

Corrigé du Devoir à la Maison n°9

Exercice 1.

1. (a) Calcul de $I_1 = \int_1^4 \frac{dt}{t(3-\sqrt{t})}$.

On applique le changement de variable $x = \sqrt{t}$.

La fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[1, 4]$, de dérivée $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2x}$.

Ceci donne $dt = 2x dx$, et ainsi par changement de variable :

$$I_1 = \int_1^2 \frac{2x dx}{x^2(3-x)} = \int_1^2 \frac{2 dx}{x(3-x)}.$$

On calcule :

$$\forall x \in [1, 2] \quad \frac{2}{x(3-x)} = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3-x} \right)$$

Donc :

$$I_1 = \frac{2}{3} \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3-x} \right) dx = \frac{2}{3} \left[\ln|x| - \ln|3-x| \right]_1^2 = \boxed{\frac{4}{3} \ln 2}$$

(b) Calcul de $I_2 = \int_0^1 t^2 \sqrt{1-t^2} dt$.

On applique le changement de variable $t = \sin x$, avec $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

La fonction $t \mapsto \sin t$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, de dérivée $\frac{dt}{dx} = \cos x$, ce qui donne $dt = \cos x dx$.

Par changement de variable :

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \sqrt{1-\sin^2 x} \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x |\cos x| \cos x dx$$

La fonction \cos est positive sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ donc :

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^2 x dx$$

Par formules de trigonométrie :

$$\sin^2 x \cos^2 x = \left(\frac{\sin(2x)}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \sin^2(2x) = \frac{1}{8} (1 - \cos(4x))$$

On en déduit :

$$I_2 = \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos(4x)) dx = \frac{1}{8} \left[x - \frac{\sin(4x)}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{\frac{\pi}{16}}$$

2. Pour obtenir des développements limités à l'ordre 2 il faut commencer par écrire des développements limités à l'ordre 5. On connaît les suivants :

$$\arctan x \underset{(0)}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5) \quad \sin x \underset{(0)}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x - \arctan x}{x - \sin x} \underset{(0)}{=} \frac{\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + o(x^5)}{\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} + o(x^5)} \underset{(0)}{=} \frac{2 - \frac{6}{5}x^2 + o(x^2)}{1 - \frac{1}{20}x^2 + o(x^2)} \\ &\underset{(0)}{=} \left(2 - \frac{6}{5}x^2 + o(x^2)\right) \times \left(1 + \frac{1}{20}x^2 + o(x^2)\right) \underset{(0)}{=} 2 - \frac{11}{10}x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

Pour la fonction tangente on connaît :

$$\tan x \underset{(0)}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

Ceci donne :

$$1 + \tan^2 x \underset{(0)}{=} 1 + x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$$

Comme $1 + \tan^2 x = \tan' x$ et $\tan 0 = 0$ alors par primitivation :

$$\tan x \underset{(0)}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5).$$

De plus on sait que :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \underset{(0)}{=} 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^4)$$

Comme $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin' x$ et $\arcsin 0 = 0$ alors par primitivation :

$$\arcsin x \underset{(0)}{=} x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5)$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{x - \tan x}{x - \arcsin x} \underset{(0)}{=} \frac{-\frac{x^3}{3} - \frac{2x^5}{15} + o(x^5)}{-\frac{x^3}{6} - \frac{3x^5}{40} + o(x^5)} \underset{(0)}{=} \frac{2 + \frac{4}{5}x^2 + o(x^2)}{1 + \frac{9}{20}x^2 + o(x^2)} \\ &\underset{(0)}{=} \left(2 + \frac{4}{5}x^2 + o(x^2)\right) \times \left(1 - \frac{9}{20}x^2 + o(x^2)\right) \underset{(0)}{=} 2 - \frac{1}{10}x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{f(x) \underset{(0)}{=} 2 - \frac{11}{10}x^2 + o(x^2) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{(0)}{=} 2 - \frac{1}{10}x^2 + o(x^2)}$$

Ceci donne $g(x) - f(x) \underset{(0)}{=} x^2 + o(x^2)$ donc la fonction $g - f$ est positive au voisinage de 0, *i.e.*, $f \leq g$ au voisinage de 0.

