TD. A10
Limites et continuité

Exercices de cours

1 Soit a et ℓ des réels. Interpréter en termes de quantificateurs les égalités suivantes :

$$\lim_{-\infty} f = \ell \qquad \lim_{+\infty} f = -\infty \qquad \lim_{a} f = -\infty$$

2 Soit I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, et a un élément de $\overline{I}$. On suppose que f admet une limite ℓ finie et strictement positive en a.

Alors f est strictement positive au voisinage de a.

a. Exprimer cette conclusion à l'aide des quantificateurs, selon que a soit fini ou non.

b. Démontrer cette proposition.

3 Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor \end{array}$

a. Cette fonction admet-elle une limite en 0 ?

b. Expliciter f sur $\left]\frac{1}{2}, 1\right]$ et sur $]1, +\infty[$.
Est-elle continue en 1 ?

4 Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue.
Démontrer qu'il existe un réel $\alpha \in [0,1]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.

5 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que :

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$$

Démontrer que f est bornée.

6 Soit f une fonction continue et injective sur un intervalle I.

a. Énoncer en termes logiques la proposition : f n'est pas strictement monotone.

Soit a, b, c et d quatre éléments de I tels que $a < b$ et $c < d$, $f(a) \leqslant f(b)$ et $f(c) \geqslant f(d)$. On définit la fonction :

$$g : \begin{array}{rcl} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(ta + (1-t)c) - f(tb + (1-t)d) \end{array}$$

b. Démontrer qu'il existe $\tau \in [0,1]$ tel que $g(\tau) = 0$.

c. En déduire une contradiction et conclure.

7 Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \dfrac{e^{it} - 1}{t} \end{array}$

Démontrer que f est continue et prolongeable par continuité en 0.

Travaux dirigés

1 Les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes sont-elles continues ?

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x+1) & \text{si } x \geqslant 0 \\ \frac{x}{1-x} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{|x(x-1)|}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x^8-1}{x-1} & \text{si } x > 1 \\ 8 & \text{si } x \leqslant 1 \end{cases}$$

2 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes. Déterminer ensuite sur quel ensemble elles sont prolongeables par continuité.

$$f_1(x) = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}} \qquad f_2(x) = \frac{1}{x-3} - \frac{4}{x^2 - 2x - 3}$$

$$f_3(x) = \frac{\ln(4x^2 - 1)}{\ln(2x - 1)} \qquad f_4(x) = \frac{\sqrt{2}\sin x - 1}{\tan x - 1}$$

3 Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x - \lfloor x \rfloor}{x(x+1)} \end{array}$

Cette fonction est-elle bornée ? Continue ?

4 Étudier la continuité de :

$$f : x \to \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$$

5 Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que f et g sont équivalentes en a et que f est strictement positive.

a. Démontrer qu'il existe un voisinage de a sur lequel f et g sont strictement positives.

b. Démontrer que si f est bornée au voisinage de a alors g est bornée au voisinage de a.

c. Soit α un réel. Démontrer que f^α et g^α sont équivalentes au voisinage de a.

d. Démontrer que si f est bornée alors e^f et e^g sont équivalentes en a.

e. Démontrer que si f tend vers $+\infty$ en a alors $\ln f$ et $\ln g$ sont équivalentes en a.

6 Soit z un nombre complexe non-nul de module r et d'argument θ. Démontrer que la limite

$$\ell = \lim_{t \to 0} \frac{r^t e^{i\theta t} - 1}{t}$$

existe et la calculer. Que vaut e^ℓ ?

7 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Soit $a = f(1)$.

a. Déterminer $f(0)$.
b. Calculer $f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
c. Calculer $f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
d. Calculer $f(r)$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$.
e. Démontrer que $f(x) = ax$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

8 On considère la fonction $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin \frac{1}{x} \end{array}$

a. Soit $u_n = \frac{1}{n\pi}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   Donner les limites de (u_n) et de $f(u_n)$.
b. Déterminer une suite (v_n) tendant vers 0 telle que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(v_n) = 1$
c. La fonction f admet-elle une limite en 0 ?

