Lycée Bellevue – Toulouse **Année 2024-2025**
MPSI – Mathématiques

Chapitre A9
Dérivation

I. Fonction dérivée

A. Dérivabilité en un point

Dans toute cette partie on note D une partie de $\mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction, et x_0 un point de D. Ainsi f est définie en x_0.

Définitions. On dit que f est dérivable en x_0 si la fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie lorsque x tend vers x_0.
Cette limite est appelée dérivée ou nombre dérivé de f en x_0, et notée $f'(x_0)$:

Remarque. On dit que f admet un développement limité en x_0 à l'ordre 1 s'il existe deux réels a_0 et a_1 tels que :

$$f(x) \underset{(x_0)}{=} a_0 + a_1(x - x_0) + o(x - x_0) \qquad \text{ou} \qquad f(x_0 + h) \underset{(0)}{=} a_0 + a_1 h + o(h)$$

Proposition. *La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si elle admet un développement limité en x_0 à l'ordre 1. Dans ce cas ce développement limité est :*

$$f(x) \underset{(x_0)}{=} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad \textit{ou} \quad f(x_0 + h) \underset{(0)}{=} f(x_0) + hf'(x_0) + o(h)$$

Démonstration.

Exemple 1.

(i) Soit n un entier naturel, x_0 un réel. Alors la fonction $f : x \mapsto x^n$ est dérivable en x_0, de dérivée $f'(x_0) = n{x_0}^{n-1}$.

(ii) La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0, mais elle est dérivable en tout point x_0 de $\mathbb{R}_+^*$.

(iii) La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$, de dérivée $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$.

(iv) En admettant que les fonctions ln et exp sont dérivables l'une en 1 et l'autre en 0, de dérivées 1, on démontre qu'elles sont dérivables sur leurs ensembles de définition.

▷ **Exercice 1.**

Définition. On dit que f admet une tangente en x_0 si son taux d'accroissement en x_0 admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

Si cette limite est finie alors elle vaut $f'(x_0)$.

La tangente en x_0 à la courbe représentative de f est dans ce cas la droite d'équation :

Si cette limite est infinie alors la tangente en x_0 à la courbe représentative de f est la droite d'équation :

B. Propriétés locales

Théorème. *Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.*

Remarque. La réciproque est fausse, comme le montre l'exemple de la fonction valeur absolue en 0.

Démonstration.

Définitions. On dit que f est dérivable à gauche, respectivement dérivable à droite, en x_0 si sa restriction à $D \cap \,]-\infty, x_0]$, respectivement à $D \cap [x_0, +\infty[$ est dérivable en x_0, *i.e.*, si

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad \text{resp.} \qquad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe et est finie. On note alors $f'_g(x_0)$ et $f'_d(x_0)$ ces limites.

Exemple 2. La fonction $x \mapsto |x|$ est dérivable à gauche et à droite en 0, de dérivées -1 à gauche et 1 à droite. Elle n'est pas dérivable en 0.

Rappel. Un point x_0 est dit intérieur à D si D est un voisinage de x_0, donc s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\, \subseteq D$.

Proposition. *Soit x_0 un point intérieur à D.*

(i) La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite en x_0 de même dérivée des deux côtés. Dans ce cas :

$$f'(x_0) = f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$$

(ii) Si la fonction f est dérivable à gauche et à droite en x_0 alors elle est continue en x_0.

Démonstration.

(i) Si f est dérivable en x_0 alors par restriction elle est dérivable à gauche et à droite en x_0, et ses dérivées à gauche et à droite en x_0 sont égales à sa dérivée en x_0.

Réciproquement, si f est dérivable à gauche et à droite en x_0 de mêmes dérivées alors :

$$f_g'(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f_d'(x_0)$$

Ceci montre que la fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie lorsque x tend vers x_0, donc f est dérivable en x_0 de dérivée $f'(x_0) = f_g'(x_0) = f_d'(x_0)$.

(ii) Si f est dérivable à gauche et à droite en x_0 alors elle est continue à gauche et à droite en x_0, donc elle est continue en x_0. □

C. Fonction dérivée

On note dorénavant I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, A une partie de I.

On dit que f est dérivable sur A si f est dérivable en tout point de A.

On dit que f est dérivable si elle est dérivable sur I.

Si f est dérivable sur A alors la fonction

$$\begin{aligned} f' : A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f'(x) \end{aligned}$$

est appelée fonction dérivée ou dérivée de f sur A.

Notation. La dérivée est notée f' ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

D. Opérations sur les dérivées

Proposition. *Soit f, $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables.*

(i) Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est dérivable, de dérivée $\lambda f' + \mu g'$.

(ii) La fonction fg est dérivable, de dérivée $f'g + fg'$.

(iii) La fonction $\frac{1}{g}$ est dérivable sur son ensemble de définition, de dérivée $-\frac{g'}{g^2}$.

(iv) La fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable sur son ensemble de définition, de dérivée $\frac{f'g-fg'}{g^2}$.

Démonstration. Soit x_0 un point de I.

(i) Pour tout élément x de I différent de x_0 :

$$\frac{(\lambda f + \mu g)(x) - (\lambda f + \mu g)(x_0)}{x - x_0} = \lambda \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \mu \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

Comme f et g sont dérivables en x_0 alors par somme ce taux d'accroissement admet $\lambda f'(x_0) + \mu g'(x_0)$ pour limite lorsque x tend vers x_0.

