

## Chapitre B8

# Espaces vectoriels

Dans tout ce chapitre,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . On appelle *scalaires* ses éléments.

## I. Espaces vectoriels

### A. Définitions

#### Définitions

Un *espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$*  ou  *$\mathbb{K}$ -espace vectoriel* est un ensemble  $E$  dont les éléments sont appelés *vecteurs*, muni de deux opérations

$$+ : E \times E \longrightarrow E \quad \text{et} \quad \cdot : \mathbb{K} \times E \longrightarrow E$$

$$(u, v) \longmapsto u + v \quad (\lambda, u) \longmapsto \lambda u$$

appelées *addition* et *multiplication par un scalaire*, satisfaisant les propriétés :

- L'addition est commutative :  $\forall (u, v) \in E^2 \quad u + v = v + u$
- L'addition est associative :  $\forall (u, v, w) \in E^3 \quad (u + v) + w = u + (v + w)$
- Il existe un vecteur de  $E$  noté  $0_E$  et appelé *vecteur nul*, tel que :

$$\forall u \in E \quad u + 0_E = 0_E + u = u$$

- Tout vecteur  $u$  de  $E$  possède un *opposé* noté  $-u$ , satisfaisant :

$$u + (-u) = (-u) + u = 0_E$$

On note  $v - u$  au lieu de  $v + (-u)$ .

La multiplication par un scalaire vérifie :

- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \quad \forall u \in E \quad (\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$
- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \quad \forall u \in E \quad (\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall (u, v) \in E^2 \quad \lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$
- $\forall u \in E \quad 1_{\mathbb{K}}u = u$

#### Remarques.

- L'addition est une loi de composition interne alors que la multiplication par un scalaire est une loi de composition externe.
- Les quatre premiers points signifient que  $(E, +)$  est un groupe abélien.  
Ainsi un espace vectoriel est un triplet  $(E, +, \cdot)$  où  $(E, +)$  est un groupe abélien et  $\cdot$  est une loi vérifiant les propriétés ci-dessus.

**Propositions**

Pour tout  $(u, v) \in E^2$  et tout  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$  :

- (i)  $0_{\mathbb{K}}u = 0_E$
- (ii)  $\lambda 0_E = 0_E$
- (iii)  $(-1_{\mathbb{K}})u = -u$
- (iv)  $(\lambda - \mu)u = \lambda u - \mu u$
- (v)  $\lambda(u - v) = \lambda u - \lambda v$

Démonstrations.

**Proposition**

Soit  $u \in E$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Alors :

$$\lambda u = 0_E \iff (\lambda = 0_{\mathbb{K}} \text{ ou } u = 0_E)$$

Démonstration.

## B. Espaces vectoriels de référence

- *Espace vectoriel des  $n$ -uplets à coefficients dans  $\mathbb{K}$*

$$\mathbb{K}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid \forall i = 1, \dots, n \quad x_i \in \mathbb{K}\} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Si  $x = (x_1, \dots, x_n)$      $y = (y_1, \dots, y_n)$     et     $\lambda \in \mathbb{K}$     alors :

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \quad \text{et} \quad \lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

$$\text{Opposé : } -x = (-x_1, \dots, -x_n) \qquad \qquad \text{Vecteur nul : } 0_{\mathbb{K}^n} = (0, \dots, 0)$$

**Exemples.**  $\mathbb{R}^2$   $\mathbb{R}^3$  mais aussi  $\mathbb{K}^1 = \mathbb{K}$   $\mathbb{K}^0 = \{0\}$

- *Espace vectoriel des matrices de taille  $(n, p)$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$*

$$\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) \quad (n, p \in \mathbb{N}^*)$$

$$\text{Si } A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \quad B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \quad \text{et } \lambda \in \mathbb{K} \quad \text{alors :}$$

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \quad \text{et} \quad \lambda A = (\lambda a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

$$\text{Opposé : } -A = (-a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

$$\text{Vecteur nul : } 0_{\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})} = 0_{np} = (0)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

- *Espace vectoriel des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{K}$*

$$\mathbb{K}[X]$$

Si  $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$  et  $Q = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$  alors :

$$P + Q = \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k + b_k) X^k \quad \text{et} \quad \lambda P = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda a_k X^k$$

$$\text{Opposé : } -P = \sum_{k=0}^{+\infty} -a_k X^k \quad \text{Vecteur nul : } 0_{\mathbb{K}[X]} = \sum_{k=0}^{+\infty} 0_{\mathbb{K}} X^k = 0_{\mathbb{K}}$$

- *Espace vectoriel des applications de  $\Omega$  dans  $\mathbb{K}$ , où  $\Omega$  est un ensemble non-vide*

$\mathbb{K}^\Omega$  ou  $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{K})$

Si  $f$  et  $g$  sont deux applications de  $\Omega$  dans  $\mathbb{K}$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$  alors on définit :

$$f + g : \Omega \longrightarrow \mathbb{K} \quad \text{et} \quad \lambda f : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$x \longmapsto f(x) + g(x) \quad \quad \quad x \longmapsto \lambda f(x)$$

En d'autres termes :

$$\forall x \in \Omega \quad (f + q)(x) = f(x) + q(x) \quad \text{et} \quad (\lambda f)(x) = \lambda(f(x))$$

Opposé :  $-f$  est l'application  $x \mapsto -f(x)$       Vecteur nul :  $0_{\mathbb{K}^n}$  est l'application  $x \mapsto 0_{\mathbb{K}}$

**Exemples.**

- $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  est l'espace vectoriel des applications de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , aussi noté  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .
- $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  est l'espace vectoriel des suites indexées par  $\mathbb{N}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , avec :

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} + (v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{et} \quad \lambda(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\lambda u_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

- $\mathbb{R}^{\Omega}$  avec  $\Omega = \{1, \dots, n\}$  est naturellement identifié à l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$ .

- *Produit cartésien de deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels :*

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Le produit cartésien des ensembles  $E$  et  $F$  est :

$$E \times F = \{(x, y) \mid x \in E \text{ et } y \in F\}$$

Il est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel si on le munit des opérations suivantes :

Pour tous  $(x, y), (x', y')$  éléments de  $E \times F$  et  $\lambda$  scalaire on pose :

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \quad \text{et} \quad \lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$$

Opposé :  $-(x, y) = (-x, -y)$

Vecteur nul :  $0_{E \times F} = (0_E, 0_F)$

- *Produit cartésien de  $n$  espaces vectoriels :*

Plus généralement, si  $(E_i)_{i=1, \dots, n}$  est une famille d'espaces vectoriels sur  $\mathbb{K}$ , alors

$$E_1 \times \dots \times E_n = \prod_{i=1}^n E_i$$

est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, muni des opérations évidentes d'addition et de multiplication par un scalaire termes à termes.

