En d'autres termes s est l'unique endomorphisme de E tel que :

$$\forall u \in F \quad s(u) = u \qquad \text{et} \qquad \forall u \in G \qquad s(u) = -u.$$

Proposition

Soit p le projecteur de E sur F parallèlement à G. Alors :

Démonstration. Il suffit d'écrire, pour tout $u \in E$:

$$2p(u) - u = 2v - (v + w) = v - w = s(u)$$ □

Proposition

Soit s la symétrie de E par rapport à F parallèlement à G. Alors :
(i) s est un endomorphisme de E.
(ii) $F = \{u \in E \mid s(u) = u\}$ et $G = \{u \in E \mid s(u) = -u\}$.

Démonstration. Soit p le projecteur de E sur F parallèlement à G. Alors $s = 2p - \mathrm{Id}_E$.

(i) Comme p et Id_E sont des endomorphismes de E alors par combinaison linéaire s est un endomorphisme de E.

(ii) On sait que p est un projecteur et $F = \operatorname{im} p$, donc $F = \{u \in E \mid p(u) = u\}$

Par équivalences, pour tout $u \in E$:

$$s(u) = u \iff 2p(u) - u = u \iff p(u) = u \iff u \in F$$

De même $G = \ker p = \{u \in E \mid p(u) = 0\}$. Par équivalences, pour tout $u \in E$:

$$s(u) = -u \iff 2p(u) - u = -u \iff p(u) = 0 \iff u \in G$$

Ceci montre que $F = \{u \in E \mid s(u) = u\}$ et $G = \{u \in E \mid s(u) = -u\}$. □

Théorème

Soit s un endomorphisme de E.
Alors s est une symétrie si et seulement si $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.
Dans ce cas s est la symétrie par rapport à F parallèlement à G, où

$$F = \{u \in E \mid s(u) = u\} \qquad \text{et} \qquad G = \{u \in E \mid s(u) = -u\}.$$

Démonstration. Si s est la symétrie par rapport à F parallèlement à G, alors pour tout $u \in E$, si $u = v + w$ avec $v \in F$ et $w \in G$ alors :

$$s \circ s(u) = s(v - w) = v - (-w) = u$$

Ceci montre que $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.

Réciproquement, supposons que s est un endomorphisme de E tel que $s \circ s = \mathrm{Id}_E$. Posons $p = \frac{1}{2}(s + \mathrm{Id}_E)$. On calcule alors :

$$p \circ p = \frac{1}{4}(s \circ s + 2s + \mathrm{Id}_E) = \frac{1}{2}(s + \mathrm{Id}_E) = p$$

D'après le théorème de caractérisation des projecteurs, p est le projecteur de E sur $F = \operatorname{im} p$ parallèlement à $G = \ker p$. Comme $s = 2p - \mathrm{Id}_E$, alors s est la symétrie de E par rapport à F parallèlement à G. □

Remarque. Une symétrie est bijective, égale à sa propre réciproque.

▷ **Exercice 5.**

IV. Formes linéaires

A. Définition et exemples

Définition

Une *forme linéaire* est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

Exemple 4.

- L'application $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto & x - 2y + 5z \end{array}$ est une forme linéaire.
- Spécialisation d'un polynôme, d'une fonction, ou d'une suite :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ P & \longmapsto & P(5) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(3) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u_n) & \longmapsto & u_6 \end{array}$$

- Par composition l'application suivante est une forme linéaire :

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f'(2) \end{array}$$

Proposition

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Alors pour tout $i = 1, \ldots, n$ l'application qui à un vecteur de E associe sa i-ème coordonnée dans la base $\mathscr{B}$ est une forme linéaire :

Définition

Ces formes linéaires sont appelées *formes coordonnées* relativement à la base $\mathscr{B}$ et notées $(e_i^*)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

Exemple. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Les formes linéaires coordonnées selon la base canonique de $\mathbb{K}^p$ sont, pour tout $i = 1, \ldots, p$:

$$e_i^* : \begin{array}{rcl} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1, \ldots, x_p) & \longmapsto & x_i \end{array}$$