Donc la fonction $(\lambda f + \mu g)$ est dérivable en x_0, de dérivée $\lambda f'(x_0) + \mu g'(x_0)$.

(ii) La démonstration classique a été vue dans le chapitre A3.

À l'aide des développements limités : Comme f et g sont dérivables en x_0 alors il existe deux fonctions ε et η tendant vers 0 en 0 telles que :

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varepsilon(h) \qquad \text{et} \qquad g(x_0+h) = g(x_0) + hg'(x_0) + h\eta(h)$$

On en déduit :

$$(fg)(x_0+h) = (fg)(x_0) + h\Big(f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)\Big) + h\nu(h)$$

où la fonction ν est définie par :

$$\nu(h) = f(x_0)\eta(h) + g(x_0)\varepsilon(h) + h\Big(f'(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)\eta(h) + g'(x_0)\varepsilon(h) + h(\varepsilon(h)\eta(h))\Big)$$

Cette fonction tend vers 0 lorsque h tend vers 0, donc fg est dérivable en x_0, de dérivée $f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.

(iii) Voir démonstration plus bas, en composant g et $x \mapsto \frac{1}{x}$.

(iv) Soit I' l'ensemble de définition de $\frac{f}{g}$, *i.e.,* l'ensemble des points de I où g ne s'annule pas. Soit x_0 un point de I'. D'après les deux points précédents :

Ceci est vrai pour tout x_0 de I ou de I', donc les fonctions concernées sont bien dérivables, et les fonctions dérivées sont bien données par les formules ci-dessus. □

Remarque. Nous avons démontré que l'ensemble $\mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ des fonctions dérivables de I dans $\mathbb{R}$ est un anneau.

Proposition. *Soit $u : I \to \mathbb{R}$ et $f : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions, telles que $u(I) \subseteq J$. Si les fonctions u et f sont dérivables alors la fonction $f \circ u$ est dérivable, de dérivée :*

Exemples.

(i) Soit $g : I \to \mathbb{R}^*$ dérivable et $f : x \mapsto \frac{1}{x}$. Alors $f \circ g$ est dérivable et :

(ii) Soit α un réel quelconque, et $f : x \mapsto x^\alpha$. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

(iii) Soit u une fonction dérivable. Alors les fonctions e^u, $\ln u$, u^α sont dérivables et :

Démonstration.

▷ **Exercice 2.**

E. Dérivée d'une application réciproque

Proposition. *Soit I et J deux intervalles, $f : I \to J$ une fonction dérivable et bijective. Alors la fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ est dérivable sur :*

Sa dérivée est :

De plus f^{-1} n'est pas dérivable aux points de $J \setminus J'$.

Sa courbe admet une tangente verticale en ces points.

Démonstration. Soit y_0 un point de J, et $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Pour tout élément y de $J - \{y_0\}$, comme f^{-1} est bijective alors $f^{-1}(y) \neq f^{-1}(y_0)$, donc le taux d'accroissement de f^{-1} en y_0 peut s'écrire :

Comme f est dérivable alors f est continue, et donc f^{-1} est continue par théorème. Ainsi $f^{-1}(y)$ tend vers $f^{-1}(y_0) = x_0$ lorsque y tend vers y_0. De plus f est dérivable en x_0. Ainsi :

$$\lim_{y \to y_0} f^{-1}(y) = x_0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Par composition de limites :

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f(f^{-1}(y)) - f(x_0)}{f^{-1}(y) - x_0} = f'(x_0) = f'(f^{-1}(y_0))$$

Si $y_0 \in J'$ alors $f'(f(y_0)) \neq 0$ donc :

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Ainsi f^{-1} est dérivable en y_0, et sa dérivée est celle annoncée.

Supposons maintenant que y_0 n'appartient pas à J', *i.e.*, $f'(f^{-1}(y_0)) = 0$. Alors $f'(x_0) = 0$ et toujours, par continuité de f^{-1} en y_0 :

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

Comme f est strictement monotone alors son taux d'accroissement est de signe constant, donc la fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ tend vers $f'(x_0) = 0$ par valeurs positives ou négatives, et ainsi :

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = +\infty \qquad \text{ou} \qquad \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = -\infty$$

Ceci montre que f^{-1} n'est pas dérivable en y_0 si $y_0 \notin J'$, et sa courbe admet une tangente verticale en ce point. □

Exemple 3. Dérivabilité de l'arc-sinus.

▷ **Exercice 3.**

Remarque. Toutes les fonctions usuelles sont dérivables sauf :

- La fonction racine carrée qui est définie (et continue) sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
- La fonction valeur absolue qui est définie (et continue) sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
- Les fonctions arccos et arcsin qui sont définies (et continues) sur $[-1, 1]$ et dérivables sur $]-1, 1[$.
- La fonction partie entière qui est définie sur $\mathbb{R}$, continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ de dérivée :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \qquad \frac{\mathrm{d}\lfloor x \rfloor}{\mathrm{d}x} =$$

II. Théorèmes

A. Extremum local

Définition. Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

La fonction f présente un maximum local en x_0 si elle présente un maximum sur un voisinage de x_0.

La fonction f présente un minimum local en x_0 si elle présente un minimum sur un voisinage de x_0.

La fonction f présente un extremum local en x_0 si elle présente un maximum ou un minimum local en x_0.

