Corrigé du Devoir à la Maison n°8

1. (a) On démontre que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée.
Soit n un entier naturel fixé.
Si $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ alors $0 \leqslant \sin t \leqslant 1$, donc :
$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \qquad 0 \leqslant \sin^{n+1} t \leqslant \sin^n t.$$
Par croissance de l'intégrale :
$$0 \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} t \,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \,\mathrm{d}t.$$
Ceci est valable pour tout n donc on a démontré que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n.$$
La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0 et décroissante, donc elle converge d'après le théorème de la limite monotone.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On commence par expliciter I_{n+2} :
$$I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} t \,\mathrm{d}t.$$
On pose $u'(t) = \sin t$ et $v(t) = \sin^{n+1} t$. Alors $u(t) = -\cos t$ et $v'(t) = (n+1)\cos t \sin^n t$.
Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Le théorème d'intégration par parties donne :
$$I_{n+2} = \Big[-\cos t \sin^{n+1} t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)\cos^2 t \sin^n t \,\mathrm{d}t.$$
On calcule :
$$\begin{aligned} I_{n+2} &= 0 + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 t)\sin^n t \,\mathrm{d}t \\ &= (n+1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \,\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} t \,\mathrm{d}t\right) \qquad \text{par linéarité} \\ &= (n+1)(I_n - I_{n+2}) = (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}. \end{aligned}$$
Ceci donne :
$$\boxed{(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n.}$$
C'est le résultat attendu.

(c) En multipliant le résultat de la question précédente par I_{n+1} on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad (n+2)I_{n+1}I_{n+2} = (n+1)I_nI_{n+1}.$$

Ceci montre que la suite $((n+1)I_nI_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante : deux de ses termes consécutifs sont égaux.

On calcule :

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}t = \Big[t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,\mathrm{d}t = \Big[-\cos t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Pour $n = 0$ on obtient $(n+1)I_nI_{n+1} = I_0I_1 = \frac{\pi}{2}$.

On en déduit donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad (n+1)I_nI_{n+1} = \frac{\pi}{2}.}$$

(d) La formule précédente peut s'écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad I_nI_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}. \tag{1}$$

On sait depuis la question 1 que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Notons ℓ sa limite.

Par décalage la suite $(I_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers ℓ.

Par produit la suite $(I_nI_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ^2.

Or la suite $\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Par unicité de la limite, l'égalité (1) montre que $\ell^2 = 0$, et donc $\ell = 0$.

En conclusion la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

2. (a) On sait que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad I_{n+2} \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n.$$

Comme la suite $((n+1)I_nI_{n+1})$ est constante égale à $\frac{\pi}{2}$ alors aucun I_n ne peut être nul.

Mais on sait que les termes I_n sont positifs, ils sont donc strictement positifs.

Par division par I_n on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \frac{I_{n+2}}{I_n} \leqslant \frac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant 1.$$

D'après la question c, comme $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$ alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \frac{n+1}{n+2} \leqslant \frac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant 1.$$

Or $\lim \frac{n+1}{n+2} = 1$, donc par théorème d'encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1.$$

Ceci montre que les suites $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(I_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes.

(b) La formule (1) nous a donné :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}.$$

On en déduit :

$$I_n^2 \sim I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)} \sim \frac{\pi}{2n}.$$

Comme la suite (I_n) est positive alors $\sqrt{I_n^2} = I_n$, donc :

$$\boxed{I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.}$$

On a prouvé que la suite (I_n) converge vers 0, et on en a aussi donné un équivalent.

3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $\mathscr{P}_n$ la proposition : $\quad I_{2n} = \dfrac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \dfrac{\pi}{2}$.

On démontre par récurrence que cette proposition est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation. Pour $n = 0$ on a $I_0 = \frac{\pi}{2} = \frac{0!}{4^0 (0!)^2} \frac{\pi}{2}$, donc la proposition $\mathscr{P}_0$ est vraie.

Hérédité. Supposons que pour un $n \in \mathbb{N}$ la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie.

D'après l'égalité de la question (1b) :

$$I_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} I_{2n}.$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence :

$$I_{2(n+1)} = \frac{2n+1}{2n+2} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{2n+2}{2(n+1)} \frac{2n+1}{2(n+1)} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{\pi}{2}$$

On obtient :

$$I_{2(n+1)} = \frac{(2n+2)!}{4^{n+1}((n+1)!)^2} \frac{\pi}{2}$$

La propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est donc vraie.

L'hérédité est démontrée.

Conclusion. Par récurrence la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Comme $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ alors la relation précédente donne :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \binom{2n}{n} = \frac{2 \times 4^n}{\pi} I_{2n}$$

D'après la question (2) : $\quad I_{2n} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{4n}}$.

