Corrigé du Devoir à la Maison n°7

Exercice 1.

Comme f est un morphisme d'anneaux de $\mathbb{R}$ dans lui-même, alors :

(MA$_1$) $\quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x+y) = f(x) + f(y)$

(MA$_2$) $\quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(xy) = f(x)f(y)$

(MA$_3$) $\quad f(1) = 1$

1. On démontre pour récurrence : $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) = n$

   Initialisation. La propriété (MA$_1$) donne pour $x = y = 0$: $\quad f(0) = f(0) + f(0)$.

   Comme $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe alors $f(0)$ admet un opposé, que l'on peut ajouter à cette égalité, et donc $f(0) = 0$.

   Hérédité. Supposons que pour un $n \in \mathbb{N}$: $\quad f(n) = n$.

   D'après la propriété (MA$_1$) : $\quad f(n+1) = f(n) + f(1)$

   On a admis que $f(n) = n$, et d'après la propriété (MA$_3$) : $\quad f(1) = 1$.

   Donc $f(n+1) = n+1$, ce qui démontre l'hérédité.

   Conclusion. Par récurrence : $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) = n$
2. Soit $n \in \mathbb{Z}$. On sait déjà que si n est positif alors $f(n) = n$.

   Si n est négatif alors $-n$ est positif, donc $f(-n) = -n$.

   D'après la propriété (MA$_1$) : $\quad f(n-n) = f(n) + f(-n)$

   Comme $f(0) = 0$ alors $f(n) + f(-n) = 0$, ce qui donne $f(n) = -f(-n) = -(-n) = n$.

   On a démontré que pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $\quad f(n) = n$.
3. Soit $r \in \mathbb{Q}$. Alors il existe deux entiers $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $r = \frac{p}{q}$.

   Alors $p = qr$. D'après la propriété (MA$_2$) : $\quad f(p) = f(q)f(r)$

   Comme p et q sont entiers alors $f(p) = p$ et $f(q) = q$, donc $p = qf(r)$.

   Comme q est non-nul alors $f(r) = \frac{p}{q}$, ce qui donne $f(r) = r$.

   On a démontré que pour tout $r \in \mathbb{Q}$: $\quad f(r) = r$.
4. (a) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Alors $\sqrt{x}$ est définie et $x = \sqrt{x}^2$.

   D'après la propriété (MA$_2$) : $\quad f(x) = f(\sqrt{x})^2$.

   Ceci montre que $f(x) \geqslant 0$.

   Soit x et y deux réels tels que $x \leqslant y$. Alors $y - x \geqslant 0$, donc d'après ce qui précède $f(y-x) \geqslant 0$.

   D'après la propriété (MA$_2$) : $\quad f(y-x) = f(y) - f(x)$.

   Donc $f(y) \geqslant f(x)$.

   On a démontré que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si $x \leqslant y$ alors $f(x) \leqslant f(y)$.

   Ainsi f est croissante.

(b) Soit x un réel et $n \in \mathbb{N}^*$. L'intervalle $\left[x - \frac{1}{n}, x\right]$ n'est pas réduit à un point, et $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, donc il existe un rationnel r_n dans cet intervalle.

Ce rationnel vérifie $x - \frac{1}{n} \leqslant r_n \leqslant x$, donc $r_n \leqslant x \leqslant r_n + \frac{1}{n}$.

(c) On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad x - \frac{1}{n} \leqslant r_n \leqslant x.$$

Comme $(x - \frac{1}{n}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$ alors par théorème d'encadrement $r_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$.

On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad r_n \leqslant x \leqslant r_n + \frac{1}{n}.$$

Comme f est croissante alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f(r_n) \leqslant f(x) \leqslant f(r_n + \frac{1}{n}).$$

Comme r_n et $\frac{1}{n}$ sont rationnels alors $f(r_n) = r_n$ et $f(r_n + \frac{1}{n}) = r_n + \frac{1}{n}$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad r_n \leqslant f(x) \leqslant r_n + \frac{1}{n}.$$

Comme $r_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$ alors par somme $(r_n + \frac{1}{n}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$ et par théorème d'encadrement : $f(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$.

Cette suite étant constante : $f(x) = x$.

On a démontré que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x$.

