Chapitre B8
Espaces vectoriels

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle *scalaires* ses éléments.

I. Espaces vectoriels

A. Définitions

Définitions

Un *espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$ ou $\mathbb{K}$-*espace vectoriel* est un ensemble E dont les éléments sont appelés *vecteurs*, muni de deux opérations

$$+ : \begin{array}{rcl} E \times E & \longrightarrow & E \\ (u,v) & \longmapsto & u+v \end{array} \qquad \text{et} \qquad \cdot : \begin{array}{rcl} \mathbb{K} \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda,u) & \longmapsto & \lambda u \end{array}$$

appelées *addition* et *multiplication par un scalaire*, satisfaisant les propriétés :

- L'addition est commutative : $\quad \forall (u,v) \in E^2 \qquad u+v = v+u$
- L'addition est associative : $\quad \forall (u,v,w) \in E^3 \qquad (u+v)+w = u+(v+w)$
- Il existe un vecteur de E noté 0_E et appelé *vecteur nul*, tel que :
$$\forall u \in E \qquad u + 0_E = 0_E + u = u$$
- Tout vecteur u de E possède un *opposé* noté $-u$, satisfaisant :
$$u + (-u) = (-u) + u = 0_E$$
On note $\quad v-u \quad$ au lieu de $\quad v+(-u)$.

La multiplication par un scalaire vérifie :

- $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2 \quad \forall u \in E \qquad (\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$
- $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2 \quad \forall u \in E \qquad (\lambda+\mu)u = \lambda u + \mu u$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall (u,v) \in E^2 \qquad \lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$
- $\forall u \in E \qquad 1_{\mathbb{K}} u = u$

Remarques.

- L'addition est une loi de composition interne alors que la multiplication par un scalaire est une loi de composition externe.
- Les quatre premiers points signifient que $(E,+)$ est un groupe abélien.

  Ainsi un espace vectoriel est un triplet $(E,+,\cdot)$ où $(E,+)$ est un groupe abélien et $\cdot$ est une loi vérifiant les propriétés ci-dessus.

Propositions

Pour tout $(u, v) \in E^2$ et tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$:

(i) $0_{\mathbb{K}} u = 0_E$

(ii) $\lambda 0_E = 0_E$

(iii) $(-1_{\mathbb{K}})u = -u$

(iv) $(\lambda - \mu)u = \lambda u - \mu u$

(v) $\lambda(u - v) = \lambda u - \lambda v$

Démonstrations.

Proposition

Soit $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

$$\lambda u = 0_E \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\lambda = 0_{\mathbb{K}} \quad \text{ou} \quad u = 0_E)$$

Démonstration.

B. Espaces vectoriels de référence

- *Espace vectoriel des n-uplets à coefficients dans* $\mathbb{K}$

$$\boxed{\mathbb{K}^n = \{(x_1,\ldots,x_n) \mid \forall i = 1,\ldots,n \quad x_i \in \mathbb{K}\} \qquad (n \in \mathbb{N})}$$

Si $\quad x = (x_1,\ldots,x_n) \qquad y = (y_1,\ldots,y_n) \quad$ et $\quad \lambda \in \mathbb{K} \quad$ alors :

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \qquad \text{et} \qquad \lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

Opposé : $-x = (-x_1,\ldots,-x_n)$ Vecteur nul : $0_{\mathbb{K}^n} = (0,\ldots,0)$

Exemples. $\mathbb{R}^2 \quad \mathbb{R}^3$ mais aussi $\mathbb{K}^1 = \mathbb{K} \quad \mathbb{K}^0 = \{0\}$

- *Espace vectoriel des matrices de taille (n,p) à coefficients dans* $\mathbb{K}$

$$\boxed{\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K}) \qquad (n,\, p \in \mathbb{N}^*)}$$

Si $\quad A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \qquad B = (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \quad$ et $\quad \lambda \in \mathbb{K} \quad$ alors :

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \qquad \text{et} \qquad \lambda A = (\lambda a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$$

Opposé : $-A = (-a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ Vecteur nul : $0_{\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})} = 0_{np} = (0)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$

- *Espace vectoriel des polynômes à coefficients dans* $\mathbb{K}$

$$\boxed{\mathbb{K}[X]}$$

Si $\quad P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \qquad Q = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k \quad$ et $\quad \lambda \in \mathbb{K}$ alors :

$$P + Q = \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k + b_k) X^k \qquad \text{et} \qquad \lambda P = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda a_k X^k$$

Opposé : $-P = \sum_{k=0}^{+\infty} -a_k X^k$ Vecteur nul : $0_{\mathbb{K}[X]} = \sum_{k=0}^{+\infty} 0_{\mathbb{K}} X^k = 0_{\mathbb{K}}$

