Corrigé du Devoir Surveillé n°4

Exercice 1. *(8 points)*

1. (a) *(1 point)* On calcule :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & m & m^2 \\ \frac{1}{m} & 2 & m \\ \frac{1}{m^2} & \frac{1}{m} & 2 \end{pmatrix} = 2I_3 + M.$$

(b) *(1 point)* La relation de la question précedente s'écrit $\frac{1}{2}(M^2 - M) = I_3$, donc :

$$M\left(\tfrac{1}{2}M - I_3\right) = \left(\tfrac{1}{2}M - I_3\right)M = I_3$$

Ceci montre que M est inversible, d'inverse $M^{-1} = \frac{1}{2}(M - I_3)$.

2. (a) *(1 point)* On obtient :

$$M + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & m & m^2 \\ \frac{1}{m} & 1 & m \\ \frac{1}{m^2} & \frac{1}{m} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{m} \\ \frac{1}{m^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & m & m^2 \end{pmatrix}$$

L'égalité $M + I_3 = UV$ a lieu avec $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{m} \\ \frac{1}{m^2} \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 & m & m^2 \end{pmatrix}$.

(b) *(2 points)* On calcule $VU = (3)$, donc par associativité, pour tout entier $k \geqslant 1$:

$$(M + I_3)^k = (UV)^k = U(VU)^{k-1}V = U\left(3^{k-1}\right)V = 3^{k-1}UV = 3^{k-1}(M + I_3).$$

Cette formule n'est pas valable pour $k = 0$ car $(M + I_3)^0 = I_3$, elle donnerrait $I_3 = \frac{1}{3}(M + I_3)$, ce qui est faux.

3. (a) *(1 point)* On utilise la formule du binôme :

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} - b^n = (a+b)^n - b^n.$$

(b) *(2 points)* Les matrices $M + I_3$ et I_3 commutent donc d'après la formule du binôme pour les matrices :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad M^n = (M + I_3 - I_3)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (M + I_3)^k (-I_3)^{n-k}$$

On calcule alors :

$$M^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (M + I_3)^k = (-1)^n I_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (M + I_3)^k$$

La formule de la question (2b) donne :

$$\begin{aligned}M^n &= (-1)^n I_3 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}3^{k-1}(M+I_3)\\ &= (-1)^n I_3 + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}3^{k}\right)(M+I_3)\end{aligned}$$

La formule de la question (3a) donne :

$$M^n = (-1)^n I_3 + \frac{1}{3}(2^n - (-1)^n)(M+I_3)$$

Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad M^n = \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} I_3 + \frac{2^n - (-1)^n}{3} M}$$

Exercice 2. *(9 points)*

1. (a) *(2 points)* Comme f est solution de l'équation (E) alors $f''f = f'^2 + 1$, donc :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad f''(t)f(t) = f'(t)^2 + 1$$

Comme $f'(t)$ est réel alors $f'(t)^2 + 1$ est strictement positif. Ainsi $f''(t)f(t)$ est strictement positif, et donc $f(t)$ ne peut être nul.

Ceci étant valable pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction f ne s'annule par sur $\mathbb{R}$.

Comme $f(t)$ n'est nul pour aucun t alors par division :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad f''(t) = \frac{f'(t)^2 + 1}{f(t)}$$

Comme la fonction f est deux fois dérivable alors f et f' sont dérivables, donc par produit, somme et quotient f'' est dérivable.

(b) *(2 points)* Comme f ne s'annule pas alors la fonction $\frac{f''}{f}$ est bien définie.

Comme f'' et f sont dérivables alors par quotient la fonction $\frac{f''}{f}$ est dérivable.

Sa dérivée est : $\left(\dfrac{f''}{f}\right)' = \dfrac{f'''f - f''f'}{f^2}$

Comme la fonction f vérifie l'équation (E) alors $f''f = f'^2 + 1$, ce qui donne par dérivation $f'''f + f''f' = 2f''f'$ puis $f'''f - f''f' = 0$.

