Corrigé du Devoir à la Maison n°6

Exercice 1.

1. La vitesse de croissance du rayon de l'univers est constante égale à V. Cette vitesse est la dérivée de X, donc : $\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad X'(t) = V$

   Comme t est élément de $\mathbb{R}_+$ qui est un intervalle, par intégration on en déduit que $X(t) = Vt + C$ où C est une constante. D'après l'énoncé $X(0) = X_0 = Vt_0$, donc :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+ \qquad X(t) = V(t + t_0)}$$

2. À un instant t la vitesse du traîneau du père Noël est la somme de sa vitesse propre, égale à v, et de celle donnée par l'écartement de l'univers, que l'on note $w(t)$.

   La vitesse du père Noël est la dérivée de x puisque x est sa position, donc :

$$x'(t) = v + w(t)$$

   Si $x(t) = 0$ alors $w(t) = 0$ et si $x(t) = X(t)$ alors $w(t) = V$, et comme l'univers grandit de manière homogène alors la vitesse $w(t)$ est proportionnelle à la position $x(t)$. On en déduit :

$$w(t) = \frac{x(t)}{X(t)}V$$

   Ceci donne :

$$\boxed{x'(t) = v + \frac{x(t)}{X(t)}V}$$

3. D'après les deux questions précédentes la fonction x est solution de l'équation différentielle suivante :

$$y' - \frac{1}{t + t_0}y = v \tag{1}$$

   L'équation homogène associée à cette équation est :

$$y' - a(t)y = 0 \tag{2}$$

   où a est la fonction définie par :

$$a : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{1}{t+t_0} \end{array}$$

   Soit A la fonction définie par :

$$A : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \ln(t + t_0) \end{array}$$

Alors A est une primitive de a. De plus l'ensemble $\mathbb{R}_+$ est un intervalle, donc par théorème les solutions de l'équation homogène (2) sont les fonctions y_0 définies par :

$$\begin{array}{rccl} y_0 : & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \lambda e^{A(t)} = \lambda(t+t_0) \end{array}$$

où λ est une constante réelle.

On cherche maintenant une solution particulière de l'équation (1). On utilise pour cela la méthode de variation de la constante. Soit λ une fonction dérivable de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, et soit y_1 la fonction définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \qquad y_1(t) = \lambda(t).(t+t_0)$$

Alors y_1 est dérivable et :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \qquad y_1'(t) = \lambda'(t).(t+t_0) + \lambda(t)$$

Ainsi y_1 est solution de l'équation (1) si et seulement si :

$$\lambda'(t).(t+t_0) + \lambda(t) - \frac{1}{t+t_0}\lambda(t).(t+t_0) = v$$

Cette condition équivaut à :

$$\lambda'(t) = \frac{v}{t+t_0}$$

On pose $\lambda(t) = v\ln(t+t_0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. La fonction λ est dérivable et vérifie $\lambda'(t) = \frac{v}{t+t_0}$. La fonction y_1 s'écrit maintenant :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \qquad y_1(t) = v(t+t_0)\ln(t+t_0)$$

Par propriété les solutions de l'équation (1) sont les fonctions $y = y_0 + y_1$, *i.e.*, les fonctions définies par

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+ \qquad y(t) = (t+t_0)\left[\lambda + v\ln(t+t_0)\right]}$$

où λ est une constante.

4. D'après la question précédente il existe un réel λ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \qquad x(t) = (t+t_0)\left[\lambda + v\ln(t+t_0)\right]$$

À l'instant $t = 0$ le père Noël est au centre de l'univers. Ceci donne la condition initiale $x(0) = 0$, de laquelle on déduit :

$$\lambda = -v\ln t_0$$

On calcule ensuite :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \qquad x(t) = (t+t_0)\left[v\ln(t+t_0) - v\ln t_0\right] = v(t+t_0)\ln\left(1+\frac{t}{t_0}\right)$$

La distance du père Noël au centre de l'univers à l'instant t est donc donnée par la formule :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+ \qquad x(t) = v(t+t_0)\ln\left(1+\frac{t}{t_0}\right)}$$