- *Espace vectoriel des applications de Ω dans $\mathbb{K}$, où Ω est un ensemble non-vide*

$$\boxed{\mathbb{K}^{\Omega} \quad \text{ou} \quad \mathscr{F}(\Omega, \mathbb{K})}$$

Si f et g sont deux applications de Ω dans $\mathbb{K}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors on définit :

$$\begin{array}{rcl} f + g : \Omega & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & f(x) + g(x) \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{rcl} \lambda f : \Omega & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \lambda\, f(x) \end{array}$$

En d'autres termes :

$$\forall x \in \Omega \qquad (f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \text{et} \qquad (\lambda f)(x) = \lambda(f(x))$$

Opposé : $-f$ est l'application $x \mapsto -f(x)$ Vecteur nul : $0_{\mathbb{K}^\Omega}$ est l'application $x \mapsto 0_{\mathbb{K}}$

Exemples.

- $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, aussi noté $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
- $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est l'espace vectoriel des suites indexées par $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, avec :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{et} \quad \lambda(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

- $\mathbb{R}^{\Omega}$ avec $\Omega = \{1,\dots,n\}$ est naturellement identifié à l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.

- *Produit cartésien de deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels :*

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Le produit cartésien des ensembles E et F est :

$$\boxed{E\times F = \{(x,y) \mid x\in E \text{ et } y\in F\}}$$

Il est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel si on le munit des opérations suivantes :

Pour tous (x,y), (x',y') éléments de $E\times F$ et λ scalaire on pose :

$$(x,y)+(x',y') = (x+x', y+y') \qquad \text{et} \qquad \lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y)$$

Opposé : $-(x,y) = (-x,-y)$ Vecteur nul : $0_{E\times F} = (0_E, 0_F)$

- *Produit cartésien de n espaces vectoriels :*

Plus généralement, si $(E_i)_{i=1,\dots,n}$ est une famille d'espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, alors

$$E_1\times\cdots\times E_n = \prod_{i=1}^n E_i$$

est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, muni des opérations évidentes d'addition et de multiplication par un scalaire termes à termes.

Définition (Hors programme)

Une *algèbre* sur $\mathbb{K}$, ou $\mathbb{K}$-*algèbre* est un ensemble A munit de deux lois de composition internes $+$ et $\times$ et d'une loi de composition externe $\cdot$ tels que

- $(A,+,\cdot)$ est un espace vectoriel
- $(A,+,\times)$ est un anneau
- Pour tous u, v dans A et λ dans $\mathbb{K}$: $\lambda(u\times v) = (\lambda u)\times v = u\times(\lambda v)$.

Exemples. $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ $\mathbb{K}[X]$ $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont des algèbres.

II. Sous-espaces vectoriels

A. Définition et exemples

Définition

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Un *sous-espace vectoriel* de E est une partie F de E non-vide, stable par addition et par multiplication par un scalaire, *i.e.*, telle que :

$$\begin{array}{ll} \forall (u,v) \in F^2 & u+v \in F \\ \forall u \in F \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} & \lambda u \in F \end{array}$$

Proposition (Caractérisation des sous-espaces vectoriels)

Un ensemble F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

(i) $F \subseteq E$

(ii) $0_E \in F$

(iii) $\forall (u,v) \in F^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \qquad \lambda u + v \in F$

Démonstration. Si F est une partie non-vide de E alors elle contient un vecteur u. Comme $0_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K}$ alors $0_{\mathbb{K}} u \in F$, donc $0_E \in F$.

Le reste se démontre facilement. □

Remarque. Pour démontrer qu'un ensemble F est un sous-espace vectoriel de E on utilise la caractérisation plutôt que la définition.

Proposition

Si F est un sous-espace vectoriel de E alors F est un espace vectoriel.

Démonstration. L'ensemble F est stable par les lois d'addition et de multiplication par un scalaire de E, ce qui permet de définir les lois induites :

$$+ : F \times F \to F \qquad \text{et} \qquad \cdot : \mathbb{K} \times F \to F$$

Comme elles vérifient les axiomes de définition d'un espace vectoriel dans E alors elles vérifient aussi ces lois dans F. □

Remarque. Pour démontrer qu'un ensemble E est un espace vectoriel, il est souvent plus facile de vérifier qu'il est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence, comme $\mathbb{R}^n$, $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ou $\mathbb{R}[X]$.

Définition

Soit $u_1, u_2, \dots, u_n$ des éléments de E et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ des scalaires. Alors le vecteur

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n$$

est appelé *combinaison linéaire* des vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_n$.