**Définition (Hors programme)**

Une *algèbre* sur  $\mathbb{K}$ , ou  $\mathbb{K}$ -*algèbre* est un ensemble  $A$  muni de deux lois de composition internes  $+$  et  $\times$  et d'une loi de composition externe  $\cdot$  tels que

- $(A, +, \cdot)$  est un espace vectoriel
- $(A, +, \times)$  est un anneau
- Pour tous  $u, v$  dans  $A$  et  $\lambda$  dans  $\mathbb{K}$  :  $\lambda(u \times v) = (\lambda u) \times v = u \times (\lambda v)$ .

**Exemples.**  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$   $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$   $\mathbb{K}[X]$   $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  sont des algèbres.

## II. Sous-espaces vectoriels

### A. Définition et exemples

#### Définition

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ . Un *sous-espace vectoriel* de  $E$  est une partie  $F$  de  $E$  non-vide, stable par addition et par multiplication par un scalaire, *i.e.*, telle que :

$$\begin{aligned} \forall (u, v) \in F^2 \quad & u + v \in F \\ \forall u \in F \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad & \lambda u \in F \end{aligned}$$

#### Proposition (Caractérisation des sous-espaces vectoriels)

Un ensemble  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  si et seulement si :

- (i)  $F \subseteq E$
- (ii)  $0_E \in F$
- (iii)  $\forall (u, v) \in F^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \lambda u + v \in F$

Démonstration. Si  $F$  est une partie non-vide de  $E$  alors elle contient un vecteur  $u$ . Comme  $0_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K}$  alors  $0_{\mathbb{K}}u \in F$ , donc  $0_E \in F$ .

Le reste se démontre facilement.  $\square$

**Remarque.** Pour démontrer qu'un ensemble  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  on utilise la caractérisation plutôt que la définition.

#### Proposition

Si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  alors  $F$  est un espace vectoriel.

Démonstration. L'ensemble  $F$  est stable par les lois d'addition et de multiplication par un scalaire de  $E$ , ce qui permet de définir les lois induites :

$$+ : F \times F \rightarrow F \quad \text{et} \quad \cdot : \mathbb{K} \times F \rightarrow F$$

Comme elles vérifient les axiomes de définition d'un espace vectoriel dans  $E$  alors elles vérifient aussi ces lois dans  $F$ .  $\square$

**Remarque.** Pour démontrer qu'un ensemble  $E$  est un espace vectoriel, il est souvent plus facile de vérifier qu'il est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence, comme  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ ,  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  ou  $\mathbb{R}[X]$ .

#### Définition

Soit  $u_1, u_2, \dots, u_n$  des éléments de  $E$  et  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  des scalaires. Alors le vecteur

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n$$

est appelé *combinaison linéaire* des vecteurs  $u_1, u_2, \dots, u_n$ .

**Remarques.**

- Une combinaison linéaire de plusieurs vecteurs d'un espace vectoriel est élément de cet espace vectoriel, car un sous-espace vectoriel est stable par addition et multiplication par un scalaire.
- Un sous-espace vectoriel de  $E$  est une partie non-vide de  $E$  stable par combinaisons linéaires.
- Quel que soit l'espace vectoriel  $E$ , les ensembles  $\{0_E\}$  et  $E$  sont deux sous-espaces vectoriels de  $E$ .

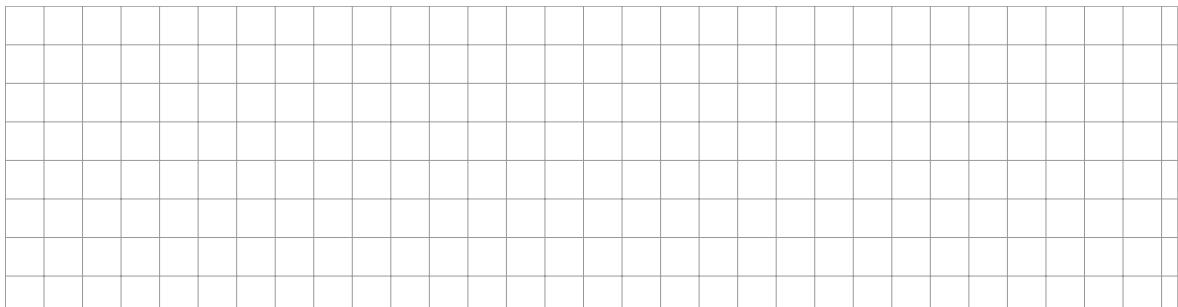
**Exemples géométriques.**

- Soit  $\vec{u}$  un vecteur non-nul de  $\mathbb{R}^2$ . L'ensemble des combinaisons linéaires de  $\vec{u}$  est l'ensemble :

$$\{ \lambda \vec{u} \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$$

Il s'agit de la droite passant par l'origine, de vecteur directeur  $\vec{u}$ .

C'est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^2$ .



- Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ . L'ensemble des combinaisons linéaires de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est l'ensemble

$$\{ \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \}$$

Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas colinéaires alors il s'agit du plan contenant l'origine, dirigé par les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .



## Remarques.

- Les sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^2$  sont  $\{0_{\mathbb{R}^2}\}$ , les droites passant par  $0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0)$  et  $\mathbb{R}^2$  tout entier.
  - Les sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$  sont  $\{0_{\mathbb{R}^3}\}$ , les droites passant par  $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0)$ , les plans contenant  $0_{\mathbb{R}^3}$ , et  $\mathbb{R}^3$  tout entier.

**Exemple 1.**  $\mathbb{R}_n[X]$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}[X]$ .

**Exemple 2.**  $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , l'ensemble des fonctions continues de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . De même pour  $\mathcal{C}^n$ ,  $\mathcal{C}^\infty$ , etc.

► Exercices 1, 2, 3.

## B. Intersection de sous-espaces vectoriels

## Proposition

Soit  $(F_i)_{i \in I}$  une famille de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel  $E$ .

Alors  $\bigcap_{i \in I} F_i$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

## Démonstration.

## C. Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs

## Définition

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, et  $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_n)$  une famille de vecteurs de  $E$ .

