Lycée Bellevue – Toulouse **Année 2024-2025**
MPSI – Mathématiques

Programme de colles
Semaine 16
du 27 au 31 janvier 2025

Questions de cours

Sauf mention explicite il faut connaître l'énoncé et la démonstration.

1. Lemme : Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Soit (u_n) une suite d'éléments de $[a, b]$. Si $(f(u_n))$ admet une limite ℓ alors $\ell \in f([a, b])$.
2. Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$. Énoncé, démonstration de l'unicité.
3. Dérivée k-ème de X^n.
4. Formule de Taylor : énoncé et écriture pour un polynôme particulier.
5. Un scalaire α est racine d'un polynôme P si et seulement si $X - \alpha$ divise P.

Exercices

Chapitre A7. Suites numériques

I. Généralités
II. Suites classiques
III. Limites
IV. Théorèmes d'existence de limite
V. Suites extraites
VI. Suites complexes
VII. Relations de comparaison

Chapitre B6.

I. Lois de composition internes
II. Groupes
III. Anneaux et corps

Programme prévisionnel de la semaine suivante

Chapitre A8 (Limites et continuité).

Chapitre A7. Suites

I. Généralités

Définition explicite, implicite ou par récurrence. Somme, produit, combinaison linéaire de suites. Suites constantes, croissantes, etc. Suites majorées, minorées, bornées. suites périodiques, stationnaires.

II. Suites classiques

Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométrique, double-récurrentes.

III. Limites

Bornes, propriété de la borne supérieure et inférieure, maximum et minimum d'une partie.

Suites convergentes : définition. Unicité de la limite. Suites divergentes. Toute suite convergente est bornée. Opérations sur les limites. Compatibilité de la limite avec la relation d'ordre. Limites infinies.

IV. Théorèmes d'existence de limite

Théorèmes d'encadrement. Théorème de limite des suites monotones. Suites adjacentes, définition et théorème.

V. Suites extraites

Définition. Si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante alors $\varphi(n) \geqslant n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si (u_n) admet une limite alors toute suite extraite de (u_n) admet la même limite. Si les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite, alors (u_n) converge vers cette limite.

Théorème de Bolzano-Weierstrass. Valeurs d'adhérence : définition, propriété : un réel a est valeur d'adhérence d'une suite (u_n) si et seulement si il existe une suite extraite de (u_n) convergeant vers a.

VI. Suites complexes

Si (u_n) converge vers ℓ alors $(|u_n|)$ converge vers $|\ell|$, et $(\bar{u}_n)$ converge vers $\bar{\ell}$. La suite (u_n) converge vers $\ell = a + ib$ si et seulement si les suites $(\mathrm{Re}(u_n))$ et $(\mathrm{Im}(u_n))$ convergent vers a et b respectivement.

Théorème de Bolzano-Weierstrass pour les suites complexes.

VII. Relations de comparaison

Définitions et propriétés : $u_n = o(v_n)$, $u_n \sim v_n$, $u_n = O(v_n)$. Réécriture des croissances comparées, en ajoutant $e^{\gamma n} = o(n!)$. Equivalents usuels : si (u_n) converge vers 0 alors $\ln(1 + u_n) \sim u_n$, $e^{u_n} - 1 \sim u_n$ et $\sin(u_n) \sim u_n$.

Chapitre B6. Structures algébriques

I. Lois de composition internes

Définition. Commutativité, associativité, distributivité. Élément neutre, inverse et itérés. Sous-ensembles stables et loi induite. Morphismes.

II. Groupes

Définition d'un groupe, d'un groupe commutatif ou abélien. Sous-groupe. Morphisme de groupes, noyau et image, caractérisation de l'injectivité.

III. Anneaux et corps

Définition d'un anneau, d'un anneau commutatif. L'élément nul est absorbant. Anneau intègre (toujours commutatif). Formule du binôme, formule $a^n - b^n$. Groupe des inversibles.

Définition d'un corps (toujours commutatif, $0 \neq 1$). Un corps est intègre.

Sous-anneau (contient 1), morphisme d'anneaux.