Remarques.

- Une combinaison linéaire de plusieurs vecteurs d'un espace vectoriel est élément de cet espace vectoriel, car un sous-espace vectoriel est stable par addition et multiplication par un scalaire.
- Un sous-espace vectoriel de E est une partie non-vide de E stable par combinaisons linéaires.
- Quel que soit l'espace vectoriel E, les ensembles $\{0_E\}$ et E sont deux sous-espaces vectoriels de E.

Exemples géométriques.

- Soit $\vec{u}$ un vecteur non-nul de $\mathbb{R}^2$. L'ensemble des combinaisons linéaires de $\vec{u}$ est l'ensemble :
$$\{\lambda\vec{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$
Il s'agit de la droite passant par l'origine, de vecteur directeur $\vec{u}$.
C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

- Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. L'ensemble des combinaisons linéaires de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est l'ensemble
$$\left\{\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$$
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires alors il s'agit du plan contenant l'origine, dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Remarques.

- Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ sont $\{0_{\mathbb{R}^2}\}$, les droites passant par $0_{\mathbb{R}^2} = (0,0)$ et $\mathbb{R}^2$ tout entier.
- Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ sont $\{0_{\mathbb{R}^3}\}$, les droites passant par $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0)$, les plans contenant $0_{\mathbb{R}^3}$, et $\mathbb{R}^3$ tout entier.

Exemple 1. $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

Exemple 2. $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. De même pour $\mathscr{C}^n$, $\mathscr{C}^\infty$, etc.

▷ **Exercices 1, 2, 3.**

B. Intersection de sous-espaces vectoriels

Proposition

Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.
Alors $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration.

C. Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs de E.
On note $\operatorname{Vect}(\mathscr{F})$ l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de $\mathscr{F}$:

Proposition

L'ensemble $\operatorname{Vect}(\mathscr{F})$ est un sous-espace vectoriel de E.

Définition

Si $\mathscr{F}$ est une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E alors l'ensemble $\operatorname{Vect}(\mathscr{F})$ est appelé *sous-espace vectoriel de E engendré par $\mathscr{F}$*.

Exemples.

- Dans $E = \mathbb{R}^2$:

  $F = \operatorname{Vect}(u)$ est

  $G = \operatorname{Vect}(u, v)$ est

- Dans $E = \mathbb{K}[X]$:

  $\operatorname{Vect}(1, X) =$ $\operatorname{Vect}(1) =$ $\mathbb{K}_2[X] =$

- Dans $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$, soit :

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  Alors :

  $\operatorname{Vect}(E_{11}, E_{22}) =$ $\operatorname{Vect}(E_{11}, E_{12}, E_{22}) =$

  $\operatorname{Vect}(E_{11}, E_{21}, E_{22}) =$ $\operatorname{Vect}(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}) =$

Démonstration de la proposition.

Remarque. L'espace vectoriel engendré par l'ensemble vide est le plus petit espace vectoriel possible :

$$\mathrm{Vect}\,(\varnothing) =$$

▷ **Exercice 4.**

Exemple 3. Soit $E = \mathbb{R}^3 \quad u = (1, 3, 1) \quad v = (-1, -1, 0) \quad w = (0, 4, 2)$.

Quel est le sous-espace vectoriel F de E engendré par u, v, et w ?

Remarques. Soit $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux familles finies de vecteurs de E et w un vecteur de E.

- Si $w \in \mathrm{Vect}\,(\mathscr{F})$ alors $\mathrm{Vect}\,(\mathscr{F} \cup \{w\}) =$
- Si $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{G}$ alors $\mathrm{Vect}\,(\mathscr{F})$

Propositions

Soit $\mathscr{F}$ une famille finie de vecteurs de E. Alors :

(i) Vect $(\mathscr{F})$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $\mathscr{F}$.

(ii) Vect $(\mathscr{F})$ est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant $\mathscr{F}$.

Remarque. Le point *(i)* signifie : Soit $\mathscr{F}$ une famille finie de vecteurs de E et G un sous-espace vectoriel de E. Alors :

Démonstration. *(ii)* Soit F l'intersection des sous-espaces vectoriels de E contenant $\mathscr{F}$:

$$F = \bigcap_{\substack{G \text{ sev de } E \\ \mathscr{F} \subseteq G}} G$$

Comme Vect $(\mathscr{F})$ est un sous-espace vectoriel de E contenant $\mathscr{F}$, alors $F \subseteq \text{Vect}(\mathscr{F})$.

