

Devoir Surveillé n°5

Durée : 3 heures – Calculatrices non autorisées.

- On rappelle qu'une grande attention est portée à la présentation, l'orthographe, la qualité de la rédaction.
- En général les symboles mathématiques ne doivent pas figurer dans une phrase.
- Les objets introduits doivent être présentés correctement.
- Les références au cours doivent être citées, de même que les questions précédentes si elles sont utilisées.
- Il est inutile de recopier l'énoncé.
- Les copies doivent être numérotées, leur nombre total indiqué.
- Les annotations au crayon ne sont pas prises en compte.
- Le barème est indicatif.
- Si un élève est amené à repérer ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il pleurera jusqu'à ce qu'un surveillant vienne le consoler.

Problème 1. Deux suites implicites

(12 points)

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto e^x - x.$$

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'équation $f(x) = n$ admet exactement une solution négative et une positive positive.

On note u_n et v_n ces deux solutions, avec $v_n \leq 0 \leq u_n$.

2. (a) Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.
(b) Déterminer les limites des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
3. (a) Démontrer qu'à partir d'un certain rang : $0 \leq u_n \leq \ln(2n)$.
(b) Justifier que pour tout entier $n \geq 1$: $u_n = \ln(n + u_n)$.

En déduire que $u_n \sim \ln n$.

- (c) Démontrer que $u_n - \ln n \sim \frac{\ln n}{n}$ et en déduire le développement asymptotique :

$$u_n \underset{(+\infty)}{=} \ln n + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

4. (a) Démontrer que $v_n \sim -n$.
(b) Démontrer que $v_n + n \sim e^{-n}$ et que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$v_n \underset{(+\infty)}{=} -n + o\left(\frac{1}{n^k}\right).$$

Problème 2. Sur les fonctions continues périodiques

(13 points)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, non constante et périodique.

Une période de f est un réel strictement positif T tel que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+T) = f(x)$.

Le but de ce problème est de démontrer que f possède une plus petite période.

1. Soit T une période de f .

(a) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe $x' \in [0, T]$ tel que $f(x') = f(x)$.

(b) En déduire que f est bornée.

Dans la suite on note a sa borne inférieure et b sa borne supérieure.

2. Soit A l'ensemble des périodes de f : $A = \{T \in \mathbb{R}_+^* \mid \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+T) = f(x)\}$.

Justifier que A admet une borne inférieure. On note t celle-ci.

3. On suppose que $t = 0$.

(a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe $x_n \in [0, \frac{1}{n}[$ tel que $f(x_n) = a$ et $y_n \in [0, \frac{1}{n}[$ tel que $f(y_n) = b$.

(b) En déduire une contradiction.

4. Soit $H = \{T \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+T) = f(x)\}$, si bien que $A = H \cap \mathbb{R}_+^*$.

Démontrer que H est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

5. On suppose que $t \notin A$.

(a) Justifier qu'il existe $T_1 \in A$ tel que $t < T_1 < 2t$ puis qu'il existe $T_2 \in A$ tel que $t < T_2 < T_1$.

(b) Justifier que $T_1 - T_2 \in H$ et en déduire une contradiction.

6. Justifier que t est la plus petite période de f .

7. *Question à ne pas traiter !*

On définit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démontrer que f est périodique mais n'admet pas de plus petite période.

Problème 3. Théorème de d'Alembert-Gauss

(14 points)

Le but de ce problème est de démontrer le théorème de d'Alembert-Gauss.

Soit $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré p strictement positif : $p \geq 1$.

On définit la fonction $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$

$$z \mapsto |P(z)|.$$

Dans la partie A on démontre que cette fonction admet une borne inférieure, puis que cette borne est atteinte. Dans la partie B on démontre que cette borne est nulle et on conclut.

Partie A.

(9 points)

1. (a) Justifier que $f(\mathbb{C})$ est une partie de $\mathbb{R}$ admettant une borne inférieure.

On note m cette borne inférieure.

- (b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe $z_n \in \mathbb{C}$ tel que $f(z_n) \leq m + \frac{1}{n}$.

2. (a) À l'aide de l'inégalité triangulaire, démontrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$|a_p||z|^p \leq f(z) + \sum_{k=0}^{p-1} |a_k||z|^k.$$

- (b) On note $\tilde{P} = |a_p|X^p - \sum_{k=0}^{p-1} |a_k|X^k$. Démontrer qu'il existe un réel B tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x \geq B \implies \tilde{P}(x) \geq m + 2$$

- (c) En déduire que pour un tel réel B :

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad |z| \geq B \implies f(z) \geq m + 2$$

- (d) Démontrer que la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée.

3. (a) Justifier que la fonction f est continue.

- (b) À l'aide d'un fameux théorème, démontrer qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $f(z_0) = m$.

Partie B.

(5 points)

On suppose que m est strictement positif : $m > 0$.

On définit le polynôme Q par $Q(X) = \frac{P(z_0 + X)}{P(z_0)}$ et on note $Q = \sum_{k \in \mathbb{N}} b_k X^k$.

1. Justifier que $b_p \neq 0$, $b_0 = 1$ et que pour tout $z \in \mathbb{C}$: $|Q(z)| \geq 1$.

2. Soit $j = \min \{k \in \{1, \dots, p\} \mid b_k \neq 0\}$. Justifier que j est bien défini et que $-\frac{1}{b_j}$ admet une racine j -ème dans $\mathbb{C}$, que l'on note c .

3. Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$
 $t \mapsto Q(ct).$

- (a) Démontrer que $g(t) = 1 - t^j + o(t^j)$.

- (b) Démontrer qu'il existe un réel $\eta > 0$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad 0 \leq t \leq \eta \implies |g(t) - (1 - t^j)| \leq \frac{1}{2}t^j.$$

- (c) En déduire qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $|g(t)| < 1$ et conclure.