3. Posons $h = \frac{1}{n}$. Alors :

$$u_n = \left(2 - \sqrt[n]{2}\right)^n = \left(2 - 2^h\right)^{\frac{1}{h}} = e^{\frac{1}{h} \ln(2-2^h)}$$

On peut écrire :

$$2 - 2^h = 2 - e^{h \ln 2} \underset{(0)}{=} 2 - \left(1 + h \ln 2 + \frac{\ln^2 2}{2} h^2 + o(h^2)\right) \underset{(0)}{=} 1 - h \ln 2 - \frac{\ln^2 2}{2} h^2 + o(h^2)$$

Puis :

$$\ln(2 - 2^h) \underset{(0)}{=} -h \ln 2 - \frac{\ln^2 2}{2} h^2 - \frac{\ln^2 2}{2} h^2 + o(h^2) \underset{(0)}{=} -h \ln 2 - h^2 \ln^2 2 + o(h^2)$$

Ensuite :

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{h} \ln(2-2^h)} &\underset{(0)}{=} e^{-\ln 2 - h \ln^2 2 + o(h)} \underset{(0)}{=} e^{-\ln 2} \times e^{-h \ln^2 2 + o(h)} \\ &\underset{(0)}{=} \frac{1}{2} (1 - h \ln^2 2 + o(h)) = \frac{1}{2} - h \frac{\ln^2 2}{2} + o(h) \end{aligned}$$

Finalement :

$$u_n \underset{(+\infty)}{=} \frac{1}{2} - \frac{\ln^2 2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Exercice 2.

On note $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2} + \sin x}$, si bien que $f(x) = \int_0^x \varphi(t) dt$.

1. On sait que pour tout $t \in \mathbb{R}$: $-1 \leq \sin t \leq 1$.

La fonction φ est donc définie sur \mathbb{R} , et elle est continue par quotient.

D'après le théorème fondamental la fonction f est une primitive de φ .

Ceci montre que f est dérivable sur \mathbb{R} , de dérivée φ .

La fonction φ est de classe \mathcal{C}^∞ par quotient, et donc f est de classe \mathcal{C}^∞ .

2. Soit $x \in]-\pi, \pi[$ et, pour tout $t \in [0, x]$ ou $[x, 0]$: $u = \tan \frac{t}{2}$.

La fonction $t \mapsto u = \tan \frac{t}{2}$ est définie sur $]-\pi, \pi[$ et de classe \mathcal{C}^1 , donc elle l'est aussi sur l'intervalle $[0, x]$ ou $[x, 0]$.

On calcule $\frac{du}{dt} = \frac{1}{2}(1 + \tan^2 \frac{t}{2}) = \frac{1}{2}(1 + u^2)$, ce qui donne $dt = \frac{2du}{1+u^2}$.

On utilise la formule $\sin t = \frac{2u}{1+u^2}$. Par changement de variable :

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{2} + \sin t} = \int_0^{\tan \frac{x}{2}} \frac{2du}{\sqrt{2}(1+u^2) + 2u} = \sqrt{2} \int_0^{\tan \frac{x}{2}} \frac{du}{u^2 + \sqrt{2}u + 1}$$

Pour calculer cette intégrale on utilise la forme canonique du dénominateur :

$$\frac{1}{u^2 + \sqrt{2}u + 1} = \frac{1}{\left(u + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{(\sqrt{2}u + 1)^2 + 1} = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}u + 1)^2 + 1}$$

Ceci montre que :

$$f(x) = \left[2 \arctan(\sqrt{2}u + 1) \right]_0^{\tan \frac{x}{2}}$$

Finalement :

$$\forall x \in]-\pi, \pi[\quad f(x) = 2 \arctan\left(\sqrt{2} \tan \frac{x}{2} + 1\right) - \frac{\pi}{2}$$

3. La formule ci-dessus n'est valable que pour $x \in]-\pi, \pi[$.

Mais la fonction f est continue sur \mathbb{R} , donc :

$$f(\pi) = \lim_{x \nearrow \pi} f(x) \quad \text{et} \quad f(-\pi) = \lim_{x \searrow -\pi} f(x)$$

Ceci donne :

$$f(\pi) = \lim_{x \nearrow \pi} \left(2 \arctan\left(\sqrt{2} \tan \frac{x}{2} + 1\right) - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$f(-\pi) = \lim_{x \searrow -\pi} \left(2 \arctan\left(\sqrt{2} \tan \frac{x}{2} + 1\right) - \frac{\pi}{2} \right)$$

Par composition de limites :

$$f(\pi) = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad f(-\pi) = -\frac{3\pi}{2}$$

4. On applique le changement de variable $u = t + 2\pi$ à l'intégrale :

$$f(x - 2\pi) = \int_0^{x-2\pi} \varphi(t) dt$$

La fonction $t \mapsto t + 2\pi$ est de classe \mathcal{C}^1 et $du = dt$, donc :

$$f(x - 2\pi) = \int_{2\pi}^x \varphi(u - 2\pi) du$$

La fonction φ est 2π -périodique donc :

$$f(x - 2\pi) = \int_{2\pi}^x \varphi(u) du = f(x) - f(2\pi).$$

On obtient bien la formule demandée : $f(x - 2\pi) = f(x) - f(2\pi)$.