On note  $\text{Vect}(\mathcal{F})$  l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de  $\mathcal{F}$  :

## Proposition

L'ensemble  $\text{Vect}(\mathcal{F})$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

## Définition

Si  $\mathcal{F}$  est une famille de vecteurs d'un espace vectoriel  $E$  alors l'ensemble  $\text{Vect}(\mathcal{F})$  est appelé *sous-espace vectoriel de  $E$  engendré par  $\mathcal{F}$* .

## Exemples.

- Dans  $E = \mathbb{R}^2$  :

$$F = \text{Vect}(u) \text{ est}$$
$$G = \text{Vect}(u, v) \text{ est}$$

- Dans  $E = \mathbb{K}[X]$  :

$$\text{Vect}(1, X) = \quad \text{Vect}(1) = \quad \mathbb{K}_2[X] =$$

- Dans  $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ , soit :

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors :

$\text{Vect}(E_{11}, E_{22}) =$	$\text{Vect}(E_{11}, E_{12}, E_{22}) =$
$\text{Vect}(E_{11}, E_{21}, E_{22}) =$	$\text{Vect}(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}) =$

Démonstration de la proposition.

**Remarque.** L'espace vectoriel engendré par l'ensemble vide est le plus petit espace vectoriel possible :

$$\text{Vect}(\emptyset) =$$

► **Exercice 4.**

**Exemple 3.** Soit  $E = \mathbb{R}^3$   $u = (1, 3, 1)$   $v = (-1, -1, 0)$   $w = (0, 4, 2)$ .

Quel est le sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  engendré par  $u$ ,  $v$ , et  $w$  ?

**Remarques.** Soit  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  deux familles finies de vecteurs de  $E$  et  $w$  un vecteur de  $E$ .

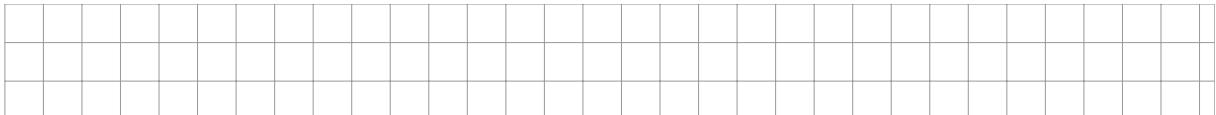
- Si  $w \in \text{Vect}(\mathcal{F})$  alors  $\text{Vect}(\mathcal{F} \cup \{w\}) =$
- Si  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$  alors  $\text{Vect}(\mathcal{F})$

## Propositions

Soit  $\mathcal{F}$  une famille finie de vecteurs de  $E$ . Alors :

- (i)  $\text{Vect}(\mathcal{F})$  est le plus petit sous-espace vectoriel de  $E$  contenant  $\mathcal{F}$ .
  - (ii)  $\text{Vect}(\mathcal{F})$  est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de  $E$  contenant  $\mathcal{F}$ .

**Remarque.** Le point (i) signifie : Soit  $\mathcal{F}$  une famille finie de vecteurs de  $E$  et  $G$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Alors :



Démonstration. (ii) Soit  $F$  l'intersection des sous-espaces vectoriels de  $E$  contenant  $\mathcal{F}$  :

$$F = \bigcap_{\substack{G \text{ sev de } E \\ \mathcal{F} \subseteq G}} G$$

Comme  $\text{Vect}(\mathcal{F})$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  contenant  $\mathcal{F}$ , alors  $F \subseteq \text{Vect}(\mathcal{F})$ .

Pour démontrer l'inclusion réciproque, choisissons un élément  $u$  de  $\text{Vect}(\mathcal{F})$  :

$$u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$$

où les  $\lambda_i$  sont des scalaires et les  $u_i$  appartiennent à  $\mathcal{F}$ .

Les  $u_i$  appartiennent alors à tous les sous-espaces vectoriels  $G$  de  $E$  contenant  $\mathcal{F}$ . Comme ceux-ci sont des sous-espaces vectoriels, ils sont stables par combinaison linéaire et donc contiennent tous  $u$ . Ainsi  $u$  est élément de  $F$ .

On en déduit que  $\text{Vect}(\mathcal{F}) \subseteq F$ , puis par double inclusion  $F = \text{Vect}(\mathcal{F})$ .

(i) Nous savons que  $\text{Vect}(\mathcal{F})$  est un sous-espace vectoriel contenant  $\mathcal{F}$ . D'après ce qui précède, si  $G$  est un autre sous-espace vectoriel de  $E$  contenant  $\mathcal{F}$  alors  $\text{Vect}(\mathcal{F}) \subset G$ , car  $\text{Vect}(\mathcal{F})$  est l'intersection de tous les tels sous-espaces vectoriels.

Ceci signifie que  $\text{Vect}(\mathcal{F})$  est le plus petit sous-espace vectoriel de  $E$  contenant  $\mathcal{F}$ .  $\square$

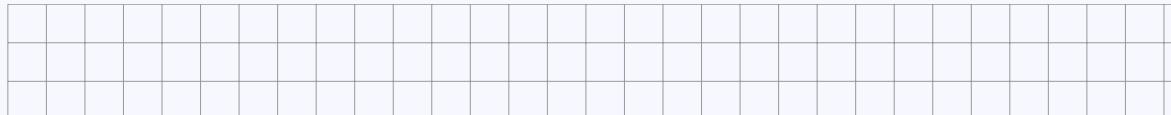
## D. Sommes de sous-espaces vectoriels

**Remarque.** En général  $F \cup G$  n'est pas un sous-espace vectoriel de  $E$ , comme le montre l'exemple de deux droites non confondues de  $\mathbb{R}^2$ .

## Notation

Soit  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ .

On note  $F + G$  l'ensemble des sommes d'un élément de  $F$  et d'un élément de  $G$  :



## Proposition

Si  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$  alors  $F+G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

## Définition

Le sous-espace vectoriel  $F + G$  de  $E$  est appelé *somme* de  $F$  et de  $G$ .

### Démonstration.

(i) Si  $F$  et  $G$  sont inclus dans  $E$ , alors tout élément  $u$  de  $F$  et tout élément  $v$  de  $G$  est élément de  $E$ . Comme celui-ci est stable par addition, car c'est un espace vectoriel, alors  $u + v \in E$ . Ceci montre l'inclusion  $F + G \subseteq E$ .

(ii) Comme  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$  alors ils contiennent  $0_E$ . Or  $0_E = 0_E + 0_E$ , donc  $0_E \in F + G$ .