<ins>Démonstration</ins>. Soit u et v deux vecteurs de E, de coordonnées respectives $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ dans la base $\mathscr{B}$. Soit α un scalaire. Alors :

$$\begin{aligned} \alpha u + v &= \alpha(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n) + (\mu_1 e_1 + \cdots + \mu_n e_n) \\ &= (\alpha\lambda_1 + \mu_1)e_1 + \cdots + (\alpha\lambda_n + \mu_n)e_n \end{aligned}$$

Ceci montre que les coordonnées de $\alpha u + v$ dans la base $\mathscr{B}$ sont $(\alpha\lambda_1 + \mu_1, \ldots, \alpha\lambda_n + \mu_n)$, et donc pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$:

$$e_i^*(\alpha u + v) = \alpha\lambda_i + \mu_i = \alpha e_i^*(u) + e_i^*(v)$$

L'application e_i^* est linéaire. Comme ses valeurs sont des scalaires elle est bien une forme linéaire. $\square$

Proposition

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Toute forme linéaire $f : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}$ est de la forme :

$$f : (x_1, \ldots, x_p) \mapsto a_1 x_1 + \cdots + a_p x_p$$

où $a_1, \ldots, a_p$ sont des scalaires.

Remarque. On constate que f est l'application $a_1 e_1^* + \cdots + a_p e_p^*$.
Une combinaison linéaire d'applications linéaires est linéaire donc f est une forme linéaire.

Démonstration. Soit $f : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}$ une forme linéaire. Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$. On note $a_i = f(e_i)$ pour tout $i = 1, \ldots, p$. Les a_i sont donc des scalaires.

Soit u un vecteur de $\mathbb{K}^p$ de coordonnées $(x_1, \ldots, x_p)$ dans la base canonique :

$$u = x_1 e_1 + \cdots + x_p e_p$$

Par linéarité :

$$f(u) = x_1 f(e_1) + \cdots + x_p f(e_p) = a_1 x_1 + \cdots + a_p x_p$$

Ceci est bien le résultat annoncé. □

B. Applications à valeurs dans $\mathbb{K}^n$

Définition

Soit $f : E \to \mathbb{K}^n$ une application. Pour tout $u \in E$ et $i \in \{1, \ldots, n\}$ on note $f_i(u)$ la composante d'indice i de $f(u)$, *i.e.*, $f_i(u)$ est un scalaire et :

$$\forall u \in E \qquad f(u) = (f_1(u), \ldots, f_n(u))$$

L'application $f_i : E \to \mathbb{K}$ est appelée *composante de f* d'indice i.

Proposition

Une application $f : E \to \mathbb{K}^n$ est linéaire si et seulement si toutes ses composantes f_i sont linéaires. (Ce sont alors des formes linéaires.)

Exemple. L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = (4x + 3y, x - 5y)$$

admet pour composantes :

Ces deux applications sont des formes linéaires car elles sont de la forme $(x, y) \mapsto ax + by$, donc par propriété f est linéaire.

Démonstration. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Alors les f_i sont les composées $e_i^* \circ f$. On sait que les e_i^* sont linéaires. Par composition, si f est linéaire alors les f_i sont linéaires.

Réciproquement, supposons que les f_i sont linéaires.

Soit u et v deux vecteurs de E et λ un scalaire. Alors :

$$\begin{aligned} f(\lambda u + v) &= (f_1(\lambda u + v), \dots, f_n(\lambda u + v)) \\ &= (\lambda f_1(u) + f_1(v), \dots, \lambda f_n(u) + f_n(v)) \qquad \text{par linéarité des } f_i \\ &= \lambda(f_1(u), \dots, f_n(u)) + (f_1(v), \dots, f_n(v)) \\ &= \lambda f(u) + f(v) \end{aligned}$$

Ceci montre que f est linéaire. □

Remarque. Les deux propositions précédentes montrent que toute application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ (où p et n sont deux entiers naturels non-nuls) est de la forme :

$$f(x_1, \dots, x_p) = (a_{11}x_1 + \dots + a_{1p}x_p, \dots, a_{n1}x_1 + \dots + a_{np}x_p)$$

où les a_{ij} pour $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, p$ sont des scalaires.
Ceci correspond à la multiplication matricielle à gauche :

$$\begin{aligned} m_A : \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X &\longmapsto AX \end{aligned}$$

où A est la matrice $(a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$, de taille (n, p).
Nous avons démontré que toute application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ est donnée par une matrice de taille (n, p).