5. Le père Noël réussira à sortir de l'univers si et seulement s'il existe un instant t tel que :

$$x(t) \geqslant X(t)$$

Ceci équivaut à la condition :

$$\ln\left(1+\frac{t}{t_0}\right) \geqslant \frac{V}{v}$$

Or la limite de $\ln\left(1+\frac{t}{t_0}\right)$ lorsque t tend vers l'infini est $+\infty$, donc cette quantité dépasse la quantité $\frac{V}{v}$ pour un t assez grand.
Plus précisément, l'instant t_1 où le père Noël sort de l'univers est l'instant t_1 tel que :

$$x(t_1) = X(t_1)$$

Ceci équivaut à l'égalité $1+\frac{t_1}{t_0} = e^{\frac{V}{v}}$ et donc :

$$\boxed{t_1 = t_0\left(e^{\frac{V}{v}}-1\right)}$$

Exercice 2.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $\mathscr{P}_n$ la propriété :

$$\exists (a_n, b_n) \in \mathbb{Z}^2 \qquad (1+i2\sqrt{2})^n = a_n + ib_n\sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad a_n - b_n \not\equiv 0 \ [3]$$

On démontre par récurrence que cette propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Initialisation. Posons $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$.
Alors $(1+i2\sqrt{2})^0 = 1 = a_0 + i\sqrt{2}b_0$ et $a_0 - b_0 = 1 \not\equiv 0 \ [3]$.
La propriété $\mathscr{P}_0$ est donc valide.
Hérédité. Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie. Alors il existe deux entiers a_n et b_n tels que :

$$(1+i2\sqrt{2})^n = a_n + ib_n\sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad a_n - b_n \not\equiv 0 \ [3]$$

On calcule alors $(1+i2\sqrt{2})^{n+1}$:

$$\begin{aligned}(1+i2\sqrt{2})^{n+1} &= (1+i2\sqrt{2})^n(1+i2\sqrt{2}) = (a_n + i\sqrt{2}b_n)(1+i2\sqrt{2}) \\ &= (a_n - 4b_n) + i\sqrt{2}(2a_n + b_n)\end{aligned}$$

Posons $a_{n+1} = a_n - 4b_n$ et $b_{n+1} = 2a_n + b_n$. Comme a_n et b_n sont entiers alors a_{n+1} et b_{n+1} sont entiers.
De plus $a_{n+1} - b_{n+1} = -a_n - 5b_n$, et comme $-5 \equiv 1 \ [3]$ alors :

$$a_{n+1} - b_{n+1} = -a_n - 5b_n \equiv -a_n + b_n \equiv -(a_n - b_n) \ [3]$$

Par hypothèse de récurrence $a_n - b_n \not\equiv 0 \ [3]$, donc $a_{n+1} - b_{n+1} \not\equiv 0 \ [3]$.
On a démontré que la propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie si la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie.
Conclusion. Par récurrence la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Comme $\alpha = \arccos \frac{1}{3}$ alors $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, et :

$$\sin\alpha = \sin\arccos\tfrac{1}{3} = \sqrt{1-\left(\tfrac{1}{3}\right)^2} = \tfrac{2\sqrt{2}}{3}$$

On en déduit :

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha = \tfrac{1}{3} + i\tfrac{2\sqrt{2}}{3}$$

3. On raisonne par l'absurde en supposant que $\frac{\alpha}{\pi}$ est rationnel, donc qu'il existe deux entiers p et q, avec q strictement positif, tels que $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{p}{q}$.

Alors :

$$\left(e^{i\alpha}\right)^q = e^{i\pi p} = \left(e^{i\pi}\right)^p = (-1)^p$$

D'autre part d'après la question précédente :

$$\left(e^{i\alpha}\right)^q = \left(\tfrac{1}{3} + i\tfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)^q = \frac{(1+i2\sqrt{2})^q}{3^q}$$

D'après la première question de cet exercice il existe deux entiers a_q et b_q tels que $(1+i2\sqrt{2})^q = a_q + i\sqrt{2}b_q$, et ainsi :

$$a_q + i\sqrt{2}b_q = (-1)^p 3^q$$

Par identification des parties réelles et imaginaires $a_q = (-1)^p 3^q$ et $b_q = 0$.

Alors $a_q - b_q = (-1)^p 3^q$. Comme $q \geqslant 1$ alors $a_q - b_q$ est multiple de 3 et donc $a_q - b_q$ est multiple de 3, ce qui contredit la propriété de la première question, selon laquelle $a_q - b_q$ n'est pas congru à 0 modulo 3.

Cette contradiction montre que $\frac{\alpha}{\pi}$ est irrationnel : $\frac{\alpha}{\pi} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 3.