(iii) Soit  $w_1$  et  $w_2$  deux éléments de  $F + G$  et  $\lambda$  un scalaire. Alors il existe  $(u_1, u_2) \in F^2$  et  $(v_1, v_2) \in G^2$  tels que  $w_1 = u_1 + v_1$  et  $w_2 = u_2 + v_2$ . Par les propriétés des opérations sur les espaces vectoriels :

$$\lambda w_1 + w_2 = \lambda(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) = (\lambda u_1 + u_2) + (\lambda v_1 + v_2)$$

Comme  $F$  est un sous-espace vectoriel alors  $\lambda u_1 + u_2 \in F$ , comme  $G$  est un sous-espace vectoriel alors  $\lambda v_1 + v_2 \in G$ , donc  $\lambda w_1 + w_2 \in F + G$ . Ainsi  $F + G$  est stable par combinaisons linéaires.

Finalement,  $F + G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

## Remarques.

- La somme  $F + G$  contient  $F$  et  $G$  :  $F \subseteq F + G$  et  $G \subseteq F + G$ .
  - Pour tout sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  :

$$F + \{0_E\} = F + E = F + F =$$

## ► Exercice 5.

**Exemple 4.** Soit  $E = \mathbb{R}^3$ ,  $\vec{u}_1 = (1, 1, 0)$ ,  $\vec{u}_2 = (0, 2, 1)$ ,  $F = \text{Vect}(\vec{u}_1)$  et  $G = \text{Vect}(\vec{u}_2)$ . Donner une équation de  $F + G$ .

**Remarque.** Si  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  sont deux familles de vecteurs de  $E$  alors :

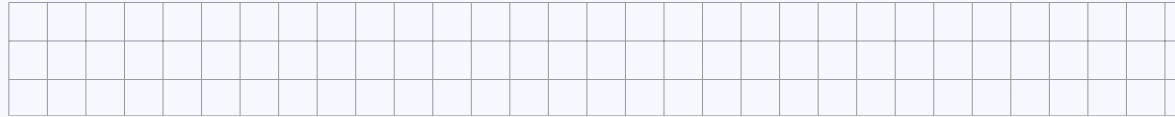
$$\text{Vect}(\mathcal{F}) + \text{Vect}(\mathcal{G}) =$$

## E. Somme directe

### Définition

Soit  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel  $E$ .

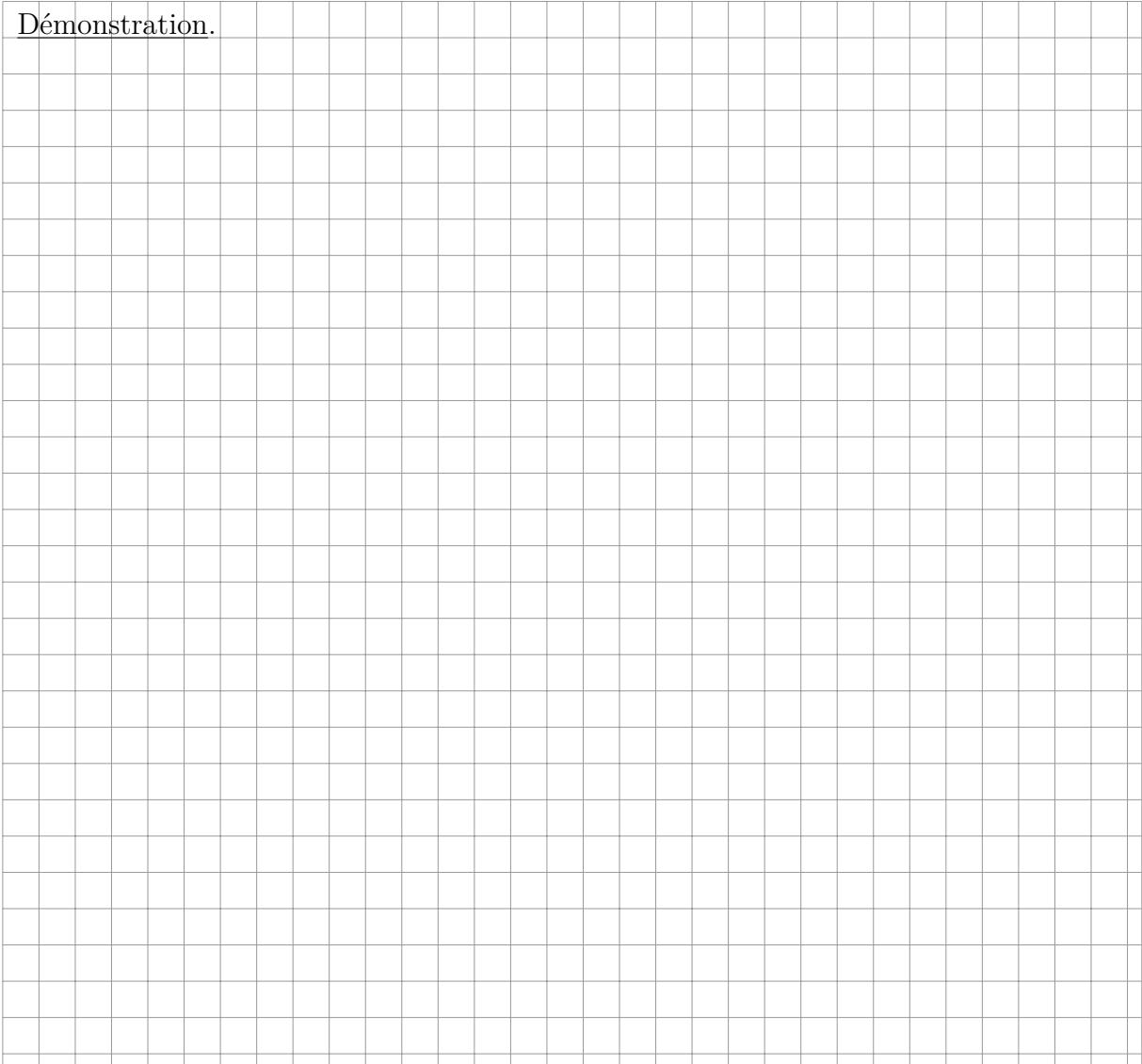
On dit que  $F$  et  $G$  sont en *somme directe* ou que *la somme  $F + G$  est directe* si tout élément de  $F + G$  s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de  $F$  et d'un élément de  $G$ .



### Proposition

Les sous-espaces vectoriels  $F$  et  $G$  de  $E$  sont en somme directe si et seulement si  $F \cap G = \{0_E\}$ .

Démonstration.

