TD. B8
Espaces vectoriels

Exercices de cours

1 Les trois ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?
$$F_1 = \{(x, 2) \mid x \in \mathbb{R}\}$$
$$F_2 = \{(x, 2x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$
$$F_3 = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

2 Soit a un réel et C_a l'ensemble des suites réelles convergeant vers a. Soit :
$$C = \bigcup_{a\in\mathbb{R}} C_a.$$
Les ensembles C_a et C sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

3 Démontrer que $\mathscr{T}_n(\mathbb{K})$, $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$, $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ sont des espaces vectoriels.

4 Soit $E = \mathbb{R}^5$ et $F = \operatorname{Vect}(u_1, u_2)$ où :
$$u_1 = (0, 1, 0, 0, 0) \quad \text{et} \quad u_2 = (1, 1, 1, 1, 1).$$
Les vecteurs $v_1 = (5, 3, 5, 5, 5)$
$v_2 = (2, 2, 1, 1, 2)$
$v_3 = (-5, -5, -5, -5, -5)$
sont-ils éléments de F ?

5 Donner une condition nécessaire et suffisante pour avoir l'égalité $F = F + G$.

6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $\mathscr{T}_n(\mathbb{K}) + \mathscr{T}'_n(\mathbb{K})$.
Cette somme est-elle directe ?

7 Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Soit F l'ensemble des fonctions paires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, G l'ensemble des fonctions impaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

a. Démontrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
b. Démontrer que F et G sont supplémentaires.
(Raisonner par analyse-synthèse.)

8 Donner une famille génératrice de :
$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x - 2y + z - 5t = 0\}$$
$$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y = z + 3t = 0\}$$
$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 5y - 4z = 0\}.$$

9 Les familles suivantes de $\mathbb{R}^3$ sont-elles libres ?
$$\mathscr{F}_1 = ((3, 2, 1), (1, 1, 1), (6, 3, 1))$$
$$\mathscr{F}_2 = ((4, 3, 1), (1, 2, 4), (6, 5, 3)).$$

10 Les familles suivantes de $\mathbb{K}[X]$ sont-elles libres ?
$\mathscr{F}_1 = (2 + X^2,\ -2 - X + X^2,\ 3X)$
$\mathscr{F}_2 = (1 + X^2,\ 2 + X + X^2,\ 1 + X)$
$\mathscr{F}_3 = (1,\ (X - 3),\ (X - 4)^2)$
$\mathscr{F}_4 = ((X - 1)(X - 2),\ (X - 1)(X - 3),\ (X - 2)(X - 3)).$

11 Soit $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et f_1, f_2, f_3 les trois éléments de E définis par :
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f_1(x) = \cos x, \quad f_2(x) = \sin x, \quad f_3(x) = \cos\left(x + \tfrac{\pi}{3}\right).$$
La famille (f_1, f_2, f_3) est-elle libre ?

12 Soit : $E = \mathbb{R}^2 \qquad u_1 = (2, 1) \qquad u_2 = (1, 2)$

a. Démontrer que (u_1, u_2) est une base de E.
b. Calculer les coordonnées dans cette base des vecteurs $v = (13, 11)$ et $w = (-5, 1)$.

13 Soit $E = \mathbb{R}^4$. On note $\mathscr{B}$ la famille des vecteurs :
$$u_1 = (2, 1, 0, 0) \qquad u_2 = (0, 0, 0, 1)$$
$$u_3 = (1, 0, 1, 1) \qquad u_4 = (0, 0, 1, 0).$$
a. Démontrer que la famille $\mathscr{B}$ est libre.
b. Exprimer les quatre vecteurs de la base canonique de E en fonction des u_i.
c. En déduire que la famille $\mathscr{B}$ est génératrice de E.
d. Déterminer les coordonnées dans cette base des vecteurs :
$$v_1 = (8, 2, 4, 4) \quad \text{et} \quad v_2 = (-1, -2, 1, 8)$$

14 On considère la famille :
$$\mathscr{B} = (3,\ 2 - X,\ 1 + 2X + X^2).$$
a. Démontrer que 1, X et X^2 sont combinaisons linéaires des éléments de $\mathscr{B}$.
b. En déduire que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.
c. Donner les coordonnées dans cette base du polynôme $2 + 2X + 2X^2$.