Ceci montre que $\left(\frac{f''}{f}\right)'$ est nulle.

Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle ceci implique que la fonction $\frac{f''}{f}$ est constante.

(c) *(1 point)* Soit c la valeur de $\frac{f''}{f}$. Alors : $\quad \forall t \in \mathbb{R} \quad f''(t) = cf(t)$.

Comme f vérifie l'équation (E) alors : $\quad \forall t \in \mathbb{R} \quad cf(t)^2 = f'(t)^2 + 1$.

Comme $f'(t)^2 + 1$ et $f(t)^2$ sont strictement positifs alors c est strictement positif.

(d) *(1 point)* Nous venons de voir que $f'' = cf$, ce qui signifie que f est solution de l'équation différentielle $y'' - cy = 0$.

L'équation caractéristique associée à cette équation différentielle linéaire du second ordre est $\lambda^2 - c = 0$. Ses solutions sont $\pm\sqrt{c}$ car c est positif, elles sont distinctes car c n'est pas nul, donc par propriété les solutions de l'équation $y'' - cy = 0$ sont les fonctions :

$$y : t \mapsto \alpha e^{\sqrt{c}\,t} + \beta e^{-\sqrt{c}\,t} \qquad \text{avec} \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

2. *(2 points)* D'après ce qui précède, si f est solution de l'équation (E) alors il existe deux réels α et β tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad f(t) = \alpha e^{\sqrt{c}\,t} + \beta e^{-\sqrt{c}\,t}$$

Par dérivation ceci donne, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$f'(t) = \alpha\sqrt{c}e^{\sqrt{c}\,t} - \beta\sqrt{c}e^{-\sqrt{c}\,t} \qquad \text{et} \qquad f''(t) = \alpha c e^{\sqrt{c}\,t} + \beta c e^{-\sqrt{c}\,t}$$

Si f vérifie les conditions initiales $f(0) = a$ et $f'(0) = 0$ alors $\alpha + \beta = a$ et $\alpha - \beta = 0$, donc $\alpha = \beta = \frac{a}{2}$:

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad f(t) = \frac{a}{2}\left(e^{\sqrt{c}\,t} + e^{-\sqrt{c}\,t}\right) = a\,\mathrm{ch}(\sqrt{c}\,t).$$

Passons à la synthèse.
Soit $c \in \mathbb{R}_+^*$ et f la fonction $t \mapsto a\,\mathrm{ch}(\sqrt{c}\,t)$.
Alors f est deux fois dérivable, ses deux premières dérivées vérifient :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad f'(t) = a\sqrt{c}\,\mathrm{sh}(\sqrt{c}\,t) \qquad \text{et} \qquad f''(t) = ac\,\mathrm{ch}(\sqrt{c}\,t).$$

Elle vérifie l'équation (E) si et seulement si $f''f = f'^2 + 1$, soit :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad ca^2\,\mathrm{ch}^2(\sqrt{c}\,t) = a^2 c\,\mathrm{sh}^2(\sqrt{c}\,t) + 1$$

Ceci équivaut à $a^2 c = 1$, donc $c = \frac{1}{a^2}$, puis $\sqrt{c} = \frac{1}{a}$.
L'équation (E) munie de ses conditions initiales admet donc une et une seule solution, la fonction f définie par :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \qquad f(t) = a\,\mathrm{ch}\left(\tfrac{t}{a}\right).}$$

$$f(t) = \frac{K}{2}e^{\frac{t}{K}} + \frac{K}{2}e^{-\frac{t}{K}} = K\,\mathrm{ch}\left(\tfrac{t}{K}\right)$$

Exercice 3. *(9 points)*

1. *(2 points)* On suppose que $(p-1)! \equiv -1 \ [p]$.

   Cette congruence signifie que p divise $(p-1)!+1$.