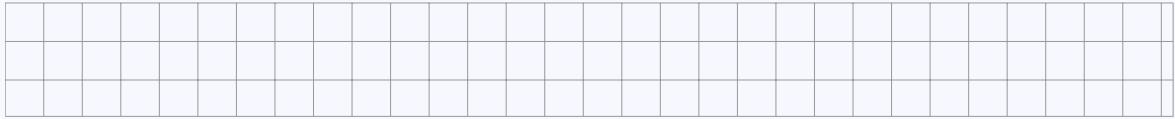


### ► Exercice 6.

## F. Supplémentaires

### Définition

Deux sous-espaces vectoriels  $F$  et  $G$  d'un espace vectoriel  $E$  sont dits *supplémentaires* si tout élément de  $E$  s'écrit de façon unique comme somme d'un élément de  $F$  et d'un élément de  $G$  :



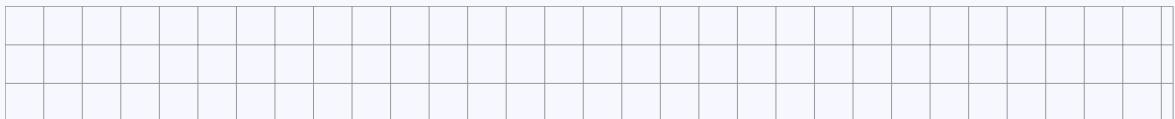
**Exemple 5.** Soit

$$E = \mathbb{R}^2 \quad F = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(\vec{i}) \quad G = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(\vec{j}).$$

Alors  $F$  et  $G$  sont supplémentaires.

### Notation

Si  $F$  et  $G$  sont supplémentaires alors on note :



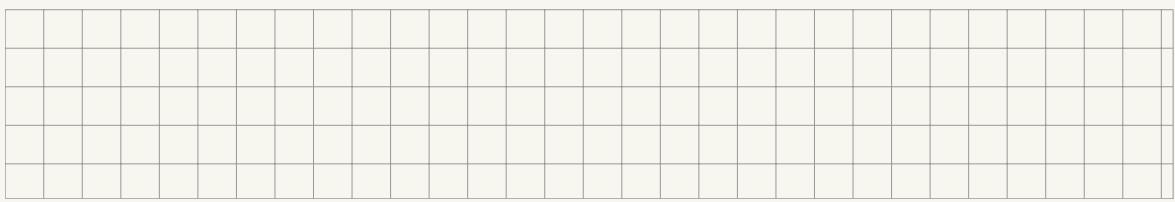
**Exemple 6.** Soit  $E = \mathbb{R}^3$  puis

$$F = \{(x, y, 0) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}(\vec{i}, \vec{j}) \quad G = \{(0, y, z) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}(\vec{j}, \vec{k}).$$

Alors  $E = F + G$  mais cette somme n'est pas directe.

### Théorème

Deux sous-espaces vectoriels  $F$  et  $G$  de  $E$  sont supplémentaires si et seulement si  $E = F + G$  et  $F \cap G = \{0_E\}$  :



Démonstration. Tout découle des deux parties précédentes. □

### Remarques.

- Il est possible d'avoir  $E = F \oplus G = F \oplus H$  avec  $G$  et  $H$  différents.

Dans ce cas  $G$  est un supplémentaire de  $F$ , et  $H$  en est un autre.

Pour cette raison il est incorrect d'écrire *le* supplémentaire de  $F$ , il faut écrire *un* supplémentaire de  $F$ .

- Dans tous les cas :  $E = E \oplus \{0_E\}$ .
- Il ne faut pas confondre supplémentaire et complémentaire.

En effet le complémentaire d'un sous-espace vectoriel n'est jamais un sous-espace vectoriel, car il ne contient pas  $0_E$ .

### Exercice 7.

## III. Familles de vecteurs

Dans toute cette partie  $E$  désigne un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ .

### A. Familles génératrices

#### Définition

Soit  $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$  une famille de vecteurs de  $E$ .

On dit que la famille  $\mathcal{F}$  est *génératrice* de  $E$  si  $E = \text{Vect}(\mathcal{F})$ .

**Exemple 7.** Parmi les familles suivantes de vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  :

$$\mathcal{F}_1 = ((1, 0, 0), (0, 1, 0))$$

$$\mathcal{F}_2 = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (2, 0, 0))$$

$$\mathcal{F}_3 = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1))$$

$$\mathcal{F}_4 = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 0))$$

$$\mathcal{F}_5 = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (2, 0, 0), (0, 0, 1))$$

Celles qui sont génératrices de  $\mathbb{R}^3$  sont

#### Proposition

Si  $(u_1, \dots, u_p)$  est génératrice de  $E$  et si  $u_p$  est combinaison linéaire des vecteurs  $u_1, \dots, u_{p-1}$  alors la famille  $(u_1, \dots, u_{p-1})$  est génératrice de  $E$ .

Démonstration. Comme  $u_p$  est combinaison linéaire des vecteurs  $u_1, \dots, u_{p-1}$  alors il existe des scalaires  $\alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}$  tels que :

$$u_p = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_{p-1} u_{p-1}$$

Comme la famille  $(u_1, \dots, u_p)$  est génératrice de  $E$  alors pour tout  $u$  de  $E$  il existe des scalaires  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  tels que :

$$u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p$$

Ceci donne :

$$u = (\lambda_1 + \lambda_p \alpha_1) u_1 + \dots + (\lambda_{p-1} + \lambda_p \alpha_{p-1}) u_{p-1}$$

Ainsi tout vecteur  $u$  de  $E$  est combinaison linéaire des vecteurs  $u_1, \dots, u_{p-1}$  et donc que la famille  $(u_1, \dots, u_{p-1})$  est génératrice de  $E$ .  $\square$

#### Proposition

Soit  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  deux familles de vecteurs de  $E$  telles que  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ .

Si  $\mathcal{F}$  est génératrice de  $E$  alors  $\mathcal{G}$  est génératrice de  $E$ .

Démonstration. En effet, si  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$  alors  $\text{Vect}(\mathcal{F}) \subseteq \text{Vect}(\mathcal{G})$ .

Donc si  $E = \text{Vect}(\mathcal{F})$  alors  $E \subseteq \text{Vect}(\mathcal{G}) \subseteq E$ , donc  $E = \text{Vect}(\mathcal{G})$  et  $\mathcal{G}$  est génératrice de  $E$ .  $\square$

**Exemple 8.** Donner une famille génératrice de :

- $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x + 2y = 0\}$ .
- $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 5y + 4z = 0\}$

► **Exercice 8.**

**Proposition**

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ , et  $\mathcal{F}$  un famille génératrice de  $F$ . Alors  $F$  est invariant par opérations élémentaires sur les vecteurs de  $\mathcal{F}$ .