Pour démontrer l'inclusion réciproque, choisissons un élément u de Vect $(\mathscr{F})$:

$$u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$$

où les λ_i sont des scalaires et les u_i appartiennent à $\mathscr{F}$.

Les u_i appartiennent alors à tous les sous-espaces vectoriels G de E contenant $\mathscr{F}$. Comme ceux-ci sont des sous-espaces vectoriels, ils sont stables par combinaison linéaire et donc contiennent tous u. Ainsi u est élément de F.

On en déduit que Vect $(\mathscr{F}) \subseteq F$, puis par double inclusion $F = \text{Vect}(\mathscr{F})$.

(i) Nous savons que Vect $(\mathscr{F})$ est un sous-espace vectoriel contenant $\mathscr{F}$. D'après ce qui précède, si G est un autre sous-espace vectoriel de E contenant $\mathscr{F}$ alors Vect $(\mathscr{F}) \subset G$, car Vect $(\mathscr{F})$ est l'intersection de tous les tels sous-espaces vectoriels.

Ceci signifie que Vect $(\mathscr{F})$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $\mathscr{F}$. □

D. Sommes de sous-espaces vectoriels

Remarque. En général $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E, comme le montre l'exemple de deux droites non confondues de $\mathbb{R}^2$.

Notation

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

On note $F + G$ l'ensemble des sommes d'un élément de F et d'un élément de G :

Proposition

Si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E alors $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Définition

Le sous-espace vectoriel $F+G$ de E est appelé *somme* de F et de G.

Démonstration.

(i) Si F et G sont inclus dans E, alors tout élément u de F et tout élément v de G est élément de E. Comme celui-ci est stable par addition, car c'est un espace vectoriel, alors $u+v \in E$. Ceci montre l'inclusion $F+G \subseteq E$.

(ii) Comme F et G sont des sous-espaces vectoriels de E alors ils contiennent 0_E. Or $0_E = 0_E + 0_E$, donc $0_E \in F+G$.

(iii) Soit w_1 et w_2 deux éléments de $F+G$ et λ un scalaire. Alors il existe $(u_1, u_2) \in F^2$ et $(v_1, v_2) \in G^2$ tels que $w_1 = u_1 + v_1$ et $w_2 = u_2 + v_2$. Par les propriétés des opérations sur les espaces vectoriels :

$$\lambda w_1 + w_2 = \lambda(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) = (\lambda u_1 + u_2) + (\lambda v_1 + v_2)$$

Comme F est un sous-espace vectoriel alors $\lambda u_1 + u_2 \in F$, comme G est un sous-espace vectoriel alors $\lambda v_1 + v_2 \in G$, donc $\lambda w_1 + w_2 \in F+G$. Ainsi $F+G$ est stable par combinaisons linéaires.

Finalement, $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E. □

Remarques.

- La somme $F+G$ contient F et G : $F \subseteq F+G$ et $G \subseteq F+G$.
- Pour tout sous-espace vectoriel F de E :

$F + \{0_E\} =$ $\qquad$ $F + E =$ $\qquad$ $F + F =$

Exercice 5.

Exemple 4. Soit $E = \mathbb{R}^3$, $\vec{u}_1 = (1,1,0)$, $\vec{u}_2 = (0,2,1)$, $F = \text{Vect}\,(\vec{u}_1)$ et $G = \text{Vect}\,(\vec{u}_2)$. Donner une équation de $F+G$.

Remarque. Si $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont deux familles de vecteurs de E alors :

$\text{Vect}\,(\mathscr{F}) + \text{Vect}\,(\mathscr{G}) =$

E. Somme directe

Définition

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

On dit que F et G sont en *somme directe* ou que *la somme* $F+G$ *est directe* si tout élément de $F+G$ s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G.

Proposition

Les sous-espaces vectoriels F et G de E sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$.

Démonstration.

▷ **Exercice 6.**

F. Supplémentaires

Définition

Deux sous-espaces vectoriels F et G d'un espace vectoriel E sont dits *supplémentaires* si tout élément de E s'écrit de façon unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G :

Exemple 5. Soit

$$E = \mathbb{R}^2 \qquad F = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(\vec{\imath}) \qquad G = \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(\vec{\jmath}).$$

Alors F et G sont supplémentaires.

Notation

Si F et G sont supplémentaires alors on note :

Exemple 6. Soit $E = \mathbb{R}^3$ puis

$$F = \left\{(x,y,0) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\} = \text{Vect}(\vec{\imath},\vec{\jmath}) \quad G = \left\{(0,y,z) \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2\right\} = \text{Vect}\left(\vec{\jmath},\vec{k}\right).$$

Alors $E = F + G$ mais cette somme n'est pas directe.