Ceci signifie bien que $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

Finalement on a démontré que le seul endomorphisme d'anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$ est l'identité de $\mathbb{R}$.

5. Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \bar{z}. \end{array}$

Les propriétés de la coonjugaison montrent que :

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \qquad f(z_1 + z_2) = f(z_1) + f(z_2) \qquad \text{et} \qquad f(z_1 z_2) = f(z_1) f(z_2)$$

En effet $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ et $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.

De plus $f(1) = \bar{1} = 1$, donc les propriétés (MA_1), (MA_2) et (MA_3) sont vérifiées.

Ainsi f est un endomorphisme de l'anneau $(\mathbb{C}, +, \times)$, et il est différent de l'identité, par exemple car $f(i) = -i \neq i$. Démontrons que f est le seul autre endomorphisme d'anneau de $\mathbb{C}$.

Soit f un endomorphisme d'anneau de $(\mathbb{C}, +, \times)$.

Sa restriction à $\mathbb{R}$ est alors un morphisme d'anneaux de $(\mathbb{R}, +, \times)$ dans $(\mathbb{C}, +, \times)$, car les propriétés (MA_1), (MA_2) et (MA_3) sont vérifiées lorsqu'on les restreint à $\mathbb{R}$.

Toutes les démonstrations précédentes restent vraies, donc : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x$.

Comme $i^2 = -1$ alors la propriété (MA_2) montre que $f(i)^2 = f(i^2) = f(-1) = -1$.
Ainsi $f(i) = i$ ou $f(i) = -i$.
Soit $z = x + iy$ un complexe. Les propriétés (MA_1) et (MA_2) donnent :

$$f(z) = f(x+iy) = f(x) + f(i)f(y) = x + f(i)y.$$

Ainsi $f(z) = z$ si $f(i) = i$ et $f(z) = \bar{z}$ si $f(i) = -i$.
Donc f est l'identité de $\mathbb{C}$ ou la conjugaison.
Les applications $z \mapsto z$ et $z \mapsto \bar{z}$ étant des endomorphismes de $(\mathbb{C}, +, \times)$, il existe exactement deux endomorphismes d'anneau de $(\mathbb{C}, +, \times)$.

Exercice 2.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente, et soit ℓ sa limite.
Démontrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.
Soit $\varepsilon > 0$. Alors $\frac{\varepsilon}{2} > 0$. Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ alors :

$$\exists N \in \mathbb{N} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \left(n \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad |u_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Soit p et q deux entiers. D'après ce qui précède, si $p \geqslant N$ et $q \geqslant N$ alors :

$$|u_p - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{et} \qquad |u_q - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

D'après l'inégalité triangulaire :

$$|(u_p - \ell) - (u_q - \ell)| \leqslant |u_p - \ell| + |u_q - \ell|$$

On en déduit :

$$|u_p - u_q| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

On a démontré que :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists N \in \mathbb{N} \qquad \forall (p,q) \in \mathbb{N} \qquad (p \geqslant N \quad \text{et} \quad q \geqslant N) \quad \Longrightarrow \quad |u_p - u_q| \leqslant \varepsilon$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une suite de Cauchy.

2. Soit (u_n) une suite de Cauchy. Pour $\varepsilon = 1$, comme $\varepsilon > 0$ alors :

$$\exists N \in \mathbb{N} \qquad \forall (p,q) \in \mathbb{N} \qquad (p \geqslant N \quad \text{et} \quad q \geqslant N) \quad \Longrightarrow \quad |u_p - u_q| \leqslant 1$$

Si $q = N$ alors $q \geqslant N$ donc :

$$\begin{aligned} \forall p \in \mathbb{N} \qquad p \geqslant N \quad &\Longrightarrow \quad |u_p - u_N| \leqslant 1 \\ &\Longrightarrow \quad u_N - 1 \leqslant u_p \leqslant u_N + 1 \end{aligned}$$

Tous les termes u_n de la suite pour $n \geqslant N$ sont dans l'intervalle $[u_N - 1, u_N + 1]$, donc ils forment un ensemble borné.
Les termes pour $0 \leqslant n < N$ sont en nombre fini donc ils forment un ensemble borné également.
L'union de deux ensembles bornés est un ensemble borné, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

3. Soit (u_n) une suite de Cauchy.

   D'après la question précédente la suite (u_n) est bornée donc d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass elle admet une suite extraite convergente.