1. On calcule :

$$\begin{aligned} M^2 &= \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+ad & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+ad \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} bc-ad & 0 \\ 0 & bc-ad \end{pmatrix} \\ &= (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (bc-ad)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (a+d)M - (ad-bc)I_2. \end{aligned}$$

Ainsi $M = \alpha M + \beta I_2$ avec $\alpha = a+d$ et $\beta = -(ad-bc) = -\det M$.

2. (a) Comme le discriminant de l'équation (C) est non-nul alors λ_1 et λ_2 sont distincts et $\lambda_1 - \lambda_2$ est non-nul. On pose :

$$M_1 = \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}(M - \lambda_2 I_2) \qquad \text{et} \qquad M_2 = \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}(\lambda_1 I_2 - M)$$

On vérifie que les égalités demandées sont bien respectées :

$$M_1 + M_2 = \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}(\lambda_1 I_2 - \lambda_2 I_2) = I_2$$

$$\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 = \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}(\lambda_1 M - \lambda_2 M) = M.$$

(b) Méthode 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $\mathscr{P}_n$ la propriété : $M^n = \lambda_1^n M_1 + \lambda_2^n M_2$.
On démontre par récurrence que cette propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Initialisation. D'après la question précédente la propriété $\mathscr{P}_0$ est valide (et la propriété $\mathscr{P}_1$ aussi).
Hérédité. Supposons que la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie, pour un certain $n \in \mathbb{N}$.
En multipliant à droite par M elle donne :

$$M^{n+1} = \lambda_1^n M_1 M + \lambda_2^n M_2 M.$$

Par définition de M_1 :

$$M_1 M = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(M - \lambda_2 I_2)M = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(M^2 - \lambda_2 M)$$

On sait que $M^2 = \alpha M + \beta I_2$. De plus λ_1 et λ_2 sont les solutions de l'équation (C), donc $\lambda_1 + \lambda_2 = \alpha$ et $\lambda_1 \lambda_2 = -\beta$. Ceci donne :

$$\begin{aligned} M_1 M &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(\alpha M + \beta I_2 - \lambda_2 M) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(\lambda_1 M - \lambda_1 \lambda_2 I_2) \\ &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\lambda_1(M - \lambda_2 I_2) = \lambda_1 M_1 \end{aligned}$$

De même on montre que $M_2 M = \lambda_2 M_2$. On obtient donc :

$$M^{n+1} = \lambda_1^{n+1} M_1 + \lambda_2^{n+1} M_2$$

Ceci montre que la propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie, et l'hérédité est démontrée.
Conclusion. Par récurrence la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Méthode 2. On sait que $M = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$. Par définition de M_1 et M_2 :

$$\begin{aligned} \lambda_1 M_1 \times \lambda_2 M_2 = \lambda_1 \lambda_2 M_1 M_2 &= \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}(M - \lambda_2 I_2)(\lambda_1 I_2 - M) \\ &= -\frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}(M^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)M + \lambda_1 \lambda_2 I_2) \end{aligned}$$

On sait que $M^2 = \alpha M + \beta I_2$. De plus λ_1 et λ_2 sont les solutions de l'équation (C), donc $\lambda_1 + \lambda_2 = \alpha$ et $\lambda_1 \lambda_2 = -\beta$. Ceci donne :

$$\lambda_1 M_1 \times \lambda_2 M_2 = -\frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}(M^2 - \alpha M - \beta I_2) = 0_2.$$

On démontre de même que $\lambda_2 M_2 \times \lambda_1 M_1 = 0_2$, donc les matrices $\lambda_1 M_1$ et $\lambda_2 M_2$ commutent, et on peut appliquer la formule du binôme. Elle donne :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad M^n = (\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\lambda_1 M_1)^k (\lambda_2 M_2)^{n-k}$$

Si $k > 0$ et $k < n$ alors $(\lambda_1 M_1)^k (\lambda_2 M_2)^{n-k} = 0_2$, car $\lambda_1 M_2 \times \lambda_2 M_2 = 0_2$.