Théorème

Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont supplémentaires si et seulement si $E = F + G$ et $F \cap G = \{0_E\}$:

<u>Démonstration</u>. Tout découle des deux parties précédentes. □

Remarques.

- Il est possible d'avoir $E = F \oplus G = F \oplus H$ avec G et H différents.

  Dans ce cas G est un supplémentaire de F, et H en est un autre.

  Pour cette raison il est incorrect d'écrire *le* supplémentaire de F, il faut écrire *un* supplémentaire de F.
- Dans tous les cas : $E = E \oplus \{0_E\}$.
- Il ne faut pas confondre supplémentaire et complémentaire.

  En effet le complémentaire d'un sous-espace vectoriel n'est jamais un sous-espace vectoriel, car il ne contient pas 0_E.

▷ **Exercice 7.**

III. Familles de vecteurs

Dans toute cette partie E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

A. Familles génératrices

Définition

Soit $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E.
On dit que la famille $\mathscr{F}$ est *génératrice* de E si $E = \text{Vect}\,(\mathscr{F})$.

Exemple 7. Parmi les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathscr{F}_1 = ((1,0,0),(0,1,0)) \qquad \mathscr{F}_2 = ((1,0,0),(0,1,0),(2,0,0))$$

$$\mathscr{F}_3 = ((1,0,0),(0,1,0),(0,1,1)) \qquad \mathscr{F}_4 = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,0))$$

$$\mathscr{F}_5 = ((1,0,0),(0,1,0),(2,0,0),(0,0,1))$$

Celles qui sont génératrices de $\mathbb{R}^3$ sont

Proposition

Si $(u_1, \dots, u_p)$ est génératrice de E et si u_p est combinaison linéaire des vecteurs $u_1, \dots, u_{p-1}$ alors la famille $(u_1, \dots, u_{p-1})$ est génératrice de E.

Démonstration. Comme u_p est combinaison linéaire des vecteurs $u_1, \dots, u_{p-1}$ alors il existe des scalaires $\alpha_1, \dots \alpha_{p-1}$ tels que :

$$u_p = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_{p-1} u_{p-1}$$

Comme la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est génératrice de E alors pour tout u de E il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tels que :

$$u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p$$

Ceci donne :

$$u = (\lambda_1 + \lambda_p \alpha_1) u_1 + \dots + (\lambda_{p-1} + \lambda_p \alpha_{p-1}) u_{p-1}$$

Ainsi tout vecteur u de E est combinaison linéaire des vecteurs $u_1, \dots, u_{p-1}$ et donc que la famille $(u_1, \dots, u_{p-1})$ est génératrice de E. $\square$

Proposition

Soit $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux familles de vecteurs de E telles que $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{G}$.
Si $\mathscr{F}$ est génératrice de E alors $\mathscr{G}$ est génératrice de E.

Démonstration. En effet, si $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{G}$ alors $\text{Vect}\,(\mathscr{F}) \subseteq \text{Vect}\,(\mathscr{G})$.

Donc si $E = \text{Vect}\,(\mathscr{F})$ alors $E \subseteq \text{Vect}\,(\mathscr{G}) \subseteq E$, donc $E = \text{Vect}\,(\mathscr{G})$ et $\mathscr{G}$ est génératrice de E. $\square$

Exemple 8. Donner une famille génératrice de :

- $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x+2y=0\}$.
- $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x-5y+4z=0\}$

▷ **Exercice 8.**

Proposition

Soit F un sous-espace vectoriel de E, et $\mathscr{F}$ un famille génératrice de F. Alors F est invariant par opérations élémentaires sur les vecteurs de $\mathscr{F}$.
Plus précisément, si $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p)$ alors :

- Pour tout $(i,j) \in \{1,\dots,p\}^2$ avec $i \neq j$ et $\alpha \in \mathbb{K}$:
$$F = \operatorname{Vect}(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i + \alpha u_j, u_{i+1}, \dots, u_p)$$
- Pour tout $i \in \{1,\dots,p\}$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$:
$$F = \operatorname{Vect}(u_1, \dots, u_{i-1}, \lambda u_i, u_{i+1}, \dots, u_p)$$
- Pour tout $(i,j) \in \{1,\dots,p\}^2$ avec $i < j$:
$$F = \operatorname{Vect}(u_1, \dots, \underset{(i)}{u_j}, \dots, \underset{(j)}{u_i}, \dots, u_p)$$

Démonstration. Soit $\mathscr{F}'$ la famille obtenue par opération élémentaire sur les élément de $\mathscr{F}$, et $F' = \operatorname{Vect}(\mathscr{F}')$.