   Notons $(u_{\varphi(n)})$ une telle suite, c'est-à-dire que $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une fonction strictement croissante.

   Soit ℓ la limite de la suite extraite $(u_{\varphi(n)})$.

   Démontrons que la suite (u_n) converge vers ℓ.

   Soit $\varepsilon > 0$.

   Alors $\frac{\varepsilon}{2} > 0$. Comme la suite (u_n) est une suite de Cauchy alors :

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \qquad \forall (p,q) \in \mathbb{N} \qquad (p \geqslant N_1 \quad \text{et} \quad q \geqslant N_1) \quad \Longrightarrow \quad |u_p - u_q| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

   Soit n un entier supérieur ou égal à N_1. Comme la fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante alors par propriété $\varphi(n) \geqslant n$, et donc $\varphi(n) \geqslant N_1$.
   Comme $n \geqslant N_1$ et $\varphi(n) \geqslant N_1$ alors : $\left|u_n - u_{\varphi(n)}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.
   Comme la suite $(u_{\varphi(n)})$ converge vers ℓ alors par définition de la convergence il existe un entier N_2 tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant N_2 \quad \Longrightarrow \quad \left|u_{\varphi(n)} - \ell\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

   Soit $N_0 = \operatorname{Max}\{N_1, N_2\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant N_0$ alors $n \geqslant N_1$ et $n \geqslant N_2$ donc :

$$\left|u_n - u_{\varphi(n)}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{et} \qquad \left|u_{\varphi(n)} - \ell\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

   Par inégalité triangulaire :

$$\left|(u_n - u_{\varphi(n)}) + (u_{\varphi(n)} - \ell)\right| \leqslant \left|u_n - u_{\varphi(n)}\right| + \left|u_{\varphi(n)} - \ell\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

   Ceci donne : $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$
   Nous avons démontré que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant N_0 \quad \Longrightarrow \quad |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

   Ceci signifie que la suite (u_n) converge vers ℓ.

   Ainsi toute suite de Cauchy est convergente.

4. D'après ce qui précède, pour démontrer que la suite (u_n) converge il suffit de démontrer qu'elle est de Cauchy.

   Soit deux entiers naturels p et q. On suppose que $p \geqslant q$. Par télescopage :

$$u_p - u_q = \sum_{k=q}^{p-1}(u_{k+1} - u_k).$$

   Par inégalité triangulaire :

$$|u_p - u_q| \leqslant \sum_{k=q}^{p-1}|u_{k+1} - u_k|.$$

   Soit a un réel tel que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - u_n| \leqslant a^n$. Alors :

$$|u_p - u_q| \leqslant \sum_{k=q}^{p-1}a^k.$$

   Comme $a \neq 1$ alors :

$$\sum_{k=q}^{p-1}a^k = \frac{a^q - a^p}{1-a} = \frac{a^q(1-a^{p-q})}{1-a}.$$

   Comme $a \in [0,1[$ alors $1 - a > 0$ et $a^{p-q} \geqslant 0$, donc :

$$|u_p - u_q| \leqslant \frac{a^q}{1-a}$$

   Soit $\varepsilon > 0$. Alors $(1-a)\varepsilon > 0$, car $a < 1$. Comme $a \in [0,1[$ alors la suite $(a^q)_{q\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall q \in \mathbb{N} \qquad q \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad |a^q| \leqslant (1-a)\varepsilon.$$

   Ceci montre que :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2 \qquad p \geqslant q \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad |u_p - u_q| \leqslant \varepsilon.$$

   Comme $|u_p - u_q| = |u_q - u_p|$ alors en intervertissant p et q on obtient :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2 \qquad q \geqslant p \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad |u_p - u_q| \leqslant \varepsilon.$$

   On a démontré que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier N tel que :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2 \qquad (p \geqslant N \quad \text{et} \quad q \geqslant N) \quad \Longrightarrow \quad |u_p - u_q| \leqslant \varepsilon.$$

   La suite (u_n) est donc de Cauchy, et ainsi elle converge.