Lycée Bellevue – Toulouse **pour le 9 février 2026**
MPSI – Mathématiques

Devoir à la Maison n°8
Formule de Stirling

Les intégrales de Wallis sont définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, \mathrm{d}t.$$

1. (a) Déterminer les variations de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   En déduire que cette suite est convergente.
   (b) À l'aide d'une intégration par parties démontrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad (n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n. \tag{$\star$}$$
   (c) Démontrer que la suite $((n+1)I_nI_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et donner sa valeur.
   (d) En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. (a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_{n+2} \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$.
   En déduire que les suites $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(I_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes.
   (b) Démontrer que :
   $$I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$
3. (a) En utilisant $(\star)$ démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$I_{2n} = \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\frac{\pi}{2}.$$
   (b) En déduire un équivalent de $\binom{2n}{n}$ lorsque n tend vers $+\infty$, exprimé sans factorielle ni I_n.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose : $u_n = \dfrac{n^n\sqrt{n}}{e^n n!}$.

4. On définit aussi : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n = u_n e^{\frac{1}{12n}}$.
   (a) Donner un développement asymptotique à l'ordre 4 de $\ln \frac{u_{n+1}}{u_n}$ puis de $\ln \frac{v_{n+1}}{v_n}$.
   (b) En déduire qu'à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$ la suite (u_n) est croissante et la suite (v_n) est décroissante.
   (c) Démontrer que pour tout $n \geqslant N$: $u_N \leqslant u_n \leqslant v_N$ et en déduire que la suite (u_n) converge vers un réel strictement positif ℓ.
   (d) Simplifier $\dfrac{(u_n)^2}{u_{2n}}$ et en déduire la valeur de ℓ.
   (e) Démontrer la formule de Stirling :
   $$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$