C. Droites et hyperplans

Définition

Une *droite vectorielle* est un sous-espace vectoriel engendré par un vecteur non-nul.

Remarque. Si u_0 est un vecteur non-nul d'une droite vectorielle D, alors il engendre D : $D = \text{Vect}(u_0)$.

Exemple. Toute droite de $\mathbb{K}^p$ est de la forme :

$$D = \{(\lambda a_1, \dots, \lambda a_p) \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$$

où $u = (a_1, \dots, a_p)$ est un vecteur non-nul de $\mathbb{K}^p$.

Définition

Un *hyperplan* de E est le noyau d'une forme linéaire non-nulle de E.

Remarque. Soit H un hyperplan de E. Alors il existe $\varphi : E \to \mathbb{K}$ linéaire non-nulle telle que $H = \ker \varphi$. En particulier H est un sous-espace vectoriel de E.

Exemple. Un hyperplan de $\mathbb{K}^p$ est un ensemble d'équation :

$$a_1 x_1 + \cdots + a_p x_p = 0$$

où les a_i sont des scalaires non tous nuls.

Si $p = 2$ il s'agit d'une droite vectorielle, si $p = 3$ il s'agit d'un plan vectoriel.

▷ **Exercice 6.**

Proposition

Soit H un hyperplan de E.
Alors il existe une droite vectorielle supplémentaire de H dans E.
Plus généralement toute droite vectorielle non contenue dans H est supplémentaire de H dans E : Si $D \not\subseteq H$ alors $E = H \oplus D$.

Démonstration. Comme H est un hyperplan de E alors il existe une forme linéaire $\varphi : E \to \mathbb{K}$ non-nulle dont H est le noyau.

Comme φ est non-nulle alors il existe $u_0 \in E$ tel que $\varphi(u_0) \neq 0$.

Posons $D = \text{Vect}\,(u_0)$. Comme $\varphi(u_0)$ est non-nul alors u_0 est non-nul, et donc D est une droite vectorielle.

Démontrons que H et D sont supplémentaires dans E.

Les points *(i)* et *(ii)* montrent que H et D sont supplémentaires dans E : $\quad E = H \oplus D$

Si maintenant D est une droite vectorielle non incluse dans H alors elle contient un vecteur u_0 n'appartenant pas H, donc tel que $\varphi(u_0) \neq 0$. On peut donc appliquer ce qui précède : H et D sont supplémentaires dans E. □

Proposition

Soit D une droite vectorielle de E. Alors tout supplémentaire de D dans E est un hyperplan de E.

Démonstration. Soit H un supplémentaire de D dans E.

Comme D est une droite vectorielle alors elle est engendrée par un vecteur non-nul u_0. Celui-ci forme une base de D. La forme coordonnée u_0^* est alors une forme linéaire de D dans $\mathbb{K}$, qui au vecteur $u = \lambda u_0$ associe λ.

Notons $\varphi_1 : D \to \mathbb{K}$ cette application linéaire, et $\varphi_2 : H \to \mathbb{K}$ l'application nulle de H dans $\mathbb{K}$.

Comme $E = D \oplus H$ alors il existe une et une seule application linéaire $\varphi : E \to \mathbb{K}$ dont la restriction à D est φ_1 et la restriction à H est φ_2.

Soit u un élément de E. Alors u se décompose dans la somme $E = D \oplus H$ en somme $u = \lambda u_0 + v$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ et $v \in H$. Par définition de φ : $\quad \varphi(u) = \varphi_1(\lambda u_0) + \varphi_2(v) = \lambda$

Ceci montre que $\varphi(u)$ est nul si et seulement si $\lambda = 0$, donc si et seulement si $u \in H$. Ainsi $H = \ker \varphi$.

Or φ est une forme linéaire, non-nulle car $\varphi(u_0) = 1$, donc H est un hyperplan. □

Proposition

Soit φ et ψ deux formes linéaires. Si $\ker \varphi = \ker \psi$ alors φ et ψ sont proportionnelles, *i.e.*, il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $\psi = \lambda\varphi$.