On vérifie que $\mathscr{F}' \subseteq \operatorname{Vect}(\mathscr{F})$ et $\mathscr{F} \subseteq \operatorname{Vect}(\mathscr{F}')$.

Par propriété ceci implique $F' \subseteq F$ et $F \subseteq F'$, donc $F = F'$. □

Proposition

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Si $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de F et $\mathscr{G}$ est une famille génératrice de G, alors $\mathscr{F} \cup \mathscr{G}$ est une famille génératrice de $F+G$.

Démonstration. On note $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p)$ et $\mathscr{G} = (v_1, \dots, v_q)$. Comme $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de F et $\mathscr{G}$ est une famille génératrice de G alors

$$\begin{aligned} F &= \{\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p\} \\ \text{et} \quad G &= \{\mu_1 v_1 + \dots + \mu_q v_q \mid (\mu_1, \dots, \mu_q) \in \mathbb{K}^q\} \end{aligned}$$

Par définition : $F + G = \{u + v \mid (u,v) \in F \times G\}$

$$\begin{aligned} \text{Donc } F+G &= \{\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p + \mu_1 v_1 + \dots + \mu_q v_q \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_q) \in \mathbb{K}^{p+q}\} \\ &= \operatorname{Vect}(u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q) \\ &= \operatorname{Vect}(\mathscr{F} \cup \mathscr{G}) \end{aligned}$$

Ceci montre bien que la famille $\mathscr{F} \cup \mathscr{G}$ est génératrice de $F+G$. □

B. Familles libres

Définitions

Soit $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E.

On dit que la famille $\mathscr{F}$ est *libre* si :

Dans ce cas on dit aussi que les vecteurs $u_1, \dots, u_p$ sont *linéairement indépendants*.

Si la famille $\mathscr{F}$ n'est pas libre, on dit qu'elle est *liée*, ou que les vecteurs $u_1, \dots, u_p$ sont *linéairement dépendants*.

Proposition

Une famille est liée si et seulement si un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres.

Démonstration.

Exemple 7 (suite).

Parmi les familles $\mathscr{F}_1$ à $\mathscr{F}_5$ celles qui sont libres sont

Exemple 9. La famille $\mathscr{F} = ((1,1,0),(1,0,1),(0,1,1))$ est-elle libre ?

▷ **Exercices 9, 10.**

Proposition

Soit $u_1, \dots, u_{p+1}$ des vecteurs de E.
(i) Si la famille $(u_1, \dots, u_{p+1})$ est libre alors la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est libre.
(ii) Si la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est liée alors la famille $(u_1, \dots, u_{p+1})$ est liée.
(iii) Si la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est libre alors la famille $(u_1, \dots, u_{p+1})$ est liée si et seulement si u_{p+1} est combinaison linéaire de $u_1, \dots, u_p$.

Démonstration. La propriété *(ii)* est conséquence de la propriété précédente, la propriété *(i)* est la contraposée de la propriété *(ii)*.

Démontrons la propriété *(iii)*.

Supposons que la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est libre et que la famille $(u_1, \dots, u_{p+1})$ est liée.

Alors il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_{p+1}) \in \mathbb{K}^{p+1} \setminus \{0_{\mathbb{K}^{p+1}}\}$ tel que $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_{p+1} u_{p+1} = 0_E$.

Si $\lambda_{p+1} = 0$ alors $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p = 0_E$, ce qui implique $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$ car la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est libre. Mais la famille $(\lambda_1, \dots, \lambda_{p+1})$ est supposée non-nulle, donc on ne peut avoir $\lambda_{p+1} = 0$.

Ainsi $\lambda_{p+1} \neq 0$, donc $u_{p+1} = \sum_{i=1}^{p} \left(-\frac{\lambda_i}{\lambda_{p+1}}\right) u_i$, *i.e.*, u_{p+1} est combinaison linéaire de $u_1, \dots, u_p$.

Réciproquement, si la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est libre et u_{p+1} est combinaison linéaire de $u_1, \dots, u_p$ alors la famille $(u_1, \dots, u_{p+1})$ est liée d'après la proposition précédente. □

Proposition

- La famille vide est libre.
- Soit u un vecteur de E. Alors la famille (u) est libre si et seulement si u est non-nul.
- Soit u et v deux vecteurs de E. La famille (u, v) est libre si et seulement si aucun des deux vecteurs n'est colinéaire à l'autre.
  En d'autres termes, la famille (u, v) est liée s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u = \lambda v$ ou s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $v = \lambda u$.