Remarque. Un extremum est aussi appelé extremum global. Un extrema global peut ne pas être local, s'il est au bord de l'ensemble de définition de f.

Théorème. *Soit x_0 un point intérieur à I et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en x_0. Si f présente un extremum local en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.*

Définition. Un point critique de f est un zéro de sa dérivée, c'est-à-dire un point x_0 de I tel que $f'(x_0) = 0$.

Remarques.

(i) La réciproque de ce théorème est fausse : si $f'(x_0) = 0$ alors f ne présente pas forcément d'extremum en x_0. Par exemple $f(x) = x^3$ en $x_0 = 0$.

Le théorème dit que les extrema de f ne peuvent être qu'aux points critiques.

(ii) Le théorème est faux si x_0 n'est pas intérieur à I. Par exemple sin sur $[0, \pi]$.

(iii) Il est également faux si f n'est pas dérivable en x_0. Par exemple $f(x) = |x|$ en $x_0 = 0$.

Démonstration. Supposons par exemple que f présente un maximum local en x_0.
Soit $J = [x_0 - c, x_0 + c]$ un intervalle inclus dans I tel que f présente un maximum en x_0.
Ceci signifie que pour tout point x de J : $f(x) - f(x_0) \leqslant 0$ et donc :

$$\forall x \in [x_0 - c, x_0[\quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in]x_0, x_0 + c] \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0$$

Lorsque x tend vers x_0 ces deux taux d'accroissement tendent vers $f'(x_0)$ car f est dérivable en x_0. Par théorème de comparaison :

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0$$

Ainsi $f'(x_0) \geqslant 0$ et $f'(x_0) \leqslant 0$ donc $f'(x_0) = 0$. □

B. Théorème de Rolle

On note a et b deux réels tels que $a < b$.

Théorème de Rolle. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que :*
- *f est continue sur $[a, b]$*
- *f est dérivable sur $]a, b[$*
- *$f(a) = f(b)$.*

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Remarque. Toutes les hypothèses sont indispensables.

Démonstration.

T. S. V. P.

Exemple 4. Soit f une fonction polynomiale de degré n admettant n racines réelles distinctes. Alors f' admet exactement $n-1$ racines réelles distinctes.

Exemple 5. Si un mobile M parcourant une droite passe deux fois par le même point alors sa vitesse s'annule pendant le trajet.

C. Accroissements finis

Théorème des accroissements finis. *Soit* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction. On suppose que :*

- f *est continue sur* $[a,b]$
- f *est dérivable sur* $]a,b[$.

Alors il existe $c \in]a,b[$ *tel que :* $\quad f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Remarques.

(i) Le théorème de Rolle est un cas particulier du théorème des accroissements finis. Il lui est en fait équivalent.

(ii) Interprétation géométrique :

Démonstration.

Corollaire : Inégalité des accroissements finis, version 1.

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que :

- *f est continue sur $[a, b]$*
- *f est dérivable sur $]a, b[$*
- *Il existe $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall t \in]a, b[\quad m \leqslant f'(t) \leqslant M$*

Alors :

$$m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a)$$

Démonstration.

Corollaire : Inégalité des accroissements finis, version 2.

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que :

- *f est dérivable sur I*
- *$|f'|$ est bornée par un réel M,* i.e., *il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall t \in I \quad |f'(t)| \leqslant M$*

Alors f est lipschitzienne sur I :

$$\forall (x, x') \in I \qquad |f(x) - f(x')| \leqslant M|x - x'|$$

Démonstration de la version 2. Soit x et x' deux éléments de I tels que $x' \leqslant x$.

Si $x = x'$ alors évidemment : $|f(x) - f(x')| \leqslant M|x - x'|$

Supposons que $x' < x$. Alors $[x', x] \subseteq I$ car I est un intervalle. Par restriction f est continue sur $[x', x]$ et dérivable sur $]x', x[$.

De plus, la dérivée de f est encadrée par $-M$ et M.

En conséquence, d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$-M(x - x') \leqslant f(x) - f(x') \leqslant M(x - x')$$

De façon équivalente :

$$|f(x) - f(x')| \leqslant M|x - x'|$$

Si $x \leqslant x'$ on démontre cette inégalité de la même manière.

Celle-ci est donc valable pour tout couple (x, x') d'éléments de I et donc la fonction f est bien M-lipschitzienne sur I. □

Remarque. Le théorème de Rolle, le théorème des accroissements finis et la version 1 de l'inégalité des accroissements finis ne seront plus valables pour les fonctions complexes, alors que la version 2 le sera.

▷ **Exercice 4.**

Exemple 6 : suite récurrente.

a. Démontrer que l'équation $x^3 + x = 1$ admet une unique solution α, et que celle-ci est point fixe de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.

b. Démontrer que la fonction f est k-lipschitzienne avec un certain $k \in [0, 1[$.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_{n+1} = f(u_n)$

c. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant k|u_n - \alpha|$

d. En déduire que la suite (u_n) converge vers α.

D. Croissance des fonctions

Théorème. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors :*

(i) f est croissante si et seulement si f' est positive.

(ii) f est décroissante si et seulement si f' est négative.

(iii) f est constante si et seulement si f' est nulle.

Démonstration. On démontre juste le *(i)*. Le *(ii)* se démontre de la même façon, et le *(iii)* est conséquence de *(i)* et *(ii)*.