Pour $x = \pi$ elle donne $f(-\pi) = f(\pi) - f(2\pi)$, soit $f(2\pi) = f(\pi) - f(-\pi)$ et finalement :

$$f(2\pi) = 2\pi$$

5. En remplaçant x par $x + 2\pi$ la formule de la question précédente donne :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x + 2\pi) = f(x) + 2\pi.$$

On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x + 2\pi) = f(x + 2\pi) - x - 2\pi = f(x) - x = g(x).$$

Ceci montre que la fonction g est 2π -périodique.

Comme f est continue alors g est continue. Par le théorème des valeurs extrêmes l'image du segment $[-\pi, \pi]$ est un segment, ce qui montre que g est bornée sur $[-\pi, \pi]$.

Par périodicité g est bornée sur tout segment $[2k\pi - \pi, 2k\pi + \pi]$ où $k \in \mathbb{Z}$, et donc g est bornée sur $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2k\pi - \pi, 2k\pi + \pi] = \mathbb{R}$.

On peut démontrer plus précisément ceci : pour tout réel x il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x \in [2k\pi - \pi, 2k\pi + \pi]$. En effet par équivalence :

$$\begin{aligned} x \in [2k\pi - \pi, 2k\pi + \pi] &\iff 2k\pi - \pi \leq x \leq 2k\pi + \pi \\ &\iff x - \pi \leq 2k\pi \leq x + \pi \\ &\iff \frac{x}{2\pi} - \frac{1}{2} \leq k \leq \frac{x}{2\pi} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Posons $k = \lfloor \frac{x}{2\pi} + \frac{1}{2} \rfloor$. Alors k est un entier, $\frac{x}{2\pi} - \frac{1}{2} < k \leq \frac{x}{2\pi} + \frac{1}{2}$ et donc $x \in [2k\pi - \pi, 2k\pi + \pi]$.

6. Notons $m = \inf_{\mathbb{R}} g$ et $M = \sup_{\mathbb{R}} g$. Alors $m \leq g \leq M$ et donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x + m \leq f(x) \leq x + M.$$

Comme $x + m \underset{(+\infty)}{\sim} x$ et $x + M \underset{(+\infty)}{\sim} x$ alors par théorème d'encadrement :

$$\boxed{f(x) \underset{(+\infty)}{\sim} x.}$$

Démontrons par l'absurde que la courbe de f n'admet pas d'asymptote en $+\infty$.

Si c'est le cas alors il existe deux réels a et b tels que : $f(x) - ax - b \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

On en déduit $\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, donc $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} a$.

D'après la question précédente $a = 1$.

Ainsi $f(x) - x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} b$, i.e., $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} b$.

Comme g est 2π -périodique alors :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad g(2k\pi) = g(0) = 0 \quad \text{et} \quad g(\pi + 2k\pi) = g(\pi) = f(\pi) - \pi = -\frac{\pi}{2}.$$

Les suites $(2k\pi)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(\pi + 2k\pi)_{k \in \mathbb{N}}$ tendent vers $+\infty$, donc par composition de limites les suites $(g(2k\pi))_{k \in \mathbb{N}}$ et $(g(\pi + 2k\pi))_{k \in \mathbb{N}}$ tendent vers b . Or ces deux suites sont constantes, égales respectivement à 0 et $-\frac{\pi}{2}$. Ceci est une contradiction, laquelle montre que f n'admet pas d'asymptote en $+\infty$.

Exercice 3.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on note $I_n =]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$.

1. La fonction \tan est définie sur $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I_n$, donc *a fortiori* sur I_n .

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on pose $f_n : I_n \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto \tan x - x$.

Cette fonction est continue.

Elle est dérivable de dérivée $x \mapsto \tan^2 x$. Comme cette dérivée est strictement positive sauf en $n\pi$ où elle s'annule alors f_n est strictement croissante.