Travaux dirigés

1 Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

$F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$
$F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 0\}$
$F_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 1\}$
$F_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$
$F_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geqslant 0\}$
$F_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant y\}$
$F_7 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x - \pi y = 0\}$
$F_8 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \in \mathbb{Q}\}$
$F_9 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y^2\}$
$F_{10} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0\}$.

2 Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

F_1 : ensemble des suites strictement croissantes
F_2 : ensemble des suites croissantes
F_3 : ensemble des suites monotones
F_4 : ensemble des suites bornées
F_5 : ensemble des suites périodiques
F_6 : ensemble des suites convergentes
F_7 : ensemble des suites divergentes ou nulles
F_8 : ensemble des suites arithmétiques
F_9 : ensemble des suites géométriques.

3 Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?

F_1 : ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
F_2 : ensemble des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
$F_3 = \mathscr{C}^4([1, 8], \mathbb{R})$
F_4 : ensemble des fonctions 2π-périodiques
F_5 : ensemble des fonctions périodiques.

4 Soit E un espace vectoriel, F, G et H trois sous-espaces vectoriels de E. Démontrer que :

a. $(F \cap G) + (F \cap H) \subseteq F \cap (G + H)$
b. $F + (G \cap H) \subseteq (F + G) \cap (F + H)$
c. Les inclusions ci-dessus sont en général strictes.

5 Soit E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

Démontrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subseteq G$ ou $G \subseteq F$.

6 Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$ on note F le sous-espace vectoriel engendré par :

$$u_1 = (1, -3, 5, 2) \quad \text{et} \quad u_2 = (1, -1, -4, 3).$$

a. Le vecteur $v = (2, -10, 26, 2)$ est-il élément de F ?
b. Soit G l'ensemble des vecteurs (x, y, z, t) de F tels que $y = 0$. Démontrer que G est un sous-espace vectoriel de E.

7 On définit dans $\mathbb{R}^4$:

$$u_1 = (1, 2, 0, 0) \qquad u_2 = (1, 0, 2, -2)$$
$$v_1 = (1, 1, 1, -1) \qquad v_2 = (0, 1, -1, 1).$$

Démontrer que $\mathrm{Vect}\,(u_1, u_2) = \mathrm{Vect}\,(v_1, v_2)$.

8 Même question dans $\mathbb{R}^3$ avec :

$$u_1 = (2, 2, -1) \qquad u_2 = (5, 7, -5)$$
$$v_1 = (3, 1, 1) \qquad v_2 = (7, 5, -1).$$

9 Soit $E = \mathbb{R}^3$ puis :

F l'ensemble des triplets (x, y, z) tels que $x = y$,
G l'ensemble des triplets tels que $y = z$.

a. Démontrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
b. Démontrer que $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ sont éléments de $F + G$.
En déduire que $E = F + G$.
c. Cette somme est-elle directe ?

10 On définit les vecteurs suivants de $E = \mathbb{R}^4$:

$$u_1 = (1, 0, 0, 0) \qquad u_2 = (1, 1, 0, 0)$$
$$v_1 = (1, 1, 1, 0) \qquad v_2 = (1, 1, 1, 1).$$

On pose ensuite :

$$F = \mathrm{Vect}\,(u_1, u_2) \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Vect}\,(v_1, v_2).$$

Démontrer que $E = F \oplus G$.

11 Dans chacun des cas suivants, démontrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

a. $E = \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$
$F = \mathrm{Vect}\,(u_0)$ où $u_0 = (1, 1, \ldots, 1)$
$G = \{(x_1, \ldots, x_n) \in E \mid x_1 + \cdots + x_n = 0\}$.
b. $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, F et G les ensembles des matrices respectivement symétriques et antisymétriques de E.
c. $E = \mathbb{R}_1[X]$
$F = \{P \in E \mid P(2) = 0\}$
$G = \{P \in E \mid P(3) = 0\}$.
d. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, F l'ensemble des fonctions f telles que $f(0) = 0$, G l'ensemble des fonctions constantes.

12 Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$, $F = \mathbb{R}_1[X]$ et :

$$G = \{P \in E \mid P(1) = P'(1) = 0\}.$$

a. Démontrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
b. Démontrer que F et G sont en somme directe.
c. En utilisant la formule de Taylor ou la division euclidienne, démontrer que $E = F + G$.
d. Donner la décomposition de X^3, X^2, X et 1 dans cette somme directe.