Plus précisément, si  $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$  alors :

- Pour tout  $(i, j) \in \{1, \dots, p\}^2$  avec  $i \neq j$  et  $\alpha \in \mathbb{K}$  :

$$F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i + \alpha u_j, u_{i+1}, \dots, u_p)$$

- Pour tout  $i \in \{1, \dots, p\}$  et  $\lambda \in \mathbb{K}^*$  :

$$F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_{i-1}, \lambda u_i, u_{i+1}, \dots, u_p)$$

- Pour tout  $(i, j) \in \{1, \dots, p\}^2$  avec  $i < j$  :

$$F = \text{Vect}(u_1, \dots, \underset{(i)}{u_j}, \dots, \underset{(j)}{u_i}, \dots, u_p)$$

Démonstration. Soit  $\mathcal{F}'$  la famille obtenue par opération élémentaire sur les élément de  $\mathcal{F}$ , et  $F' = \text{Vect}(\mathcal{F}')$ .

On vérifie que  $\mathcal{F}' \subseteq \text{Vect}(\mathcal{F})$  et  $\mathcal{F} \subseteq \text{Vect}(\mathcal{F}')$ .

Par propriété ceci implique  $F' \subseteq F$  et  $F \subseteq F'$ , donc  $F = F'$ . □

**Proposition**

Soit  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . Si  $\mathcal{F}$  est une famille génératrice de  $F$  et  $\mathcal{G}$  est une famille génératrice de  $G$ , alors  $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$  est une famille génératrice de  $F + G$ .

Démonstration. On note  $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$  et  $\mathcal{G} = (v_1, \dots, v_q)$ . Comme  $\mathcal{F}$  est une famille génératrice de  $F$  et  $\mathcal{G}$  est une famille génératrice de  $G$  alors

$$\begin{aligned} F &= \{ \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \} \\ \text{et } G &= \{ \mu_1 v_1 + \dots + \mu_q v_q \mid (\mu_1, \dots, \mu_q) \in \mathbb{K}^q \} \end{aligned}$$

Par définition :  $F + G = \{u + v \mid (u, v) \in F \times G\}$

$$\begin{aligned} \text{Donc } F + G &= \{ \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p + \mu_1 v_1 + \dots + \mu_q v_q \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_q) \in \mathbb{K}^{p+q} \} \\ &= \text{Vect}(u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q) \\ &= \text{Vect}(\mathcal{F} \cup \mathcal{G}) \end{aligned}$$

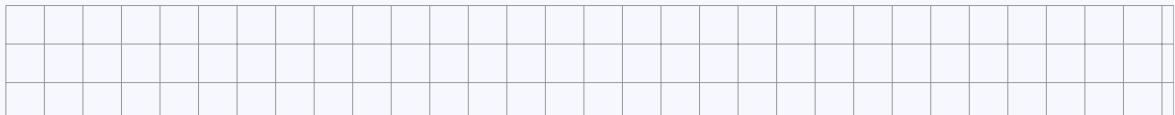
Ceci montre bien que la famille  $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$  est génératrice de  $F + G$ . □

## B. Familles libres

## Définitions

Soit  $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$  une famille de vecteurs de  $E$ .

On dit que la famille  $\mathcal{F}$  est *libre* si :



Dans ce cas on dit aussi que les vecteurs  $u_1, \dots, u_p$  sont *linéairement indépendants*.

Si la famille  $\mathcal{F}$  n'est pas libre, on dit qu'elle est *liée*, ou que les vecteurs  $u_1, \dots, u_p$  sont *linéairement dépendants*.

## Proposition

Une famille est liée si et seulement si un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres.

## Démonstration.

Parmi les familles 27

Parmi les familles  $\mathcal{F}_1$  à  $\mathcal{F}_5$  celles qui sont libres sont

**Exemple 9.** La famille  $\mathcal{F} = ((1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1))$  est-elle libre ?

► Exercices 9, 10.

**Proposition**

Soit  $u_1, \dots, u_{p+1}$  des vecteurs de  $E$ .

(i) Si la famille  $(u_1, \dots, u_{p+1})$  est libre alors la famille  $(u_1, \dots, u_p)$  est libre.

(ii) Si la famille  $(u_1, \dots, u_p)$  est liée alors la famille  $(u_1, \dots, u_{p+1})$  est liée.

(iii) Si la famille  $(u_1, \dots, u_p)$  est libre alors la famille  $(u_1, \dots, u_{p+1})$  est liée si et seulement si  $u_{p+1}$  est combinaison linéaire de  $u_1, \dots, u_p$ .

Démonstration. La propriété (ii) est conséquence de la propriété précédente, la propriété (i) est la contraposée de la propriété (ii).

Démontrons la propriété (iii).

Supposons que la famille  $(u_1, \dots, u_p)$  est libre et que la famille  $(u_1, \dots, u_{p+1})$  est liée.

Alors il existe  $(\lambda_1, \dots, \lambda_{p+1}) \in \mathbb{K}^{p+1} \setminus \{0_{\mathbb{K}^{p+1}}\}$  tel que  $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_{p+1} u_{p+1} = 0_E$ .

Si  $\lambda_{p+1} = 0$  alors  $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p = 0_E$ , ce qui implique  $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$  car la famille  $(u_1, \dots, u_p)$  est libre. Mais la famille  $(\lambda_1, \dots, \lambda_{p+1})$  est supposée non-nulle, donc on ne peut avoir  $\lambda_{p+1} = 0$ .

Ainsi  $\lambda_{p+1} \neq 0$ , donc  $u_{p+1} = \sum_{i=1}^p \left( -\frac{\lambda_i}{\lambda_{p+1}} \right) u_i$ , i.e.,  $u_{p+1}$  est combinaison linéaire de  $u_1, \dots, u_p$ .

Réciproquement, si la famille  $(u_1, \dots, u_p)$  est libre et  $u_{p+1}$  est combinaison linéaire de  $u_1, \dots, u_p$  alors la famille  $(u_1, \dots, u_{p+1})$  est liée d'après la proposition précédente.  $\square$

**Proposition**

- La famille vide est libre.
- Soit  $u$  un vecteur de  $E$ . Alors la famille  $(u)$  est libre si et seulement si  $u$  est non-nul.
- Soit  $u$  et  $v$  deux vecteurs de  $E$ . La famille  $(u, v)$  est libre si et seulement si aucun des deux vecteurs n'est colinéaire à l'autre.