Supposons que f est croissante. Alors, pour tout $(x, y) \in I^2$:

$$x < y \quad \Longrightarrow \quad f(x) \leqslant f(y) \qquad \text{et} \qquad x > y \quad \Longrightarrow \quad f(x) \geqslant f(y).$$

Donc $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geqslant 0$. Par théorème de comparation $\lim\limits_{y \to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geqslant 0$, cette limite étant bien défnie car f est dérivable, et ainsi $f'(x) \geqslant 0$.

La fonction f' est positive sur I.

Remarques.

(i) Ce théorème n'est valable que sur un intervalle. Exemples :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array} \qquad\qquad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \arctan x + \arctan \frac{1}{x} \end{array}$$

(ii) On ne peut pas énoncer un tel théorème en remplaçant «croissante» par «strictement croissante» et «positive» par «strictement positive». Exemple : $x \mapsto x^3$.

Corollaire. *Avec les hypothèses du théorème ci-dessus :*

(i) Si f' est strictement positive sauf en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est strictement croissante.

(ii) Si f' est strictement négative sauf en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est strictement décroissante.

<u>Démonstration</u>. Supposons que f' est strictement positive sauf en un nombre fini de points où elle s'annule. Alors f' est positive, donc d'après le théorème f est croissante.

Supposons que f n'est pas strictement croissante. Alors il existe deux éléments x et y de I tels que $x < y$ et $f(x) = f(y)$. Pour tout $z \in [x, y]$, comme $x \leqslant z \leqslant y$ alors $f(x) \leqslant f(z) \leqslant f(y)$ par croissance de f, et donc $f(x) = f(z) = f(y)$. Ainsi :

$$\forall z \in [x, y] \qquad f(z) = f(x)$$

La fonction f est constante sur l'intervalle $[x, y]$. D'après le *(iii)* du théorème, ceci implique que f' est nulle sur cet intervalle. Comme $x < y$ alors l'intervalle $[x, y]$ possède une infinité de points, ce qui contredit l'hypothèse. Donc f' est strictement croissante.

On démontre le *(ii)* de la même façon. □

Corollaire du *(iii)*. *Soit f et g deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I. Si $f' = g'$ alors il existe un réel K tel que $f = g + K$,* i.e.,

$$\forall x \in I \qquad f(x) = g(x) + K$$

<u>Démonstration</u>. On pose $h = f - g$. Par combinaison linéaire h est dérivable et :

$$\forall x \in I \qquad h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

D'après le théorème ci-dessous, comme I est un intervalle alors h est constante, *i.e.,* il existe un réel K tel que :

$$\forall x \in I \qquad h(x) = K$$

Ceci donne $f = g + K$: $\forall x \in I \quad f(x) = g(x) + K$ □

E. Prolongement de la dérivée

Exemple 7.

(i) Dérivabilité de $f(x) = \sqrt{x} - \arctan \sqrt{x}$.

(ii) Dérivabilité de $g(x) = \arcsin e^{-x}$.

Théorème de limite de la dérivée.

Soit I un intervalle, a un point de I, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que :

- *f est continue sur I*
- *f est dérivable sur $I - \{a\}$*
- *f' admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en a.*

Alors la fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet également ℓ pour limite en a.

En particulier :

(i) Si ℓ est fini alors f est dérivable en a, et $f'(a) = \ell$. De plus f' est continue en a.

(ii) Si ℓ n'est pas fini alors f n'est pas dérivable en a.

Remarques.

(i) Ce théorème permet d'assurer la dérivabilité de f en a. Il est souvent préférable de vérifier que la fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie en a, puis éventuellement de vérifier que la dérivée obtenue est continue en a.

(ii) Dans le deuxième cas la courbe représentative de f admet une tangente verticale au point d'abscisse a.

Démonstration.

III. Dérivées successives

Dans toute cette partie n désigne un entier naturel.

A. Définitions

Définition. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.
Si $f' : I \to \mathbb{R}$ est dérivable alors on dit que f est deux fois dérivable et on note $f'' = (f')'$.
La fonction f'' est appelée dérivée seconde de f.
On note également $f^{(0)}$, $f^{(1)}$ et $f^{(2)}$ pour f, f' et f''.
Plus généralement, soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction $(n-1)$ fois dérivable.
On dit que f est n fois dérivable si sa dérivée $(n-1)$-ème est dérivable.
On note $f^{(n)}$ la dérivée de $f^{(n-1)}$ et on l'appelle dérivée n-ème de f.

Notation. La dérivée n-ème de f est notée :

Définition. Une fonction f est de classe $\mathcal{C}^n$ si elle est n fois dérivable et si sa dérivée n-ème est continue.
Elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si elle est n fois dérivable pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
On note

- $\mathcal{C}^n(I)$ ou $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$
- $\mathcal{C}^\infty(I)$ ou $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exemples.

(i) Une fonction est de classe $\mathcal{C}^0$ si et seulement si elle est continue. On convient que toute fonction est 0 fois dérivable.

(ii) Une fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ si et seulement si elle est dérivable et sa dérivée est continue. On dit que f est continument dérivable.

Remarques.

(i) Si une fonction est dérivable alors elle est continue, donc si une fonction est n fois dérivable alors les fonctions $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$ sont dérivables et continues.

(ii) Pour démontrer qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^n$ (avec $n \geqslant 1$) on peut démontrer qu'elle est dérivable et que f' est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$.