Exemple 10. Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, et f_1, f_2, f_3 les trois vecteurs de E définis par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f_1(x) = \cos x \quad f_2(x) = \sin x \quad f_3(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

Alors la famille (f_1, f_2) est libre.

▷ **Exercice 11.**

Proposition

Une famille de polynômes non-nuls de degrés distincts est libre.

Démonstration. Soit $(P_i)_{i=0\dots n}$ une famille de polynômes non-nuls de degrés distincts.

Quitte à permuter les polynômes P_i on peut supposer qu'ils sont de degrés strictement croissants.

Soit $(\lambda_i)_{i=0,\dots,n}$ une famille de scalaires telle que : $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\lambda_i P_i = 0_{\mathbb{K}[X]}$

Supposons que cette famille n'est pas la famille nulle. Il existe alors un indice m maximal tel que λ_m est non-nul, et donc :

$$\sum_{i=0}^{m}\lambda_i P_i = 0_{\mathbb{K}[X]} \qquad \text{puis} \qquad P_m = -\sum_{i=0}^{m-1}\frac{\lambda_i}{\lambda_m}P_i$$

Comme la famille $(P_0,\dots,P_n)$ est de degrés strictement croissants alors les degrés de $P_0,\dots,P_{m-1}$ sont strictement inférieurs à celui de P_m donc :

$$\deg\left(-\sum_{i=0}^{m-1}\frac{\lambda_i}{\lambda_m}P_i\right) \leqslant \max\left\{\deg P_i \mid i=0\dots m-1\right\} < \deg P_m$$

Ceci est une contradiction, donc la famille $(\lambda_i)_{i=0\dots n}$ est nulle, et ainsi la famille $(P_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est libre. □

Définition

Une famille $(P_0,\dots,P_n)$ de polynômes est dite *de degrés échelonnés* si la suite $(\deg P_i)_{i=0\dots n}$ est strictement croissante.

Corollaire

Une famille de polynômes non-nuls de degrés échelonnés est libre.

C. Bases

Définition

Soit $\mathscr{F} = (u_1,\dots,u_p)$ une famille de vecteurs de E.

On dit que la famille $\mathscr{F}$ est une *base* de E si elle est libre et génératrice.

Exemple 7 (suite).

Parmi les familles $\mathscr{F}_1$ à $\mathscr{F}_5$ les bases sont

Théorème

Soit $\mathscr{B} = (u_1,\dots,u_n)$ une base de E et u un vecteur de E.
Alors il existe un unique n-uplet $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ de scalaires tel que :

$$u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$$

Définition

On appelle *coordonnées* de u dans la base $\mathscr{B}$ ce n-uplet.

Démonstration.

Proposition

Soit $\mathscr{B} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E. Si pour tout $u \in E$ il existe un unique n-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de scalaires tel que $u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$ alors $\mathscr{B}$ est une base de E.

Démonstration. La famille $\mathscr{B}$ est génératrice car tout vecteur de E est combinaison linéaire de ses vecteurs.

Démontrons qu'elle est libre. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ un n-uplet de scalaires tel que :

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = 0_E$$

Par hypothèse 0_E s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des u_i. Or :

$$0_{\mathbb{K}} u_1 + \dots + 0_{\mathbb{K}} u_n = 0_E$$

Par unicité on obtient :

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0_{\mathbb{K}}$$

Ceci montre que la famille $\mathscr{B}$ est libre.

La famille $\mathscr{B}$ est libre et génératrice de E donc c'est une base de E. □

Exemple 11. Dans $E = \mathbb{R}^3$ on pose :

$$\mathscr{B}_1 = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)) \qquad \mathscr{B}_2 = ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)) \qquad u = (9,3,7)$$

Alors les deux familles $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ sont des bases de E.

Quelles sont les coordonnées de u dans ces bases ?

▷ **Exercice 12.**

D. Base canonique

Définition

Soit $E = \mathbb{K}^n$. Pour $i = 1, \dots, n$ on note e_i le vecteur ne contenant que des 0 sauf un 1 en i-ème position :

Alors la famille $\mathscr{B}_c = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$, appelée *base canonique* de $\mathbb{K}^n$.

Les coordonnées du vecteur $u = (a_1, \dots, a_n)$ dans cette base sont $(a_1, \dots, a_n)$.

Définition

Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$, où $n \in \mathbb{N}$. Alors la famille

est une base de E, appelée *base canonique* de $\mathbb{K}_n[X]$.

Les coordonnées du polynôme $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ dans cette base sont $(a_0, \dots, a_n)$.

Définition

Soit $E = \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$. On note E_{ij} la matrice ne contenant que des zéros, sauf un 1 en position (i, j).

