**Lycée Bellevue – Toulouse** **16 janvier 2026**
**MPSI – Mathématiques**

# Devoir Surveillé n°4

Durée : 3 heures – Calculatrices non autorisées.

- *On rappelle qu'une grande attention est portée à la présentation, l'orthographe, la qualité de la rédaction.*
- *En général les symboles mathématiques ne doivent pas figurer dans une phrase.*
- *Les objets introduits doivent être présentés correctement.*
- *Les références au cours doivent être citées, de même que les questions précédentes si elles sont utilisées.*
- *Il est inutile de recopier l'énoncé.*
- *Les copies doivent être numérotées, leur nombre total indiqué.*
- *Les annotations au crayon ne sont pas prises en compte.*
- *Le barème est indicatif.*
- *Si un élève est amené à repérer ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

**Exercice 1.** *(8 points)*

Soit $m$ un scalaire non-nul et $M = \begin{pmatrix} 0 & m & m^2 \\ \frac{1}{m} & 0 & m \\ \frac{1}{m^2} & \frac{1}{m} & 0 \end{pmatrix}$.

1. (a) Exprimer $M^2$ en fonction de $I_3$ et $M$.
   (b) En déduire que $M$ est inversible et donner sa matrice inverse.
2. (a) Déterminer une matrice colonne $U$ et une matrice-ligne $V$ telles que $M + I_3 = UV$.
   (b) En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, une formule pour $(M + I_3)^k$.
   Cette formule est-elle valable pour $k = 0$ ?
3. (a) Calculer, pour tous scalaires $a$ et $b$ et tout entier naturel $n$ : $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.
   (b) En remarquant que $M = M + I_3 - I_3$, calculer $M^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
   On se contentera d'une expression comme combinaison linéaire de $I_3$ et $M$.

**Exercice 2.** *(8 points)*

On souhaite résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle non linéaire :

$$(E) \qquad y''y = y'^2 + 1$$

1. Soit $f$ une solution de l'équation $(E)$, c'est-à-dire une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ deux fois dérivable vérifiant cette équation.
   (a) Justifier que $f$ est trois fois dérivable, *i.e.*, que $f''$ est dérivable.
   (b) Démontrer que la fonction $\frac{f''}{f}$ est constante. On note $c$ sa valeur.
   (c) Démontrer que $c$ est strictement positif.
   (d) En déduire que $f$ est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre, et résoudre cette équation.
2. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.
   Démontrer qu'il existe une et une seule solution de $(E)$ vérifiant $f(0) = a$ et $f'(0) = 0$.
   Exprimer celle-ci simplement.

**Exercice 3. Théorème de Wilson** *(9 points)*

On souhaite démontrer le théorème suivant.

**Théorème**

Soit $p$ un entier strictement supérieur à 1.
Alors $p$ est premier si et seulement si : $(p-1)! \equiv -1 \ [p]$

1. Démontrer le sens indirect : si $(p-1)! \equiv -1 \ [p]$ alors $p$ est premier.
2. Soit $a$ et $n$ deux entiers avec $n \geqslant 1$.
   (a) Démontrer que $a$ est inversible modulo $n$ si et seulement s'il est premier avec $n$.
   On suppose que $a$ est inversible modulo $n$. Soit $b$ un inverse de $a$ modulo $n$.
   (b) Donner en fonction de $b$ et $n$ la liste de tous les inverses de $a$ modulo $n$.
   (c) Démontrer qu'il existe un et un seul inverse $c$ de $a$ modulo $n$ tel que $0 < c < n$.
   On pourra utiliser la division euclidienne de $b$ par $n$.
3. Dans le but de démontrer le sens direct du théorème on fixe un nombre premier $p$.
   On note $[\![1, p-1]\!] = [1, p-1] \cap \mathbb{Z} = \{1, 2, \dots, p-1\}$.
   (a) Justifier que tout élément $a$ de $[\![1, p-1]\!]$ admet un et un seul inverse modulo $p$ dans $[\![1, p-1]\!]$. On note $\tilde{a}$ cet inverse.
   (b) Quels éléments $a$ de $[\![1, p-1]\!]$ vérifient $a = \tilde{a}$ ?
   (c) Démontrer que $\displaystyle\prod_{k=2}^{p-2} k \equiv 1 \ [p]$ et conclure.

**Problème. L'inégalité de Poincaré** *(18 points)*

**Partie A. Résultats préliminaires** *(6 points)*

1. Dans cette question on démontre le *théorème de positivité.*
   Soit $f$ une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$.
   On suppose que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
   (a) Justifier que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est bien définie et déterminer ses variations.
   (b) En déduire que $f = 0$.
2. La fonction *cotangente* est définie sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ par $\cot = \frac{\cos}{\sin}$.
   (a) Justifier que la fonction cotangente est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ et donner deux expressions de sa dérivée.
   (b) Donner un développement asymptotique à deux termes significatifs de la fonction cotangente en 0 puis en $\pi$.

**Partie B.** *(12 points)*

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant $f(0) = f(1) = 0$.
Le but de cette partie est de démontrer l'*inégalité de Poincaré* :

$$\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{\pi^2}\int_0^1 f'^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. (a) Donner les développements limités de $f$ en 0 et en 1 à l'ordre 1.
   (b) Démontrer que la fonction $g : t \mapsto f(t)\cot(\pi t)$ est prolongeable par continuité en 0 et en 1. On notera encore $g$ la fonction prolongée.
   (c) Justifier que les intégrales

$$I = \int_0^1 f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad J = \int_0^1 (f'(t) - \pi g(t))^2\,\mathrm{d}t$$

   sont bien définies.
2. On admet le théorème d'intégration par parties généralisé :
   *Soit $u$ et $v$ sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle $]a, b[$. On suppose que les fonctions $uv$, $u'v$ et $uv'$ sont prolongeables par continuité en $a$ et en $b$. Alors :*

$$\int_a^b u'v = \Big[uv\Big]_a^b - \int_a^b uv'$$

   Démontrer que $2I = \pi\displaystyle\int_0^1 \big(f^2(t) + g^2(t)\big)\,\mathrm{d}t$.
3. (a) Justifier que $J \geqslant 0$ puis développer cette intégrale.
   (b) En déduire l'inégalité de Poincaré.
4. (a) Résoudre sur $]0, 1[$ l'équation différentielle :

$$y' - \pi\cot(\pi t)y = 0.$$

   (b) En déduire les fonctions pour lesquelles l'inégalité de Poincaré est une égalité.