

## Devoir à la Maison n°10

Le but de ce devoir est de démontrer le théorème suivant :

### Théorème

Soit  $a$  un réel, et  $f$  une fonction continue sur  $[a, +\infty[$ , de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]a, +\infty[$ . On suppose que :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} f(a)$$

Alors les dérivées successives  $(f^{(n)})_{n \geq 1}$  s'annulent toutes.

Les questions 1 et 3 vérifient le théorème sur deux exemples.

Les questions 2 et 4 démontrent deux résultats intermédiaires utiles pour la suite.

1. Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$$

- Justifier que  $f$  vérifie les hypothèses du théorème avec  $a = 0$ .
- Déterminer  $f^{(n)}(x)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R}_+$ .
- Vérifier que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  il existe  $\alpha_n \in \mathbb{R}_+$  tel que  $f^{(n)}(\alpha_n) = 0$ .

2. Démontrer le résultat suivant :

### Lemme 1

Soit  $n$  un entier naturel et  $f$  une fonction réelle de classe  $\mathcal{C}^n$  sur un intervalle  $I$ . On suppose qu'il existe des réels  $a_0 < a_1 < \dots < a_n$  appartenant à  $I$  tels que :

$$f(a_0) = \dots = f(a_n) = 0$$

Alors il existe  $c \in I$  tel que  $f^{(n)}(c) = 0$ .

3. On définit maintenant :

$$f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{\sin(x^2)}{x}$$

- Justifier que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ , et prolongeable par continuité à  $\mathbb{R}_+$ .  
On note encore  $f$  la fonction prolongée à  $\mathbb{R}_+$ .

(b) Démontrer :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} f(0)$$

- Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  il existe  $\alpha_n \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $f^{(n)}(\alpha_n) = 0$ .
- Calculer la dérivée de  $f$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ , et démontrer que cette dérivée n'admet pas de limite en  $+\infty$ .

4. Dans cette question on démontre le résultat suivant :

**Lemme 2**

Soit  $a$  un réel, et  $f$  une fonction continue sur  $]a, +\infty[$ , dérivable sur  $]a, +\infty[$ .

On suppose :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} f(a)$$

Alors  $f'$  s'annule sur  $]a, +\infty[$ .

Soit  $f$  une fonction vérifiant les hypothèses de ce lemme. On définit :

$$g : \left[ \arctan a, \frac{\pi}{2} \right[ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(\tan x)$$

(a) Démontrer que  $g$  est prolongeable par continuité sur l'intervalle  $\left[ \arctan a, \frac{\pi}{2} \right]$ .

On note toujours  $g$  le prolongement par continuité obtenu.

(b) Démontrer qu'il existe  $c \in \left] \arctan a, \frac{\pi}{2} \right[$  tel que  $g'(c) = 0$ .

(c) En déduire qu'il existe  $\alpha \in ]a, +\infty[$  tel que  $f'(\alpha) = 0$ .

On souhaite maintenant démontrer le théorème.

Soit  $f$  une fonction vérifiant ses hypothèses.

5. Justifier qu'il existe  $\alpha \in ]a, +\infty[$  tel que  $f'(\alpha) = 0$ .

6. Soit  $x \geq a$ . Démontrer qu'il existe  $c_x \in ]x, x + 1[$  tel que  $f'(c_x) = f(x + 1) - f(x)$ .

7. On suppose que  $f'$  est monotone sur un voisinage de  $+\infty$ .

(a) Justifier que  $f'$  admet une limite en  $+\infty$ .

(b) Démontrer que cette limite est nulle.

8. On suppose que  $f'$  n'est monotone sur aucun voisinage de  $+\infty$ .

(a) Construire par récurrence une suite de réels  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  strictement croissante, avec  $x_0 > a$ , telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f''(x_n)$  est du signe de  $(-1)^n$ .

(b) En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  il existe  $\alpha_n \in [a, +\infty[$  tel que  $f^{(n)}(\alpha_n) = 0$ .

9. Démontrer le théorème par récurrence.

Remarque : les exemples des questions 1 et 3 montrent que les deux cas de la démonstration peuvent se produire.