(iii) Si une fonction est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ alors elle est de classe $\mathcal{C}^n$, ce qui montre que :

On peut montrer que toutes ces inclusions sont strictes. De plus :

▷ **Exercices 5, 6.**

B. Calculs et propriétés

Exemple 8.

(i) Soit $f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Soit $f(x) = (ax+b)^n$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$.

(iii) La fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et :

(iv) Les fonctions cosinus et sinus sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ et :

▷ **Exercice 7.**

Remarque.

(i) On démontre dans l'exercice ci-dessus que la fonction ln est de classe $\mathcal{C}^\infty$. On en déduit que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, car c'est sa dérivée.

(ii) On pourra déduire des propriétés ci-dessous que toutes les fonctions usuelles sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur ensemble de dérivabilité. Par exemple :

- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$
- Les fonctions arccos, arcsin sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.

Propositions. *Soit f et g de classe $\mathcal{C}^n$. Alors*

(i) $f+g$ est de classe $\mathcal{C}^n$ et $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$.

(ii) Pour tout λ réel λf est de classe $\mathcal{C}^n$ et $(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$.

(iii) fg est de classe $\mathcal{C}^n$.

(iv) Si f et g sont composables alors $f \circ g$ est de classe $\mathcal{C}^n$.

(v) Si f est bijective de classe $\mathcal{C}^n$ alors f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^n$ sur son ensemble de dérivabilité.

Tout ceci, à part les formules, est valable pour $n = \infty$.

<u>Démonstration</u>. On démontre ces propriétés par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

(i) On sait que si deux fonctions sont de classe $\mathcal{C}^0$ (*i.e.,* continues) alors leur somme est continue, donc de classe $\mathcal{C}^0$.

De plus $(f+g)^{(0)} = f + g = f^{(0)} + g^{(0)}$, donc la formule est valide. Ainsi la propriété *(i)* est vraie pour $n = 0$.

Supposons qu'elle est vraie pour un certain entier n, et considérons deux fonctions f est g de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

Alors f' et g' sont de classe $\mathcal{C}^n$.

Par hypothèse de récurrence leur somme est de classe $\mathcal{C}^n$ et $(f'+g')^{(n)} = f'^{(n)} + g'^{(n)}$.

Or on sait que $(f'+g') = (f+g)'$, donc on obtient $(f+g)'^{(n)} = f'^{(n)} + g'^{(n)}$, ce qui donne $(f+g)^{(n+1)} = f^{(n+1)} + g^{(n+1)}$, et l'hérédité est établie.

Par récurrence, la proposition *(i)* est démontrée.

Une fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si et seulement si elle est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si f et g sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ alors elles sont de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $(f+g)$ est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et ainsi $(f+g)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

(ii) Démonstration similaire.

(iii) Cette propriété est donnée par la formule de Leibniz, voir ci-dessous.

(iv)

(v) Cette propriété est connue pour $n = 0$: si f est bijective continue alors sa réciproque est continue.

Supposons qu'elle est vraie pour un entier n. Soit f une fonction bijective de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Alors f est bijective dérivable (car $n+1 \geqslant 1$), donc par théorème sa réciproque f^{-1} est dérivable sur l'ensemble J' des éléments y tels que $f'(f^{-1}(y))$ est non-nul.

On sait également que sur cet ensemble J' :

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

On souhaite démontrer que cette dérivée est de classe $\mathcal{C}^n$.

Comme f est bijective de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ alors elle est bijective de classe $\mathcal{C}^n$. Par hypothèse de récurrence f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^n$.

Toujours comme f est bijective de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ alors f' est de classe $\mathcal{C}^n$.

Par composition, d'après le *(iv)* ci-dessus, $f' \circ f^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^n$.

Par composition avec la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$, la fonction $\frac{1}{f' \circ f^{-1}}$ est de classe $\mathcal{C}^n$.

Ceci montre que $(f^{-1})'$ est de classe $\mathcal{C}^n$, et donc f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

L'hérédité est démontrée, on conclut par récurrence. □

Théorème - Formule de Leibniz. *Soit f, $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions n fois dérivables. Alors la fonction fg est n fois dérivable et :*

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Démonstration. On procède par récurrence sur n.

Il est clair que la fonction produit fg est 0 fois dérivable. De plus :

$$(fg)^{(0)} = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} f^{(k)} g^{(0-k)} = f^{(0)} g^{(0)} = fg$$

Le théorème est donc valide au rang 0.

Supposons qu'il est valide pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$. Soit f et g deux fonctions $n+1$ fois dérivables. Comme le théorème est valide au rang n alors la fonction fg est n fois dérivable et :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Comme f et g sont $n+1$ fois dérivables, alors les fonctions $f^{(k)}$ et $g^{(n-k)}$, pour $k = 0 \ldots n$, sont dérivables (car $k \leqslant n$ et $n-k \leqslant n$). Par produit et somme la fonction $(fg)^{(n)}$ est dérivable et :

On a utilisé la formule de Pascal, valide si on note $\binom{n}{-1} = 0$ et $\binom{n}{n+1} = 0$.

La formule de Leibniz est démontrée au rang $(n+1)$.