9 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue en 0 telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(2x) = f(x)$$

Démontrer que f est constante.

Indication : étudier les $f(\frac{x}{2^n})$, $n \in \mathbb{N}$.

10 Soit D une partie de $\mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$. Soit K un réel. On dit que f est K-lipschitzienne si :

$$\forall (x,y) \in D^2 \qquad |f(x) - f(y)| \leqslant K|x-y| \qquad :$$

On dit que f est lipschitzienne s'il existe $K \in \mathbb{R}$ telle que f est K-lipschitzienne.

a. Démontrer que si f est lipschitzienne alors f est continue.
b. En considérant la fonction carré démontrer que la réciproque est fausse.
c. Démontrer que si f est dérivable et lipschitzienne alors sa dérivée est bornée.

11 Cet exercice fait suite au précédent.

Une fonction f est dite contractante si elle est K-lipschitzienne pour un réel $K \in [0,1[$.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction contractante.

a. Soit $g = f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.
   Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$f(0) - K|x| - x \leqslant g(x) \leqslant f(0) + K|x| - x$$
   En déduire les limites de g en $\pm\infty$
b. Démontrer que f admet un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe un réel α tel que $f(\alpha) = \alpha$.
c. Démontrer que ce point fixe est unique.
d. Soit (u_n) une suite telle :
   $$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n).$$
   Démonter que cette suite converge vers le point fixe de f.

12 Soit a, b deux réels tels que $a < b$.

a. Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ continue. Démontrer que f possède un point fixe.
b. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue.
   Démontrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que :
   $$5f(c) = 2f(a) + 3f(b)$$

13 Démontrer que :

a. Il existe une infinité de réels x tels que $\tan x = x$.
b. Il existe une infinité de réels x tels que $\cos x = e^x$.

14 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, telle que $f(0) = f(1)$.

a. Démontrer qu'il existe $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ tel que :
   $$f(\alpha + \tfrac{1}{2}) = f(\alpha)$$
b. Démontrer qu'il existe $\beta \in \left[0, \frac{2}{3}\right]$ tel que :
   $$f(\beta + \tfrac{1}{3}) = f(\beta)$$

15 Un randonneur a parcouru 20 km en 5 heures.

a. Démontrer qu'il existe un intervalle d'une heure pendant lequel il a parcouru exactement 4 km.
b. Le randonneur prétend que sur n'importe quel intervalle de deux heures il a parcouru 10 km. Est-ce possible ?

16 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue non constante telle que $f(a) = f(b)$.

Soit y un élément non extremum de $f([a,b])$.

Démontrer que y admet au moins deux antécédents par f.

17 Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions. On suppose que f est bornée et g est continue.

Démontrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bornées.

18 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue et périodique.

a. Démontrer que f est bornée.
b. On suppose que f admet une limite en $+\infty$.
   Que dire de f ?
   Indication : utiliser une suite.

19 Soient f et g deux fonctions continues sur $[0,1]$ telles que $f > g$.

a. Démontrer qu'il existe un réel a strictement positif tel que :
   $$\forall x \in [0,1] \qquad f(x) \geqslant g(x) + a$$
b. Montrer que ce résultat est faux si on remplace $[0,1]$ par $]0,1]$.

20 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

a. Démontrer que si $f(0) < 0$ et f admet une limite strictement positive en $+\infty$ alors il existe $c \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(c) = 0$.

b. Démontrer que si f tend vers $+\infty$ en $\pm\infty$ alors f admet un minimum.

c. Démontrer que si f tend vers 0 en $\pm\infty$ et f prend au moins une valeur strictement positive et une valeur strictement négative alors f est bornée et atteint ses bornes.

21 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad |f(x) - f(y)| \geqslant |x - y|$$

Démontrer que f est bijective.

22 Soit a, b, c, d quatre réels tels que $a < b$ et $c < d$. Soit $f : [a, b] \to [c, d]$ croissante et surjective.

Démontrer que f est continue.

On pourra utiliser la théorème de la limite monotone.