La famille $(E_{ij} \mid 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant p)$ est une base de E, appelée *base canonique* de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$.

Exemple. La base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$.

Les coordonnées de $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ dans cette base sont

Remarque. Les espaces vectoriels $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ n'ont pas de base canonique.

▷ **Exercices 13, 14.**

E. Dimension

Définition

Un espace vectoriel est dit *de dimension finie* s'il admet une famille génératrice finie.

Théorème

- Si un espace vectoriel est de dimension finie alors il admet une base.
- Dans ce cas toutes ses bases ont le même cardinal.

Définition

On appelle *dimension* de E et on note $\dim E$ le cardinal de ses bases.

Remarque. La démonstration et la suite au chapitre B10 : dimension.

Exemple 12. Les espaces vectoriels $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ sont de dimensions finies, et :

$\dim \mathbb{K}^n =$ $\qquad$ $\dim \mathbb{K}_n[X] =$ $\qquad$ $\dim \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) =$

F. Extension aux familles infinies

On note toujours E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Définition

Soit $\mathscr{E}$ une partie de E. Une *combinaison linéaire* d'éléments de $\mathscr{E}$ est une combinaison linéaire d'un nombre fini d'éléments de $\mathscr{E}$.

Exemple. Tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ est combinaison linéaire d'éléments de $\left\{ X^k \;\middle|\; k \in \mathbb{N} \right\}$.

Définition

Soit $\mathscr{E}$ une partie de E.

On note $\mathrm{Vect}\,(\mathscr{E})$ l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de $\mathscr{E}$.

Proposition

Pour toute partie $\mathscr{E}$ de E l'ensemble $\mathrm{Vect}\,(\mathscr{E})$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. La démonstration est identique au cas où la partie $\mathscr{E}$ est finie. On remarque que la somme de deux combinaisons linéaires d'éléments de $\mathscr{E}$ est une combinaison linéaire d'éléments de $\mathscr{E}$, car l'union de deux ensembles finis est un ensemble fini. $\square$

Remarque.

- Comme pour le cas fini, Vect $(\mathscr{E})$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $\mathscr{E}$, et l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant $\mathscr{E}$.
- Soit F un sous-espace vectoriel de E. On dit que $\mathscr{E}$ est une *partie génératrice* de F si $F = \text{Vect}(\mathscr{E})$.

Notation

Soit I un ensemble infini.

- On note $\mathbb{K}^I$ l'ensemble des familles de scalaires indexées par I :

$$\mathbb{K}^I = \{(\lambda_i)_{i\in I} \mid \forall i \in I \quad \lambda_i \in \mathbb{K}\}$$

- On note $\mathbb{K}^{(I)}$ l'ensemble des familles *presque nulles* de scalaires indexées par I, c'est-à-dire des familles dont tous les termes sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux.

Remarque. Si $\lambda = (\lambda_i)_{i\in I}$ est une famille de $\mathbb{K}^I$ alors le *support* de λ est l'ensemble des indices i pour lesquels λ_i est non-nul. C'est une partie de I.

Ainsi les familles presque nulles sont les familles à support fini.

Exemples.

- Dans le cas où $I = \mathbb{N}$: une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est presque nulle si et seulement si elle est nulle à partir d'un certain rang.
- On peut définir l'ensemble $\mathbb{K}[X]$ par :

$$\mathbb{K}[X] = \left\{ \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k X^k \;\middle|\; (a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})} \right\}$$

Définition

Soit $\mathscr{E}$ une partie de E

- On dit que $\mathscr{E}$ est *libre* si toute famille finie d'éléments de $\mathscr{E}$ est libre.
- On dit que $\mathscr{E}$ est *liée* si elle n'est pas libre, ce qui signifie qu'il existe une famille finie d'éléments de $\mathscr{E}$ linéairement dépendants.

Exemple 13. Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ on pose $f_a(x) = a^x$.

Démontrer que la famille $\mathscr{A} = \{ f_a \mid a \in \mathbb{R}_+^* \}$ est une famille libre de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Remarque. Comme dans le cas fini, une *base* de E est une famille $\mathscr{E} = (e_i)_{i\in I}$ libre et génératrice de E.

Dans le cas où I est infini, tout vecteur s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire d'éléments de cette famille, ce qui donne en terme de familles presque nulles :

$$\forall u \in E \qquad \exists! (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)} \qquad u = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$$

Les λ_i sont toujours appelés *coordonnées* de u dans la base $\mathscr{E}$.

Exemple. La famille $\{ X^k \mid k \in \mathbb{N} \}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$, appelée base canonique de $\mathbb{K}[X]$.