   Soit d un diviseur de p différent de p. Alors $1 \leqslant d \leqslant p-1$, donc d divise $(p-1)!$.

   Comme d divise p et p divise $(p-1)!+1$ alors par transitivité d divise $(p-1)!+1$.

   Ainsi d divise $(p-1)!$ et $(p-1)!+1$, donc il divise 1.

   Finalement $d=1$, et donc les seuls diviseurs de p sont p et 1, ce qui montre que p est premier.

2. (a) *(1 point)* Par définition a est inversible modulo n si et seulement si il existe $b \in \mathbb{Z}$ tel que $ab \equiv 1 \ [n]$, donc si et seulement si il existe deux entiers b et k tels que $ab = 1+kn$.

   Cette égalité s'écrit $au+nv=1$ avec $u=b$ et $v=-k$, donc a est inversible si et seulement si il existe deux entiers u et v tels que $au+nv=1$, ce qui d'après le théorème de Bézout équivaut au fait que a et n sont premiers entre eux.

   Finalement a est inversible modulo n si et seulement s'il est premier avec n.

   (b) *(1 point)* Comme b est un inverse de a modulo n alors $ab \equiv 1 \ [n]$.

   Soit c un autre inverse de a. Alors $ac \equiv 1 \ [n]$.

   Par soustraction $a(c-b) \equiv 0 \ [n]$, donc n divise $a(c-b)$.

   Comme n est premier avec a, car a est inversible modulo n, alors d'après le lemme de Gauss n divise $c-b$. Ceci montre qu'il existe un entier k tel que $c-b=kn$, et donc $c=b+kn$.

   Réciproquement, si $c=b+kn$ avec k entier alors $ac = ab+akn \equiv 1 \ [n]$, donc c est un inverse de a modulo n.

   L'ensemble des inverses de a modulo n est donc l'ensemble des entiers $c+kn$ où $k \in \mathbb{Z}$.

   (c) *(2 points)* Soit k et c le quotient et le reste de la division euclidienne de b par n. Cette division existe bien car n est supposé non-nul. Alors :

   $$b = kn + c \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant c < n$$

   D'après la question précédente, comme $c = b-kn$ alors c est un inverse de b.

   De plus c ne peut être nul, sinon b serait multiple de n, donc ab serait multiple de n, ce qui est faux car $ab \equiv 1 \ [n]$.

   Ainsi $0 < c < n$, donc il existe bien un inverse de a modulo n strictement compris entre 0 et n.

   Démontrons l'unicité de cet inverse. Soit c' un autre inverse de a modulo n tel que $0 < c' < n$. D'après la question précédente il existe un entier ℓ tel que $c' = b+\ell n$. On a alors $b = -\ell n + c'$ avec $0 < c' < n$, ce qui implique $0 \leqslant c' < n$.

   Ainsi c' est le reste de la division euclidienne de b par n. Par unicité de la division euclidienne cet entier est unique, donc a admet un unique inverse c modulo n tel que $0 < c < n$.

3. (a) *(1 point)* Comme p est premier alors il est premier avec tout entier non multiple de p, donc avec tout élément de $[\![1, p-1]\!]$.

   D'après la question précédente, tout élément de $[\![1, p-1]\!]$ est inversible modulo p, et admet un et un seul inverse dans $[\![1, p-1]\!]$.

   (b) *(1 point)* Par équivalence :

$$a = \tilde{a} \quad \Longleftrightarrow \quad a^2 \equiv 1 \ [p] \quad \Longleftrightarrow \quad p \mid a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$$

   Comme p est premier alors d'après le lemme d'Euclide :

$$\begin{aligned} p \mid (a-1)(a+1) \quad &\Longleftrightarrow \quad p \mid (a-1) \quad \text{ou} \quad p \mid (a+1) \\ &\Longleftrightarrow \quad a \equiv 1 \ [p] \quad \text{ou} \quad a \equiv -1 \ [p] \end{aligned}$$

   Le seul entier a de $[\![1, p-1]\!]$ tel que $a \equiv -1 \ [p]$ est $a = p-1$, donc les deux seuls éléments a de $[\![1, p-1]\!]$ tels que $a = \tilde{a}$ sont 1 et $p-1$.