Remarque. Ainsi, pour tout hyperplan H de E, les formes linéaires dont H est le noyau sont proportionnelles.

Par exemple si un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ admet pour équation $ax + by + cz = 0$, alors ses équations sont toutes de la forme $\lambda ax + \lambda by + \lambda cz = 0$ avec $\lambda \neq 0$.

Démonstration. Si φ est nulle alors son noyau est E tout entier. Comme $\ker \varphi = \ker \psi$ alors ψ est nulle également, donc φ et ψ sont proportionnelles.

Supposons que φ est non-nulle. Alors $\ker \varphi$ est un hyperplan que l'on note H.

Il admet une droite vectorielle supplémentaire D, engendrée par un vecteur u_0 non-nul.

Alors $\varphi(u_0) \neq 0$, et comme $\ker \varphi = \ker \psi$ alors $\psi(u_0) \neq 0$.

On cherche à démontrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\psi = \lambda\varphi$, c'est-à-dire tel que l'application $f = \psi - \lambda\varphi$ est nulle. On doit donc avoir $f(u_0) = 0$, *i.e.*, $\lambda = \frac{\psi(u_0)}{\varphi(u_0)}$.

Ce scalaire λ est bien défini, il est non-nul. Démontrons qu'alors f est nulle.

Par combinaison linéaire f est une forme linéaire.

Soit v un élément de H. Alors v est dans le noyau de φ et de ψ, donc :

$$f(v) = \psi(v) - \lambda\varphi(v) = 0$$

Soit w est un élément de D. Alors il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $w = \alpha u_0$, donc :

$$f(w) = \alpha f(u_0) = \alpha(\psi(u_0) - \lambda\varphi(u_0)) = 0 \qquad \text{car} \qquad \lambda = \frac{\psi(u_0)}{\varphi(u_0)}$$

Ainsi f est nulle sur H et D, avec H et D supplémentaires dans E. Une application linéaire sur $E = H \oplus D$ est uniquement déterminée par ses restrictions à H et D, donc f est l'application nulle de E dans $\mathbb{K}$.

Ceci montre que $\psi = \lambda\varphi$. Or λ est non-nul, donc ψ et φ sont proportionnelles. □

V. Sous-espaces affines

On note toujours E un espace vectoriel.

A. Définitions

Définition

Un *sous-espace affine* de E est un sous-ensemble de la forme :

$$A = a + F = \{a + u \mid u \in F\}$$

où a est un élément de E et F est un sous-espace vectoriel de E.

Définition

Soit a un vecteur de E. La *translation* de E de vecteur a est l'application :

$$\begin{aligned} t_a : E &\longrightarrow E \\ u &\longmapsto u + a \end{aligned}$$

Remarques.

- Les translations ne sont pas des applications linéaires (sauf si $a = 0_E$).
- Ainsi le sous-espace affine $A = a + F$ est l'image du sous-espace vectoriel F par la translation de vecteur a : $A = t_a(F)$

- Tout singleton $\{a\}$ avec $a \in E$ est un sous-espace affine de E, appelé *point* de E.
  L'image d'un point par une translation est un point.
  On peut donc additionner un point et un vecteur, la somme est un point :
  Si A est un point et $\vec{u}$ est un vecteur alors $B = A + \vec{u}$ est le point tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.
  En pratique tout élément de E peut être considéré comme un point ou un vecteur.

Exemple 5.

- Soit $E = \mathbb{R}^2$. Alors la droite A d'équation $y = 2x - 5$ est un sous-espace affine.
  En effet on peut poser $F = \text{Vect}\left((1, 2)\right)$ et $a = (0, -5)$, alors $A = a + F$.
- Plus généralement, les sous-espaces affines de $\mathbb{R}^2$ sont les points du plan, les droites du plan, et le plan tout entier.
- De même les sous-espaces affines de $\mathbb{R}^3$ sont les points, les droites, les plans et l'espace tout entier.

Proposition

Soit a et b deux points de E, F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
Si $a + F = b + G$ alors $F = G$ et $b - a \in F$.