Ses limites sont :

$$\lim_{x \rightarrow n\pi - \frac{\pi}{2}} f_n(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow n\pi + \frac{\pi}{2}} f_n(x) = +\infty.$$

Par théorème la fonction f_n réalise une bijection de I_n dans \mathbb{R} .

Comme $0 \in \mathbb{R}$ alors il admet un et un seul antécédent dans I_n par f_n .

On note x_n cet antécédent. Ainsi $x_n \in I_n$ et $\tan(x_n) = x_n$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme $x_n \in I_n$ alors $n\pi - \frac{\pi}{2} < x_n < n\pi + \frac{\pi}{2}$, ce qui donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 1 - \frac{1}{2n} < \frac{x_n}{n\pi} < 1 + \frac{1}{2n}.$$

Par théorème d'encadrement $\frac{x_n}{n\pi} \longrightarrow 1$ et donc $x_n \sim n\pi$.

3. Comme $x_n \in I_n$ alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad -\frac{\pi}{2} < x_n - n\pi < \frac{\pi}{2}.$$

Ceci montre que : $\arctan(\tan(x_n - n\pi)) = x_n - n\pi$.

Or la fonction tangente est π -périodique et par définition $\tan x_n = x_n$ donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n - n\pi = \arctan(\tan(x_n)) = \arctan x_n \quad (1)$$

Comme $x_n \sim n\pi$ alors $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$.

Par composition $\arctan x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{\pi}{2}$, ce qui montre que $x_n - n\pi \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{\pi}{2}$.

4. L'égalité (1) donne :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} = \arctan x_n - \frac{\pi}{2} \quad (2)$$

Supposons $n \geq 1$. Alors $x_n \in I_n$ donc x_n est positif et :

$$\arctan x_n - \frac{\pi}{2} = -\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x_n\right) = -\arctan \frac{1}{x_n} \quad (3)$$

Comme $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ alors par développement limité :

$$-\arctan \frac{1}{x_n} \underset{(n \rightarrow +\infty)}{=} -\frac{1}{x_n} + o\left(\frac{1}{x_n}\right) \quad (4)$$

Comme $x_n \sim \frac{1}{n\pi}$ alors :

$$o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x_n} \right) = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n\pi} \right) = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \right)$$

Démontrons ceci plus précisément :

Le reste $o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x_n} \right)$ s'écrit $\frac{1}{x_n} \varepsilon(n)$ où ε est une fonction telle que $\varepsilon(n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

Comme $x_n \sim n\pi$ alors il existe une fonction h telle que $x_n = h(n)n\pi$ et $h(n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$.

Donc $\frac{1}{x_n} \varepsilon(n) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{h(n)\pi} \times \varepsilon(n)$, comme $\frac{\varepsilon(n)}{h(n)\pi} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ alors $\frac{1}{x_n} \varepsilon(n) \underset{(+\infty)}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Repartons de l'égalité (4). Comme $x_n - n\pi \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{\pi}{2}$ alors $x_n \underset{(+\infty)}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)$,
et :

$$-\frac{1}{x_n} \underset{(+\infty)}{=} -\frac{1}{n\pi} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} \underset{(+\infty)}{=} -\frac{1}{n\pi} \left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \underset{(+\infty)}{=} -\frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Grâce à (2), (3) et (4) on aboutit au développement asymptotique :

$$x_n \underset{(+\infty)}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Remarque. En fait la question 3 montre que $x_n \underset{(+\infty)}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)$, donc en utilisant (2), (3) on peut même obtenir :

$$x_n \underset{(+\infty)}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2\pi n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Il est possible de poursuivre les calculs pour obtenir les termes suivants.

Exercice 4.

On définit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ avec } (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \quad p \wedge q = 1 \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

1. Démontrons que f n'est continue en aucun point de \mathbb{Q} .

Soit $r \in \mathbb{Q}$ avec $r = \frac{p}{q}$ où $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ et $p \wedge q = 1$. Alors $f(r) = \frac{1}{q}$.

On raisonne par l'absurde en supposant que f est continue en r .

Méthode 1.

Comme $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans \mathbb{R} alors il existe une suite d'irrationnels $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers r .

Comme f est continue en r alors la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(r) = \frac{1}{q}$.

Or la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est nulle car les x_n sont irrationnels, et $f(r)$ n'est pas nul donc on aboutit à une contradiction.