   (c) *(1 point)* D'après ce qui précède, chaque entier a de l'ensemble $[\![2, p-2]\!]$ admet un et un seul inverse $\tilde{a}$ modulo p dans l'ensemble $[\![2, p-2]\!]$, et cet inverse est différent de a.

   Ainsi pour chaque facteur de $\prod_{k=2}^{p-2} k$, son inverse modulo p est aussi dans le produit. On peut donc les regrouper deux par deux, et comme $a\tilde{a} \equiv 1 \ [p]$ alors

$$\prod_{k=2}^{p-2} k \equiv 1 \ [p] \,.$$

   Ceci donne :

$$(p-1)! = 1 \times \left(\prod_{k=2}^{p-2} k \right) \times (p-1) \equiv 1 \times 1 \times (p-1) \equiv -1 \ [p]$$

   Le sens direct du théorème est démontré : si p est premier alors $(p-1)! \equiv -1 \ [p]$.

Problème. L'inégalité de Poincaré *(18 points)*

Partie A. Résultats préliminaires *(6 points)*

1. (a) *(2 points)* Comme la fonction f est continue sur l'intervalle $[a, b]$ alors la fonction F est bien définie, et d'après le théorème fondamental de l'analyse elle est une primitive de f.

   En conséquence elle est dérivable de dérivée $F' = f$.

   Par hypothèse cette dérivée est positive, donc F est croissante.

   (b) *(1 point)* Par hypothèse $F(b) = 0$. Or $F(a) = 0$, et F est croissante. Ceci montre que F est nulle sur $[a, b]$. En effet, par croissance de F :

$$\forall x \in [a,b] \qquad a \leqslant x \leqslant b \implies F(a) \leqslant F(x) \leqslant F(b) \implies 0 \leqslant F(x) \leqslant 0 \implies F(x) = 0.$$

   La fonction F est nulle, donc sa drivée est nulle, et ainsi $f = 0$.

2. (a) *(1 point)* La fonction sinus ne s'annule pas sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ donc la fonction cotangente est bien définie sur cet ensemble.

   De plus les fonctions cosinus et sinus sont de clases $\mathscr{C}^1$ sur cet ensemble donc par quotient la fonction cotangente est de classe $\mathscr{C}^1$, et sa dérivée est :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z} \qquad \cot' x = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$$

   On obtient deux expressions :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z} \qquad \cot' x = -\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x.$$

   (b) *(2 points)* Par développement limité, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$:

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \underset{(0)}{=} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}$$

   On calcule :

$$\cot x \underset{(0)}{=} \frac{1}{x}\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)} \underset{(0)}{=} \frac{1}{x}\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\left(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)$$

$$\underset{(0)}{=} \frac{1}{x}\left(1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)$$

   On aboutit donc au développement asymptotique :

$$\cot x \underset{(0)}{=} \frac{1}{x} - \frac{x}{3} + o(x).$$

   Pour le développement asymptotique en π on peut poser $h = x - \pi$, mais on peut aussi remarquer que la fonction contangente est π-périodique :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z} \qquad \cot(x + \pi) = \frac{\cos(x + \pi)}{\sin(x + \pi)} = \frac{-\cos x}{-\sin x} = \cot x.$$

   On en déduit :

$$\cot(x) = \cos(x - \pi) \underset{(x \to \pi)}{=} \frac{1}{x - \pi} - \frac{x - \pi}{3} + o(x - \pi)$$

Partie B. *(12 points)*

1. (a) *(1 point)* La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ en 0 et en 1 donc d'après la formule de Taylor Young elle admet en 0 et en 1 les développements limités suivant :

$$f(x) \underset{(0)}{=} f(0) + f'(0)x + o(x) \qquad \text{et} \qquad f(x) \underset{(1)}{=} f(1) + f'(1)(x-1) + o(x-1).$$