En d'autres termes, la famille  $(u, v)$  est liée s'il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $u = \lambda v$  ou s'il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $v = \lambda u$ .

**Exemple 10.** Soit  $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ , et  $f_1, f_2, f_3$  les trois vecteurs de  $E$  définis par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_1(x) = \cos x \quad f_2(x) = \sin x \quad f_3(x) = \cos \left( x + \frac{\pi}{3} \right)$$

Alors la famille  $(f_1, f_2)$  est libre.

**Exercice 11.****Proposition**

Une famille de polynômes non-nuls de degrés distincts est libre.

Démonstration. Soit  $(P_i)_{i=0 \dots n}$  une famille de polynômes non-nuls de degrés distincts.

Quitte à permuter les polynômes  $P_i$  on peut supposer qu'ils sont de degrés strictement croissants.

Soit  $(\lambda_i)_{i=0,\dots,n}$  une famille de scalaires telle que :  $\sum_{i=0}^n \lambda_i P_i = 0_{\mathbb{K}[X]}$

Supposons que cette famille n'est pas la famille nulle. Il existe alors un indice  $m$  maximal tel que  $\lambda_m$  est non-nul, et donc :

$$\sum_{i=0}^m \lambda_i P_i = 0_{\mathbb{K}[X]} \quad \text{puis} \quad P_m = -\sum_{i=0}^{m-1} \frac{\lambda_i}{\lambda_m} P_i$$

Comme la famille  $(P_0, \dots, P_n)$  est de degrés strictement croissants alors les degrés de  $P_0, \dots, P_{m-1}$  sont strictement inférieurs à celui de  $P_m$  donc :

$$\deg \left( -\sum_{i=0}^{m-1} \frac{\lambda_i}{\lambda_m} P_i \right) \leq \max \{ \deg P_i \mid i = 0 \dots m-1 \} < \deg P_m$$

Ceci est une contradiction, donc la famille  $(\lambda_i)_{i=0,\dots,n}$  est nulle, et ainsi la famille  $(P_i)_{0 \leq i \leq n}$  est libre.  $\square$

### Définition

Une famille  $(P_0, \dots, P_n)$  de polynômes est dite *de degrés échelonnés* si la suite  $(\deg P_i)_{i=0,\dots,n}$  est strictement croissante.

### Corollaire

Une famille de polynômes non-nuls de degrés échelonnés est libre.

## C. Bases

### Définition

Soit  $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$  une famille de vecteurs de  $E$ .

On dit que la famille  $\mathcal{F}$  est une *base* de  $E$  si elle est libre et génératrice.

### Exemple 7 (suite).

Parmi les familles $\mathcal{F}_1$ à $\mathcal{F}_5$ les bases sont														

### Théorème

Soit  $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$  une base de  $E$  et  $u$  un vecteur de  $E$ .

Alors il existe un unique  $n$ -uplet  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  de scalaires tel que :

$$u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$$

### Définition

On appelle *coordonnées* de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$  ce  $n$ -uplet.

Démonstration.

**Proposition**

Soit  $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$  une famille de vecteurs de  $E$ . Si pour tout  $u \in E$  il existe un unique  $n$ -uplet  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  de scalaires tel que  $u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$  alors  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$ .

Démonstration. La famille  $\mathcal{B}$  est génératrice car tout vecteur de  $E$  est combinaison linéaire de ses vecteurs.

Démontrons qu'elle est libre. Soit  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  un  $n$ -uplet de scalaires tel que :

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = 0_E$$

Par hypothèse  $0_E$  s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des  $u_i$ . Or :

$$0_{\mathbb{K}} u_1 + \dots + 0_{\mathbb{K}} u_n = 0_E$$

Par unicité on obtient :

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0_{\mathbb{K}}$$

Ceci montre que la famille  $\mathcal{B}$  est libre.

La famille  $\mathcal{B}$  est libre et génératrice de  $E$  donc c'est une base de  $E$ . □

**Exemple 11.** Dans  $E = \mathbb{R}^3$  on pose :

$$\mathcal{B}_1 = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)) \quad \mathcal{B}_2 = ((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)) \quad u = (9, 3, 7)$$

Alors les deux familles  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  sont des bases de  $E$ .

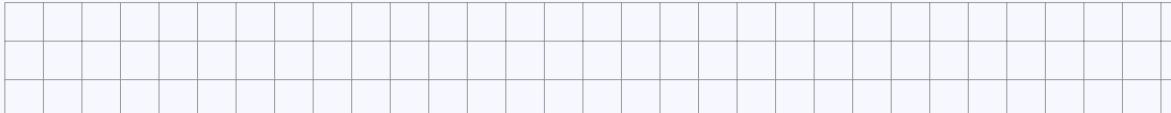
Quelles sont les coordonnées de  $u$  dans ces bases ?

► **Exercice 12.**

## D. Base canonique

## Définition

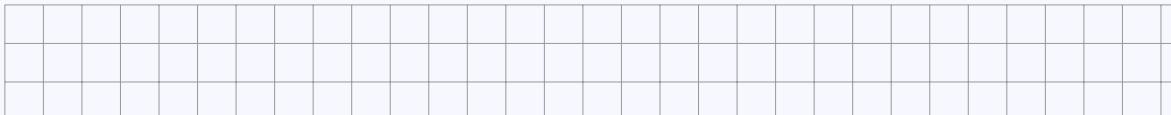
Soit  $E = \mathbb{K}^n$ . Pour  $i = 1, \dots, n$  on note  $e_i$  le vecteur ne contenant que des 0 sauf un 1 en  $i$ -ème position :



Alors la famille  $\mathcal{B}_c = (e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $\mathbb{K}^n$ , appelée *base canonique* de  $\mathbb{K}^n$ . Les coordonnées du vecteur  $u = (a_1, \dots, a_n)$  dans cette base sont  $(a_1, \dots, a_n)$ .