Ainsi par récurrence le théorème est démontré pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. □

Exemple 9. Calculer la dérivée 10-ème de la fonction $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \cos x \end{array}$

▷ **Exercice 8.**

IV. Dérivation des fonctions complexes

A. Définition

On note toujours I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définitions. Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction, et t_0 un élément de I. On dit que f est dérivable en t_0 si la fonction

$$t \mapsto \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

admet une limite finie lorsque t tend vers t_0. On note $f'(t_0)$ cette limite, et on l'appelle dérivée de f en t_0.
On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point t_0 de I. La fonction

$$\begin{aligned} f' : I &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto f'(t) \end{aligned}$$

est alors appelée fonction dérivée de f sur I.

Proposition. *Si $f : I \to \mathbb{C}$ est dérivable alors $\bar{f} : I \to \mathbb{C}$ est dérivable et $\left(\bar{f}\right)' = \overline{f'}$.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que $\frac{\bar{f}(t)-\bar{f}(t_0)}{t-t_0} = \overline{\left(\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}\right)}$. ☐

Théorème. *Une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ est dérivable en un point t de I si et seulement si les fonctions $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont dérivables en t. La dérivée de f vérifie alors :*

$$\forall t \in I \qquad f'(t) = (\operatorname{Re} f)'(t) + i(\operatorname{Im} f)'(t)$$

Démonstration. Ceci est conséquence des propriétés de limites des fonctions complexes : Une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ admet $z = x + iy$ pour limite en a si et seulement si $\operatorname{Re} f$ admet x pour limite et $\operatorname{Im} f$ admet y pour limite en a. ☐

Exemple 10. Dérivabilité de $\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto e^{it} \end{aligned}$

Remarque. Une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ peut être représentée par sa trajectoire dans le plan complexe.

Alors $f'(t)$ est l'affixe du vecteur vitesse de f au point d'affixe $f(t)$. Ce vecteur dirige la tangente à la trajectoire en ce point.

Remarque. On étend aux fonctions complexes :

- les dérivées à gauche et à droite
- les opérations de somme, produit et quotient
- la composition : Si $u : I \to \mathbb{R}$ et $f : J \to \mathbb{C}$ sont deux fonctions à variable réelle, dérivables, telles que $u(I) \subseteq J$, alors $f \circ u$ est dérivable, de dérivée $(f \circ u)' = u' \cdot f' \circ u$.
- Les classes $\mathcal{C}^n$ et $\mathcal{C}^\infty$.

B. Théorème

Remarque.

(i) Comme $\mathbb{C}$ n'est pas muni de relation d'ordre, les fonctions complexes ne présentent pas d'extremum.

(ii) Le théorème de Rolle, le théorème des accroissements finis ne sont plus vérifiés.

Exemple 10 (suite).

Théorème : Inégalité des accroissements finis. *Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction. On suppose que :*
- *f est continue sur $[a, b]$,*
- *f est dérivable sur $]a, b[$,*
- *il existe un réel M tel que :* $\quad \forall t \in]a, b[\quad |f'(t)| \leqslant M$

Alors :
$$|f(b) - f(a)| \leqslant M|b - a|$$

Remarque. Par contre, il est faux en général que si $m \leqslant |f'(t)|$ pour tout $t \in]a, b[$, alors $m|b - a| \leqslant |f(b) - f(a)|$.

Démonstration. Le nombre $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est un complexe. Soit r son module et θ un de ses arguments :
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = re^{i\theta}$$
Soit g la fonction définie par :
$$g : \begin{array}{rcl} [a, b] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & f(t)e^{-i\theta} \end{array}$$
Comme f est dérivable sur $]a, b[$ alors par produit g est dérivable sur cet intervalle. Sa dérivée est : $\forall t \in]a, b[\quad g'(t) = f'(t)e^{-i\theta}$

Ceci montre que $|g'(t)| = |f'(t)|$ pour tout $t \in]a, b[$.

On définit les fonctions $x = \operatorname{Re} g$ et $y = \operatorname{Im} g$, si bien que $g(t) = x(t) + iy(t)$ pour tout $t \in]a, b[$. Par théorème, comme g est dérivable alors x et y sont dérivables sur $]a, b[$, et $x' = \operatorname{Re} g'$. Par propriété des complexes :
$$\forall t \in]a, b[\qquad |x'(t)| \leqslant |g'(t)| = |f'(t)|$$
Ceci montre que x' est majorée par M sur $]a, b[$. Finalement, x est une fonction réelle, continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, de valeur absolue majorée par le réel M. Par l'inégalité des accroissements finis dans le cas des fonctions réelles, on obtient :
$$|x(b) - x(a)| \leqslant M|b - a|$$
Or on calcule que :
$$r = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = \frac{x(b) - x(a)}{b - a} + i\frac{y(b) - y(a)}{b - a}$$
Comme r est réel alors
$$\frac{y(b) - y(a)}{b - a} = 0$$
puis
$$\left|\frac{x(b) - x(a)}{b - a}\right| = \left|\frac{g(b) - g(a)}{b - a}\right| = r = \left|\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right|$$
Ceci démontre bien que :
$$|f(b) - f(a)| \leqslant M|b - a| \qquad \square$$

V. Convexité

Dans toute cette partie, on note I un intervalle contenant plus d'un point.

A. Définition

Graphiquement, une fonction est convexe si toute corde de sa courbe représentative est au-dessus de la courbe :

Lemme. *Soit a et b deux réels avec $a \leqslant b$. Alors :*

$$[a, b] = \{ (1 - \lambda)a + \lambda b \mid \lambda \in [0, 1] \}$$

Démonstration. Laissée en exercice.