Méthode 2.

Comme f est continue en r alors :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (|x - r| \leq \eta \implies |f(x) - f(r)| \leq \varepsilon)$$

Posons $\varepsilon = \frac{1}{2q}$. Alors $\varepsilon > 0$ donc il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x \in [r - \eta, r + \eta] \implies f(x) \in \left[f(r) - \frac{1}{2q}, f(r) + \frac{1}{2q} \right] = \left[\frac{1}{2q}, \frac{3}{2q} \right]$$

Comme $\eta > 0$ alors l'intervalle $[r - \eta, r + \eta]$ n'est pas réduit à un point.

Comme $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans \mathbb{R} alors il existe un irrationnel x dans cet intervalle. On a donc $f(x) = 0$, ce qui contredit $f(x) \in \left[\frac{1}{2q}, \frac{3}{2q} \right]$ car $\frac{1}{2q} > 0$.

Les deux méthodes ont abouti à une contradiction donc f n'est pas continue en r .

2. Démontrons que f est continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Alors $f(a) = 0$.

Soit ε un réel strictement positif. On démontre qu'il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

Comme $f(a) = 0$ alors la dernière inégalité s'écrit $f(x) \in [-\varepsilon, \varepsilon]$.

Si x est irrationnel alors $f(x) = 0$ donc $f(x) \in [-\varepsilon, \varepsilon]$.

Si x est rationnel de la forme $x = \frac{p}{q}$ avec $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ et $p \wedge q = 1$, alors $f(x) = \frac{1}{q}$ donc :

$$f(x) \in [-\varepsilon, \varepsilon] \iff -\varepsilon \leq \frac{1}{q} \leq \varepsilon \iff q \geq \frac{1}{\varepsilon}$$

Comme ε est strictement positif alors $\frac{1}{\varepsilon}$ est défini et strictement positif.

Notons $Q = \mathbb{N}^* \cap]0, \frac{1}{\varepsilon}]$. Cet ensemble est majoré par $\left[\frac{1}{\varepsilon} \right]$ donc il est fini.

Soit $q \in Q$. L'ensemble des $\frac{n}{q}$ où n parcourt \mathbb{Z} ne contient pas a puisque celui-ci est irrationnel. Il existe donc un entier n tel que $\frac{n}{q} < a < \frac{n+1}{q}$. En effet il suffit de poser $n = \lfloor qa \rfloor$.

Notons $\eta_q = \frac{1}{2} \text{Min} \left\{ a - \frac{n}{q}, \frac{n+1}{q} - a \right\}$. Alors η_q est strictement positif.

Comme $\eta_q < a - \frac{n}{q}$ et $\eta_q < \frac{n+1}{q} - a$ alors $\frac{n}{q} < a - \eta_q$ et $a + \eta_q < \frac{n+1}{q}$, donc :

$$[a - \eta_q, a + \eta_q] \subseteq \left] \frac{n}{q}, \frac{n+1}{q} \right[\quad (5)$$

Soit $\eta = \text{Min} \{ \eta_q \mid q \in Q \}$. Comme l'ensemble Q est fini alors η est bien défini, et comme tous les η_q sont strictement positifs alors η est strictement positif.

Démontrons que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |x - a| \leq \eta \implies |f(x)| \leq \varepsilon.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x - a| \leq \eta$.

Si x est irrationnel alors $f(x) = 0$ donc $|f(x)| \leq \varepsilon$.

Si x est rationnel alors il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $p \wedge q = 1$ et $x = \frac{p}{q}$.

Si $q < \frac{1}{\varepsilon}$ alors $q \in \mathbb{Q}$. Comme $|x - a| \leq \eta$ alors $|x - a| \leq \eta_q$ par définition de η , donc en posant $n = \lfloor qa \rfloor$ et en utilisant (5) :

$$x \in [a - \eta_q, a + \eta_q] \subseteq \left] \frac{n}{q}, \frac{n+1}{q} \right[$$

Comme $x = \frac{p}{q}$ alors ceci donne $n < p < n + 1$, c'est impossible car n et p sont entiers.

Cette contradiction montre que $q \geq \frac{1}{\varepsilon}$, donc $\frac{1}{q} \leq \varepsilon$, et ainsi $|f(x)| \leq \varepsilon$.

On a démontré que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

Ainsi la fonction f est continue en a .

On a donc démontré que f n'est continue en aucun point de \mathbb{Q} mais qu'elle est continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.