Remarque. En conséquence le sous-espace vectoriel définissant un sous-espace affine A est uniquement déterminé.

Par contre le point a peut être remplacé par n'importe quel point de A.

Définition

Si $A = a + F$ est un sous-espace affine de E alors on dit que F est la *direction* de A, ou que A est *dirigé* par F.

Démonstration.

B. Intersection de sous-espaces affines

Proposition

Soit $A = a + F$ et $B = b + G$ deux sous-espaces affines de E, avec a, b points de E et F, G sous-espaces vectoriels de E.
Alors l'intersection $A \cap B$ est :

- soit vide,
- soit un sous-espace affine de direction $F \cap G$.

Démonstration. Supposons que $A \cap B$ est non-vide. On note c un élément de $A \cap B$. Démontrons qu'alors $A \cap B = c + F \cap G$.

Comme $c \in A$ et $c \in B$ alors $A = c + F$ et $B = c + G$.

Soit $d \in A \cap B$. Alors il existe $u \in F$ tel que $d = c + u$ et $v \in G$ tel que $d = c + v$, donc $u = v \in F \cap G$. Ainsi $d \in c + F \cap G$.

On a démontré que $A \cap B \subseteq c + F \cap G$.

Réciproquement : $F \cap G \subseteq F$ donc $c + F \cap G \subseteq c + F = A$. De même $c + F \cap G \subseteq B$, donc $c + F \cap G \subseteq A \cap B$.

Par double inclusion $A \cap B = c + F \cap G$. □

▷ **Exercice 7.**

C. Équations linéaires

Proposition

Soit S un système linéaire de n équations à p inconnues.
Soit S_h le système linéaire homogène associé.

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases} \qquad S_h : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = 0 \end{cases}$$

Alors l'ensemble des solutions de S est un sous-espace affine de $\mathbb{K}^p$.
Sa direction est l'ensemble des solutions du système homogène S_h.

Exemple 6. Résolution du système linéaire :

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 5 \\ 2x + 5y - z = 4 \end{cases}$$

Proposition

- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, a et b deux fonctions continues définies sur I. Alors l'ensemble des solutions de l'équation différentielle :

$$y' - a(t)y = b(t)$$

  est un sous-espace affine de $\mathscr{F}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$.
  Sa direction est l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène associée.
- Soit a, b, c trois réels, et $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Alors l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$ay'' + by' + cy = d(t)$$

  est un sous-espace affine de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, de direction l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène associée.

Remarque. Dans les deux cas ci-dessus, l'ensemble des solutions s'écrit :

$$\mathscr{S} = \{y_1 + y_0 \mid y_0 \in \mathscr{S}_h\} = y_1 + \mathscr{S}_h$$

où y_1 est une solution particulière de l'équation différentielle et $\mathscr{S}_h$ est l'ensemble des solutions de l'équation homogène, lequel est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de I ou de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Proposition

Soit $f : E \to F$ une application linéaire, et b un élément de F.
Alors l'ensemble des solutions de l'équation $f(u) = b$ d'inconnue $u \in E$ est :

- soit vide,
- soit un sous-espace affine de E de direction $\ker f$.

Remarques.

- Si f est linéaire alors une équation de la forme $f(u) = b$ est appelée *équation linéaire*.
- La proposition ci-dessus démontre simultanément les deux propositions ci-dessous.

Démonstration. Supposons que l'ensemble des solutions de l'équation $f(u) = b$ est non-vide. Il contient alors un vecteur u_1 de E.

Pour tout autre vecteur u de E on peut écrire :

$$\begin{aligned}
f(u) = b \quad & \iff \quad f(u) = f(u_1) \\
& \iff \quad f(u) - f(u_1) = 0_F \\
& \iff \quad f(u - u_1) = 0_F \qquad \text{car } f \text{ est linéaire} \\
& \iff \quad u - u_1 \in \ker f \\
& \iff \quad u \in u_1 + \ker f
\end{aligned}$$

Ceci montre que l'ensemble des solutions de l'équation $f(u) = b$ d'inconnue $u \in E$ est l'ensemble $u_1 + \ker f$, qui est bien un sous-espace affine de E dirigé par $\ker f$. □

▷ **Exercice 8.**