Intuitivement, un réel c appartient à l'intervalle $[a, b]$ si et seulement si $c - a$ est une portion de $b - a$, donc si et seulement si il existe $\lambda \in [0, 1]$ tel que $c - a = \lambda(b - a)$. □

Définition. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe si :

Exemples. Les fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto |x|$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto e^x$, sont convexes sur $\mathbb{R}$.

La fonction $x \mapsto x^3$ ne l'est pas.

Exercice. Démontrer que la fonction carré est convexe.

Démontrer que la fonction inverse est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

Définition. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est concave si la fonction $-f$ est convexe.

Ainsi une fonction concave est une fonction pour laquelle toute corde est située en-dessous de la courbe représentative.

Exemple. La fonction $x \mapsto \ln x$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$, est concave.

Lemme. *Soit $x_1, \ldots, x_n$ des éléments de I ($n \in \mathbb{N}^*$) et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des scalaires positifs tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Alors $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ appartient à I.*

Démonstration. Soit $a = \text{Min}\,\{x_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$ et $b = \text{Max}\,\{x_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$.

Alors : $\forall i = 1, \ldots, n \qquad a \leqslant x_i \leqslant b$

Donc : $\forall i = 1, \ldots, n \qquad \lambda_i a \leqslant \lambda_i x_i \leqslant \lambda_i b \qquad$ car $\quad 0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1$

Par somme : $$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b$$

Donc $$a \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \leqslant b \qquad \text{car} \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

Or les x_i appartiennent à I, donc a et b appartiennent à I.

Comme I est un intervalle alors $[a, b] \subseteq I$, et donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ appartient à I. □

Proposition - Inégalité de Jensen. *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si pour tout entier n strictement positif, pour tous $x_1 \ldots x_n$ éléments de I, et tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ réels positifs tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$:*

Démonstration. Si $n = 1$, alors $\lambda_1 = 1$, donc $f(\lambda_1 x_1) \leqslant \lambda_1 f(x_1)$.

Si $n = 2$, alors λ_2 appartient à $[0, 1]$ et $\lambda_1 = 1 - \lambda_2$, donc :

$$\begin{aligned} & f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \\ \iff \quad & f((1 - \lambda_2) x_1 + \lambda_2 x_2) \leqslant (1 - \lambda_2) f(x_1) + \lambda_2 f(x_2). \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété pour $n = 1$ est vérifiée par toute fonction, et la propriété pour $n = 2$ est équivalente à définition la convexité.

On souhaite donc démontrer que si f est convexe alors la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 1$. On suppose donc que f est convexe et on démontre ceci par récurrence sur n.

Initialisation. Nous avons déjà justifié que la propriété est vraie pour $n = 1$.

Hérédité. Supposons que la propriété est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x_1 \ldots x_{n+1}$ des éléments de I, $\lambda_1 \ldots \lambda_{n+1}$ des réels positifs tels que $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$.

Soit $\lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1 - \lambda_{n+1}$.

Si $\lambda = 0$, alors $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ et $\lambda_{n+1} = 1$, puis $f\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = f(x_{n+1}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$, donc la propriété est vraie.

Supposons que $\lambda \neq 0$ et posons $y = \frac{\lambda_1}{\lambda} x_1 + \cdots + \frac{\lambda_n}{\lambda} x_n$.

Les $\frac{\lambda_i}{\lambda}$ sont positifs, leur somme est $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda} = 1$, donc y appartient à I d'après le lemme précédent, et par hypothèse de récurrence :

$$f(y) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda} f(x_i)$$

De plus, comme f est convexe alors :

$$f((1-\lambda)x_{n+1}+\lambda y) \leqslant (1-\lambda)f(x_{n+1})+\lambda f(y)$$

Or $\lambda y = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n y_n$ et $(1-\lambda)x_{n+1} = \lambda_{n+1}x_{n+1}$ donc par transivité de la relation d'ordre :

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1}x_{n+1}) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$$

Ceci démontre que la propriété est vraie au rang $n+1$.

Conclusion. Par récurrence la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. □

▷ **Exercice 9.**

B. Croissance des pentes

Lemme des trois pentes. *Soit f une fonction convexe sur I, et x, y, z trois éléments de I.*

Si $x < y < z$ alors :

Démonstration.

Théorème. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors f est convexe si et seulement si pour tout $a \in I$ la fonction* $\begin{array}{rcl} p_a : I \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array}$ *est croissante.*

Démonstration. Supposons que f est convexe. Soit a un élément de I, x et y deux éléments de $I \setminus \{a\}$ tels que $x < y$. Trois cas possibles : $a < x < y$, $x < a < y$, ou $x < y < a$.

Dans le premier cas, la première inégalité du lemme donne $p_a(x) \leqslant p_a(y)$.

Dans le second cas les deux inégalités du lemme donnent :

$$\frac{f(a)-f(x)}{a-x} \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(y)-f(a)}{y-a}$$

donc par transitivité $p_a(x) \leqslant p_a(y)$.

Dans le troisième cas la seconde inégalité du lemme donne $p_a(x) \leqslant p_a(y)$.

Finalement dans tous les cas $p_a(x) \leqslant p_a(y)$, et donc la fonction p_a est croissante.

Supposons maintenant que pour tout $a \in I$ la fonction p_a est croissante.