Comme $f(0) = f(1) = 0$ alors :

$$f(x) \underset{(0)}{=} f'(0)x + o(x) \qquad \text{et} \qquad f(x) \underset{(1)}{=} f'(1)(x-1) + o(x-1).$$

(b) *(2 points)* Les développements limités des deux questions précédentes montrent que :

$$f(t)\cot(\pi t) \underset{(0)}{=} (f'(0)t + o(t))\left(\frac{1}{\pi t} - \frac{\pi t}{3} + o(t)\right) \underset{(0)}{=} \frac{f'(0)}{\pi} + o(1)$$

Le développement limité de $t \mapsto \cot(\pi t)$ en $t = 1$ est :

$$\cot(\pi t) \underset{(1)}{=} \frac{1}{\pi t - \pi} - \frac{\pi t x - \pi}{3} + o(\pi t - \pi) \underset{(1)}{=} \frac{1}{\pi}\frac{1}{t-1} - \frac{\pi}{3}(t-1) + o(t-1)$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} f(t)\cot(\pi t) &\underset{(1)}{=} (f'(1)(t-1) + o(t-1))\left(\frac{1}{\pi}\frac{1}{t-1} - \frac{\pi}{3}(t-1) + o(t-1)\right) \\ &\underset{(1)}{=} \frac{f'(1)}{\pi} + o(1) \end{aligned}$$

La fonction g admet donc en 0 et en 1 les développements limités à l'ordre 0 suivants :

$$g(t) \underset{(0)}{=} \frac{f'(0)}{\pi} + o(1) \qquad \text{et} \qquad g(t) \underset{(1)}{=} \frac{f'(1)}{\pi} + o(1)$$

Ceci montre qu'elle admet une limite finie en 0 et une limite finie en 1, donc elle est prolongeable par continuite en 0 et en 1, en posant :

$$g(0) = \frac{f'(0)}{\pi} \qquad \text{et} \qquad g(1) = \frac{f'(1)}{\pi}$$

(c) *(1 point)* La fonction f' est définie et continue sur $[0,1]$ car f est de classe $\mathscr{C}^1$, la fonction g est continue sur $[0,1]$ d'après la question précédente, donc par somme et produit les fonctions $t \mapsto f'(t)g(t)$ et $t \mapsto (f'(t) - \pi g(t))^2$ sont continues.

Ainsi les intégrales I et J sont bien définies.

2. *(2 points)* Par définition de la fonction g :

$$\forall t \in]0,1[\qquad f'(t)g(t) = f'(t)f(t)\cot(\pi t)$$

On définit :

$$\forall t \in]0,1[\qquad u(t) = f^2(t) \qquad \text{et} \qquad v(t) = \cot(\pi t)$$

Ces fonctions sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1[$, de dérivée :

$$\forall t \in]0,1[\qquad u'(t) = 2f'(t)f(t) \qquad \text{et} \qquad v'(t) = -\pi\big(1+\cot^2(\pi t)\big)$$

De plus les fonctions uv, $u'v$, et uv' s'écrivent pour tout $t \in]0,1[$:

$$\forall t \in]0,1[\qquad \begin{aligned} (uv)(t) &= f^2(t)\cot(\pi t) &&= f(t)g(t) \\ (u'v)(t) &= 2f'(t)f(t)\cot(\pi t) &&= 2f'(t)g(t) \\ (uv')(t) &= -\pi\big(f^2(t)+f^2(t)\cot^2(\pi t)\big) &&= -\pi\big(f^2(t)+g^2(t)\big) \end{aligned}$$

Comme les fonctions f, f', g sont continues en 0 et en 1 alors les fonctions uv, $u'v$ et uv' sont prolongeables par continuité en 0 et en 1.

