Lycée Bellevue – Toulouse **Année 2025-2026**
MPSI – Mathématiques

Programme de colles
Semaine 14
du 12 au 16 janvier 2026

Questions de cours

Sauf mention explicite il faut connaître l'énoncé et la démonstration.

1. La réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme.
2. Dans un groupe, tout élément est régulier.
3. Définition d'un sous-groupe.
4. Soit $f : (G, *) \to (G', *')$ un morphisme de groupes. Alors $f(e) = e'$ et pour tout $x \in G$: $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$.
5. Un morphisme de groupes est injectif si et seulement si son noyau est réduit à l'élément neutre : sens indirect uniquement.
6. Définition d'un anneau.
7. Un corps est intègre.

Exercices

Chapitre B5. Matrices

I. Définitions
II. Matrices carrées
III. Systèmes linéaires
IV. Inversion des matrices et systèmes de Cramer

Chapitre A8. Développements limités

I. Généralités
II. Calculs de développements limités
III. Développement limité en un point non-nul
IV. Applications

Programme prévisionnel de la semaine suivante

Chapitres A8 (Développements limités) et B6 (Structures algébriques).

Chapitre B5. Matrices

I. Définitions

Définition. Matrice nulle, matrice-ligne, matrice-colonne. Somme, multiplication par un scalaire, combinaisons linéaires, matrices E_{ij}. Produit, transposition.

II. Matrices carrées

Matrices diagonales, triangulaires. Stabilité par les opérations. Matrices symétriques et antisymétriques. Toute matrice carrée s'écrit de façon unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique. Puissances, formule du binôme.

Matrices inversible, notation $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Produit de deux matrices inversibles, inversibilité de la transposée et de l'inverse d'une matrice. La matrices élémentaires sont inversibles.

Opérations et matrices élémentaires. Inversibilité des matrices élémentaires et de leurs produits. Les opérations élémentaires ne changent pas le caractère inversible d'une matrice.

I. Systèmes linéaires

Écriture matricielle d'un système linéaire. Algorithme du pivot de Gauss. Inconnues principales, secondaires.

Systèmes incompatibles et incompatibles, système homogène. Structure de l'ensemble des solutions.

IV. Inversion des matrices et systèmes de Cramer

Système de Cramer : système dont la matrice est inversible. Il admet une et une seule solution.

Calcul de l'inverse d'un matrice, par l'algorithme du pivot de Gauss ou par résolution d'un système linéaire.

Inversibilité et inverse d'une matrice $(2, 2)$. Formules de Cramer pour $n = p = 2$.

Chapitre A8. Développements limités

I. Généralités

Définition d'un DL en 0 à l'ordre n. Lien avec la continuité et la dérivabilité. Troncature, unicité, parité des DL. Forme normalisée.

Développements limités des fonctions usuelles : $\frac{1}{1+x}$, $\ln(1+x)$, e^x, $\cos x$, $\sin x$, $(1+x)^\alpha$, $\arctan x$, et $\tan x$ à l'ordre 3.

II. Calculs de développements limités

Somme, produit, composition, quotient de DL. Primitivation. Formule de Taylor Young, corollaire : une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ admet un DL à tout ordre.

IV. Développements limités en un point quelconque

On pose $h = x - a$, on obtient un DL en a.

V. Applications

Calculs de limites. Tangente et position relative. Asymptotes et position relative. Développement asymptotique. Exemple : formule de Stirling (sans démonstration).