13 Soit $E = \mathbb{K}[X]$. Pour tout $a \in \mathbb{K}$ on pose :

$$E_a = \{P \in E \mid P(a) = 0\}.$$

a. Justifier que pour tout $a \in \mathbb{K}$, E_a est un sous-espace vectoriel de E.
b. Démontrer que si $a \neq b$ alors $E = E_a + E_b$.
c. Cette somme est-elle directe ?

14 Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[0,\pi]$ dans $\mathbb{R}$, F l'ensemble des fonctions f de E vérifiant $f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = f(\pi)$ et $G = \mathrm{Vect}_E(\cos, \sin)$.

a. Démontrer que E est un espace vectoriel et que F et G en sont deux sous-espaces vectoriels.

b. Démontrer que pour tout $f \in E$ il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f - \alpha \cos - \beta \sin \in F$.

c. Démontrer que $E = F \oplus G$.

15 Les familles suivantes sont-elles libres ?

$\mathscr{F}_1 = ((1,1,0),(1,0,1),(0,1,1))$ dans $\mathbb{R}^3$

$\mathscr{F}_2 = ((1,1,a),(1,a,1),(a,1,1))$ dans $\mathbb{R}^3$ ($a \in \mathbb{R}$)

$\mathscr{F}_3 = ((1,6,5),(7,2,5),(9,2,6))$ dans $\mathbb{R}^3$

$\mathscr{F}_4 = ((1,3,4),(4,9,8),(16,27,16))$ dans $\mathbb{R}^3$

$\mathscr{F}_5 = ((2,1,-1,-2),(6,4,4,6),(0,1,7,12))$ dans $\mathbb{R}^4$

$\mathscr{F}_6 = (u_i = (3,\dots,3,\underset{(i)}{1},3,\dots,3) \mid i = 1\dots n)$ dans $\mathbb{R}^n$.

Démontrer que les familles $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_6$ sont génératrices.

16 Soit $E = \mathbb{R}^4$ et :

$$F = \{(x,y,z,t) \in E \mid 2x + y + t = 0\}$$
$$G = \{(x,y,z,t) \in E \mid x - z - 3t = 0\}.$$

a. Donner la dimension de F, G, puis $F \cap G$.

b. Déterminer $F + G$.

17 Soit $E = \mathbb{R}^4$ et :

$$F = \mathrm{Vect}\,((1,3,1,2),(2,4,2,3))$$
$$G = \{(x,y,z,t) \in E \mid x - t = y - z = 0\}.$$

Donner la dimension de F, G, $F \cap G$, puis $F + G$.

18 Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ et :

$$F = \{P \in E \mid P(1) = P(2) = 0\}$$
$$G = \{P \in E \mid P(3) = P(4) = 0\}.$$

a. Démontrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E et donner une base de chacun d'entre eux.

b. Démontrer que F et G sont supplémentaires.

19 Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, et F le sous-ensemble de E contenant les suites arithmétiques.

Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie et donner sa dimension.

20 Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

a. Soit F l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+2} = 2u_{n+1} + 15u_n.$$
Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E et en donner une base.

b. Même question avec les suites telles que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+2} = 8u_{n+1} - 16u_n.$$

21 Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ deux fois dérivables, ω un réel, et F l'ensemble des solutions de l'équation différentielle :

$$y'' + 2y' + \left(1 + \omega^2\right)y = 0.$$

a. On suppose que $\omega = 0$. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie et donner sa dimension.

b. Même question si ω est non-nul.

22 Démontrer que l'ensemble des fonctions sinusoïdales de période 2π :

$$f : x \mapsto A\sin(x + \varphi) + K \quad \text{avec} \quad (A, \varphi, K) \in \mathbb{R}^3$$

est un espace vectoriel de dimension finie et donner sa dimension.

23 Soit α un scalaire.

a. Démontrer que la famille $((X-\alpha)^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est libre.

b. Démontrer que cette famille est une base de $\mathbb{K}[X]$, et donner les coordonnées d'un polynôme quelconque P dans cette base.

24 Pour tout $a \in \mathbb{R}$ on définit $f_a : t \mapsto |t - a|$.

La famille $\{f_a \mid a \in \mathbb{R}\}$ est-elle libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?

On pourra utiliser la dérivabilité.

25 Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ on définit la fonction :

$$f_\alpha : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{1+x^\alpha} \end{array}$$

a. Démontrer que la partie $\mathscr{E} = \{f_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ est liée.

b. Démontrer que la partie $\mathscr{F} = \{f_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}_+\}$ est libre.

c. La partie $\mathscr{F}$ est-elle génératrice ?