On en déduit l'équivalent :

$$\boxed{\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}.}$$

4. (a) Soit $n \geqslant 1$. On calcule :

$$\ln \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ln\left(\frac{(n+1)^{n+1}\sqrt{n+1}}{e^{n+1}(n+1)!} \times \frac{e^n n!}{n^n\sqrt{n}}\right) = \ln\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}\frac{1}{e}\right]$$
$$= \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1$$

On pose $h = \frac{1}{n}$. Alors :

$$\ln \frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{1}{h}+\frac{1}{2}\right)\ln(1+h) - 1$$
$$= \left(\frac{1}{h}+\frac{1}{2}\right)\left(h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4} + \frac{h^5}{5} + o_{h\to 0}(h^5)\right) - 1$$
$$= 1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{3} - \frac{h^3}{4} + \frac{h^4}{5} + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{4} + \frac{h^3}{6} - \frac{h^4}{8} - 1 + o_{h\to 0}(h^4)$$
$$= \frac{h^2}{12} - \frac{h^3}{12} + \frac{3h^4}{40} + o_{h\to 0}(h^4)$$

Ceci donne le développement asymptotique :

$$\boxed{\ln \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{12n^2} - \frac{1}{12n^3} + \frac{3}{40n^4} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^4}\right)}$$

Ensuite :

$$\ln \frac{v_{n+1}}{v_n} = \ln \frac{u_{n+1}e^{\frac{1}{12(n+1)}}}{u_n e^{\frac{1}{12n}}} = \ln \frac{u_{n+1}}{u_n} + \frac{1}{12(n+1)} - \frac{1}{12n}$$

En posant $h = \frac{1}{n}$:

$$\frac{1}{12(n+1)} - \frac{1}{12n} = -\frac{1}{12n(n+1)} = -\frac{h^2}{12(1+h)}$$
$$= -\frac{h^2}{12}\left(1 - h + h^2 + o_{h\to 0}(h^2)\right)$$
$$= -\frac{h^2}{12} + \frac{h^3}{12} - \frac{h^4}{12} + o_{h\to 0}(h^4) = -\frac{1}{12n^2} + \frac{1}{12n^3} - \frac{1}{12n^4} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

Finalement :

$$\boxed{\ln \frac{v_{n+1}}{v_n} = -\frac{1}{120n^4} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^4}\right)}$$

(b) Les développements limités obtenus dans la question précédente montrent que :

$$\ln \frac{u_{n+1}}{u_n} \sim \frac{1}{12n^2} \qquad \text{et} \qquad \ln \frac{v_{n+1}}{v_n} \sim -\frac{1}{120n^4}$$

Ainsi la suite $\left(\ln \frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ et positive à partir d'un certain rang et la suite $\left(\ln \frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$ et négative à partir d'un certain rang.

En conséquence, à partir d'un certain rang : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ et $\frac{v_{n+1}}{v_n} \leqslant 1$.

Comme les suites (u_n) et (v_n) sont strictement positives, alors ceci montre que la suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang et la suite (v_n) est décroissante à partir d'un certain rang.

(c) D'après la question précédente il existe un entier naturel N tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad u_n \leqslant u_{n+1} \quad \text{et} \quad v_{n+1} \leqslant v_n$$

La suite (u_n) est croissante à partir du rang N et la suite (v_n) est décroissante à partir du rang N.

De plus, comme $\frac{1}{12n} > 0$ alors $e^{\frac{1}{12n}} > 1$ et donc $u_n < v_n$. Ceci montre que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad u_N \leqslant u_n < v_n \leqslant v_N$$

Ainsi la suite (u_n) est croissante à partir du rang N et majorée par v_N.

Par théorème de la limite monotone elle est convergente, et par théorème de comparaison sa limite ℓ vérifie $u_N \leqslant \ell \leqslant v_N$.

Comme u_N est strictement positif alors ℓ est strictement positif.

(d) On calcule, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{(u_n)^2}{u_{2n}} = \frac{n^{2n} \times n}{e^{2n}(n!)^2} \times \frac{e^{2n}(2n)!}{(2n)^{2n}\sqrt{2n}} = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}\sqrt{\frac{n}{2}}.$$

D'après la question (3b) :

$$\frac{(u_n)^2}{u_{2n}} \sim \frac{1}{4^n}\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}\sqrt{\frac{n}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

La suite $\left(\frac{(u_n)^2}{u_{2n}}\right)$ converge donc vers $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

D'autre part la suite (u_n) converge vers ℓ, et comme la suite (u_{2n}) en est extraite alors elle converge aussi vers ℓ. Comme $\ell \neq 0$ la suite $\left(\frac{(u_n)^2}{u_{2n}}\right)$ converge vers $\frac{\ell^2}{\ell} = \ell$.

Ceci donne :

$$\ell = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

(e) Comme la suite (u_n) converge vers $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ alors la suite $\left(\sqrt{2\pi}u_n\right)$ converge vers 1, *i.e.*, :

$$\sqrt{2\pi}\frac{n^n\sqrt{n}}{e^n n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

On en déduit l'équivalence :

$$\boxed{n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.}$$