## Définition

Soit  $E = \mathbb{K}_n[X]$ , où  $n \in \mathbb{N}$ . Alors la famille

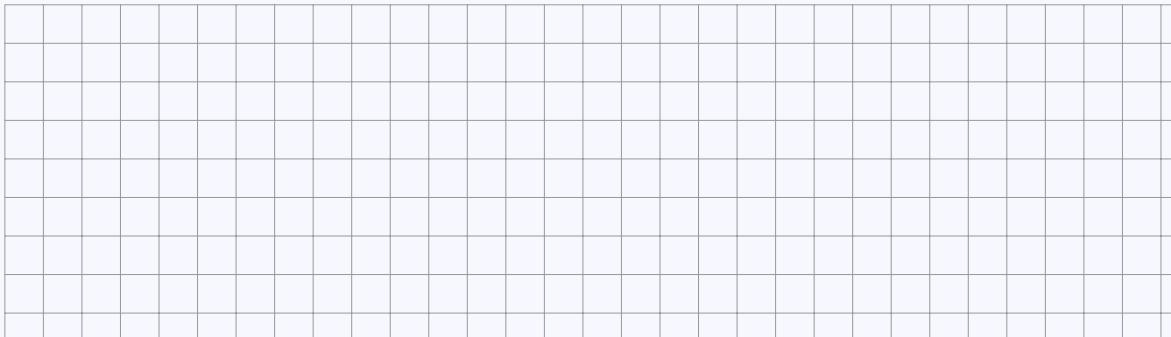


est une base de  $E$ , appelée *base canonique* de  $\mathbb{K}_n[X]$ .

Les coordonnées du polynôme  $\sum_{k=0}^n a_k X^k$  dans cette base sont  $(a_0, \dots, a_n)$ .

## Définition

Soit  $E = \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ . On note  $E_{ij}$  la matrice ne contenant que des zéros, sauf un 1 en position  $(i, j)$ .



La famille  $(E_{ij} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p)$  est une base de  $E$ , appelée *base canonique* de  $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ .

**Exemple.** La base canonique de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  est  $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ .

Les coordonnées de  $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$  dans cette base sont

**Remarque.** Les espaces vectoriels  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  et  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  n'ont pas de base canonique.

► Exercices 13, 14.

## E. Dimension

### Définition

Un espace vectoriel est dit *de dimension finie* s'il admet une famille génératrice finie.

### Théorème

- Si un espace vectoriel est de dimension finie alors il admet une base.
- Dans ce cas toutes ses bases ont le même cardinal.

### Définition

On appelle *dimension* de  $E$  et on note  $\dim E$  le cardinal de ses bases.

**Remarque.** La démonstration et la suite au chapitre B10 : dimension.

**Exemple 12.** Les espaces vectoriels  $\mathbb{K}^n$ ,  $\mathbb{K}_n[X]$  et  $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$  sont de dimensions finies, et :

$\dim \mathbb{K}^n =$	$\dim \mathbb{K}_n[X] =$	$\dim \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) =$

## F. Extension aux familles infinies

On note toujours  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ .

### Définition

Soit  $\mathcal{E}$  une partie de  $E$ . Une *combinaison linéaire* d'éléments de  $\mathcal{E}$  est une combinaison linéaire d'un nombre fini d'éléments de  $\mathcal{E}$ .

**Exemple.** Tout polynôme de  $\mathbb{K}[X]$  est combinaison linéaire d'éléments de  $\{X^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ .

### Définition

Soit  $\mathcal{E}$  une partie de  $E$ .

On note  $\text{Vect}(\mathcal{E})$  l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de  $\mathcal{E}$ .


### Proposition

Pour toute partie  $\mathcal{E}$  de  $E$  l'ensemble  $\text{Vect}(\mathcal{E})$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

**Démonstration.** La démonstration est identique au cas où la partie  $\mathcal{E}$  est finie. On remarque que la somme de deux combinaisons linéaires d'éléments de  $\mathcal{E}$  est une combinaison linéaire d'éléments de  $\mathcal{E}$ , car l'union de deux ensembles finis est un ensemble fini.  $\square$

**Remarque.**

- Comme pour le cas fini,  $\text{Vect}(\mathcal{E})$  est le plus petit sous-espace vectoriel de  $E$  contenant  $\mathcal{E}$ , et l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de  $E$  contenant  $\mathcal{E}$ .
- Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . On dit que  $\mathcal{E}$  est une *partie génératrice* de  $F$  si  $F = \text{Vect}(\mathcal{E})$ .

**Notation**

Soit  $I$  un ensemble infini.

- On note  $\mathbb{K}^I$  l'ensemble des familles de scalaires indexées par  $I$  :

$$\mathbb{K}^I = \{(\lambda_i)_{i \in I} \mid \forall i \in I \quad \lambda_i \in \mathbb{K}\}$$

- On note  $\mathbb{K}^{(I)}$  l'ensemble des familles *presque nulles* de scalaires indexées par  $I$ , c'est-à-dire des familles dont tous les termes sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux.

**Remarque.** Si  $\lambda = (\lambda_i)_{i \in I}$  est une famille de  $\mathbb{K}^I$  alors le *support* de  $\lambda$  est l'ensemble des indices  $i$  pour lesquels  $\lambda_i$  est non-nul. C'est une partie de  $I$ .

Ainsi les familles presque nulles sont les familles à support fini.

**Exemples.**

- Dans le cas où  $I = \mathbb{N}$  : une suite  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est presque nulle si et seulement si elle est nulle à partir d'un certain rang.
- On peut définir l'ensemble  $\mathbb{K}[X]$  par :

$$\mathbb{K}[X] = \left\{ \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k X^k \mid (a_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})} \right\}$$

**Définition**

Soit  $\mathcal{E}$  une partie de  $E$

- On dit que  $\mathcal{E}$  est *libre* si toute famille finie d'éléments de  $\mathcal{E}$  est libre.
- On dit que  $\mathcal{E}$  est *liée* si elle n'est pas libre, ce qui signifie qu'il existe une famille finie d'éléments de  $\mathcal{E}$  linéairement dépendants.

**Exemple 13.** Pour tout  $a \in \mathbb{R}_+^*$  on pose  $f_a(x) = a^x$ .

Démontrer que la famille  $\mathcal{A} = \{f_a \mid a \in \mathbb{R}_+^*\}$  est une famille libre de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

**Remarque.** Comme dans le cas fini, une *base* de  $E$  est une famille  $\mathcal{E} = (e_i)_{i \in I}$  libre et génératrice de  $E$ .

Dans le cas où  $I$  est infini, tout vecteur s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire d'éléments de cette famille, ce qui donne en terme de familles presque nulles :

$$\forall u \in E \quad \exists! (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{(I)} \quad u = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$$

Les  $\lambda_i$  sont toujours appelés *coordonnées* de  $u$  dans la base  $\mathcal{E}$ .

**Exemple.** La famille  $\{X^k \mid k \in \mathbb{N}\}$  est une base de  $\mathbb{K}[X]$ , appelée base canonique de  $\mathbb{K}[X]$ .