Soit x et y deux éléments de I, soit λ un élément de $[0, 1]$, et soit $z = (1-\lambda)x + \lambda y$. Démontrons que :

$$f(z) \leqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) \tag{1}$$

Cette inégalité est évidente si $x = y$ (car alors $z = x$), si $\lambda = 0$ (car alors $z = x$) et si $\lambda = 1$ (car alors $z = y$). De plus on peut intervertir x et y quitte à remplacer λ par $1-\lambda$, et donc supposer que $x < y$.

Si $x < y$ et $\lambda \in]0, 1[$ alors $x < z < y$. La fonction p_x est croissante donc :

$$p_x(z) \leqslant p_x(y) \qquad \text{puis} \qquad \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

Comme $\lambda = \frac{z-x}{y-x}$ et $z - x > 0$ alors on en déduit exactement l'inégalité (1).

On a donc démontré que la fonction f est convexe si les fonctions pentes sont toutes croissantes.

Ainsi s'achève la démonstration du théorème. □

▷ **Exercice 10.**

Corollaire. *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est concave si et seulement si pour tout $a \in I$ la fonction p_a est décroissante.*

Démonstration. Il suffit de considérer $g = -f$ et $q_a = -p_a$. □

Proposition. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et a un point intérieur à I.*
Alors f est dérivable à gauche et à droite en a, et $f'_g(a) \leqslant f'_d(a)$.

Démonstration.

Corollaire. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe sur un intervalle ouvert I. Alors f est continue.*

Démonstration. Comme I est un intervalle ouvert alors tout point de I est intérieur à I, et donc f est dérivable à gauche et à droite en tout point de I.

Ceci implique que f est continue à gauche et à droite en tout point de I, et donc f est continue. □

Contre-exemple.

C. Fonctions convexes dérivables

Théorème. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.*
Alors f est convexe si et seulement si sa dérivée est croissante.

Démonstration. Supposons que f est convexe. Soit x et y deux éléments de I tels que $x < y$. Comme f est convexe, alors d'après le lemme de croissance des pentes :

$$\forall t \in]x, y[\qquad \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \leqslant \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \frac{f(t) - f(y)}{t - y}$$

Comme f est dérivable en x alors le premier quotient ci-dessus tend vers $f'(x)$ lorsque t tend vers x. Comme f est dérivable en y alors le troisième quotient ci-dessus tend vers $f'(y)$ lorsque t tend vers y. On en déduit par théorème de comparaison :

$$f'(x) \leqslant \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \qquad \text{et} \qquad \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant f'(y)$$

On obtient par transitivité : $f'(x) \leqslant f'(y)$.

Ceci étant valable pour tout $(x, y) \in I^2$ tel que $x < y$, la fonction f' est croissante sur I.

Supposons maintenant que la fonction dérivée f' est croissante.

Soit x et y deux éléments de I, λ un élément de $[0, 1]$, et $z = (1 - \lambda)x + \lambda y$. On souhaite démontrer que :

$$f(z) \leqslant (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

On peut supposer que $x < z < y$, comme on l'a justifié précédemment.

On calcule $\lambda = \frac{z-x}{y-x}$, donc $(1-\lambda) = \frac{y-z}{y-x}$, puis $(z-x) = \lambda(y-x)$ et $(y-z) = (1-\lambda)(y-x)$.

Comme f est dérivable sur les segments $[x, z]$ et $[z, y]$ alors d'après le théorème des accroissements finis il existe $c_1 \in]x, z[$ et $c_2 \in]z, y[$ tels que :

$$f'(c_1) = \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \qquad \text{et} \qquad f'(c_2) = \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

Comme $c_1 \in]x, z[$ et $c_2 \in]z, y[$ alors $c_1 < c_2$. Or f' est croissante, donc $f'(c_1) \leqslant f'(c_2)$, ce qui donne :

$$\frac{f(z) - f(x)}{\lambda(y - x)} \leqslant \frac{f(y) - f(z)}{(1 - \lambda)(y - x)}$$

Comme $(y - x)$, λ et $(1 - \lambda)$ sont strictement positifs alors :

$$(1 - \lambda)f(z) - (1 - \lambda)f(x) \leqslant \lambda f(y) - \lambda f(z)$$

$$\text{puis} \qquad f(z) \leqslant (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

La fonction f est donc convexe. Le théorème est démontré. □

Corollaire. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable.*

Alors f est convexe si et seulement si sa dérivée seconde est positive.

Démonstration. En effet la fonction f' est croissante sur l'intervalle I si et seulement si sa dérivée f'' est positive. □

Corollaire. *Une fonction dérivable sur I est concave si et seulement si sa dérivée est décroissante.*

Une fonction deux fois dérivable sur I est concave si et seulement si sa dérivée seconde est négative.

Exemple 11. Les fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto e^x$, $x \mapsto \operatorname{ch} x$ sont convexes sur $\mathbb{R}$.

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ et concave sur $\mathbb{R}_-^*$.

La fonction $x \mapsto \ln x$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$, et même sur $\mathbb{R}_+$.

Théorème. *La courbe représentative d'un fonction convexe dérivable est au-dessus de toutes ses tangentes.*

▷ **Exercice 11.**

Remarque. De même, la courbe représentative d'un fonction concave dérivable est en-dessous de toutes ses tangentes.

Exemple. Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $e^x \geqslant x + 1$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\ln x \leqslant x - 1$.

▷ **Exercice 12.**