On peut donc appliquer le théorème d'intégration par parties généralisé :

$$\begin{aligned} 2I = \int_0^1 2f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \Big[u(t)v(t)\Big]_0^1 - \int_0^1 u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \Big[f(t)g(t)\Big]_0^1 + \pi\int_0^1 \big(f^2(t)+g^2(t)\big)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Comme $f(0) = f(1) = 0$ alors on en déduit :

$$2I = \pi\int_0^1 \big(f^2(t)+g^2(t)\big)\,\mathrm{d}t.$$

3. (a) *(1 point)* La fonction $t \mapsto (f'(t) - \pi g(t))^2$ est positive sur $[0,1]$ donc par croissance de l'intégrale J est positive.

   Par linéarité de l'intégrale on obtient :

$$J = \int_0^1 (f'(t)-\pi g(t))^2\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f'^2(t)\,\mathrm{d}t - 2\pi\int_0^1 f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t + \pi^2\int_0^1 g^2(t)\,\mathrm{d}t$$

   (b) *(2 points)* On reconnait la définition de I :

$$J = \int_0^1 f'^2(t)\,\mathrm{d}t - 2\pi I + \pi^2\int_0^1 g^2(t)\,\mathrm{d}t$$

   L'égalité de la question (2) donne :

$$J = \int_0^1 f'^2(t)\,\mathrm{d}t - \pi^2\int_0^1 \big(f^2(t)+g^2(t)\big)\,\mathrm{d}t + \pi^2\int_0^1 g^2(t)\,\mathrm{d}t$$

Par linéarité de l'intégrale :

$$J = \int_0^1 f'^2(t)\,\mathrm{d}t - \pi^2 \int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t$$

Comme J est positive on en déduit l'inégalité de Poincaré :

$$\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{\pi^2}\int_0^1 f'^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

4. (a) *(2 points)* On pose, pour tout $t \in]0,1[$: $\quad a(t) = \pi\cot(\pi t)$

Ainsi :

$$\forall t \in]0,1[\qquad a(t) = \frac{\pi\cos(\pi t)}{\sin(\pi t)}.$$

On remarque que pour tout $t \in]0,1[$ on a $\pi t \in]0,\pi[$ donc $\sin(\pi t) > 0$. On peut donc définir la fonction A par :

$$\forall t \in]0,1[\qquad A(t) = \ln(\sin(\pi t)).$$

La fonction A est dérivable de dérivée a, donc c'est une primitive de a.

Comme $]0,1[$ est un intervalle alors par théorème les solutions de l'équation

$$y' - a(t)y = 0$$

sont les fonctions $t \mapsto \lambda e^{A(t)} = \lambda\sin(\pi t)$ où λ est une constante réelle, c'est-à-dire les fonctions

$$\begin{array}{rcl} f :]0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \lambda\sin(\pi t) \end{array} \qquad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

(b) *(1 point)* Soit f une fonction vérifiant les hypothèses de l'inégalité de Poincaré, et telle que celle-ci soit une inégalité.

D'après la question (3b) l'inégalité de Poincaré est une inégalité si et seulement si $J = 0$.

Or la fonction $t \mapsto (f'(t) - \pi g(t))^2$ est continue et positive sur $[0,1]$.

D'après le théorème de positivité, comme $J = 0$ alors :

$$\forall t \in [0,1] \qquad (f'(t) - \pi g(t))^2 = 0$$

Ceci donne $f'(t) - \pi g(t) = 0$, donc :

$$\forall t \in [0,1] \qquad f'(t) - \pi\cot(\pi t) f(t) = 0$$

Ainsi la fonction f est solution de l'équation différentielle de la question précédente, et donc f est de la forme $t \mapsto \lambda\sin(\pi t)$.

Les fonctions pour lesquelles l'inégalité de Poincaré est une égalité sont donc les fonctions :

$$\begin{array}{rcl} f :]0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \lambda\sin(\pi t) \end{array} \qquad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$