Il ne reste dans la somme que les termes pour $k = 0$ et $k = n$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad M^n = (\lambda_1 M_1)^n + (\lambda_2 M_2)^n.$$

Ceci donne :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad M^n = \lambda_1^n M_1^n + \lambda_2^n M_2^n.$$

En utilisant la définition de M_1 :

$$\begin{aligned} M_1^2 &= \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}(M - \lambda_2 I_2)^2 \\ &= \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}(M^2 - 2\lambda_2 M + \lambda_2^2 I_2) \\ &= \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}((\lambda_1 + \lambda_2)M - \lambda_1\lambda_2 I_2 - 2\lambda_2 M + \lambda_2^2 I_2) \\ &= \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}((\lambda_1 - \lambda_2)M - \lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2) I_2) = \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)}(M - \lambda_2 I_2) = M_1 \end{aligned}$$

Par récurrence immédiate on en déduit : $\forall n \in \mathbb{N} \quad M_1^n = M_1$.
De même on démontre : $\forall n \in \mathbb{N} \quad M_2^n = M_2$.
Et ainsi finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad M^n = \lambda_1^n M_1 + \lambda_2^n M_2.$$

3. Comme le discriminant de (C) est nul et λ_0 est la solution de cette équation alors $\alpha = 2\lambda_0$ et $\beta = -\lambda_0^2$.
La matrice M vérifie donc $M^2 = 2\lambda_0 M - \lambda_0^2 I_2$.
On pose $M_0 = M - \lambda_0 I_2$.
Alors $M_0^2 = M^2 - 2\lambda_0 M + \lambda_0^2 I_2 = 0_2$.
On démontre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $M^n = \lambda_0^n I_2 + \lambda_0^{n-1} n M_0$.
Méthode 1. On note $\mathscr{P}_n$ cette propriété et on la démontre par récurrence.
Initialisation. Par définition de M_0 la propriété $\mathscr{P}_1$ est vraie : $M = \lambda_0 I_2 + M_0$.
Hérédité. Supposons que la propriété est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. En la multipliant à droite par M on obtient :

$$M^{n+1} = \lambda_0^n M + \lambda_0^{n-1} n M_0 M.$$

Or $M = \lambda_0 I_2 + M_0$ et $M_0^2 = 0_2$ donc :

$$M_0 M = M_0(\lambda_0 I_2 + M_0) = \lambda_0 M_0.$$

Ceci donne :

$$M^{n+1} = \lambda_0^n M + \lambda_0^{n-1} n(\lambda_0 M_0) = \lambda_0^n(\lambda_0 I_2 + M_0) + \lambda_0^n n M_0 = \lambda_0^{n+1} I_2 + \lambda_0^n (n+1) M_0.$$

La propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie, et l'hérédité est démontrée.
Conclusion. Par récurrence sur n la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
On peut ajouter qu'elle est vraie aussi si $n = 0$ dans le cas où λ_0 est non-nul.

Méthode 2. Par définition de M_0 : $M = \lambda_0 I_2 + M_0$.

Les matrices $\lambda_0 I_2$ et M commutent, donc la formule du binôme donne :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad M^n = (\lambda_0 I_2 + M_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\lambda_0 I_2)^{n-k} M_0^k$$

On sait que $M_0^2 = 0_2$, donc pour tout $k \geqslant 2$: $M_0^k = 0_2$.

Il ne reste que les termes pour $k = 0$ et $k = 1$ dans la somme :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad M^n = (\lambda_0 I_2)^n + n(\lambda_0 I_2)^{n-1} M_0 = \lambda^n I_2 + \lambda_0^{n-1} n M_0$$

La formule est démontrée.

4. Soit $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. D'après la question (1) : $M^2 = 7M - 10I_2$.

L'équation (C) est donc : $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$.

Son discriminant est non-nul, ses solutions sont $\lambda_1 = 5$ et $\lambda_2 = 2$.

Comme dans la question (2) on pose :

$$M_1 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(M - \lambda_2 I_2) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$
$$M_2 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(\lambda_1 I_2 - M) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

D'après le résultat de la question (2) :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad M^n = \lambda_1^n M_1 + \lambda_2^n M_2 = \frac{1}{3}\left(5^n \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + 2^n \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

Donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad M^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5^n + 2 \times 2^n & 5^n - 2^n \\ 2 \times 5^n - 2 \times 2^n & 2 \times 5^n + 2^n \end{pmatrix}.}$$

Soit $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$. D'après la question (1) : $M^2 = 8M - 16I_2$.

L'équation (C) est donc : $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$.

Son discriminant est nul, son unique solution est $\lambda_0 = 4$.

Comme dans la question (3) on pose :

$$M_0 = M - \lambda_0 I_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'après le résultat de la question (3) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad M^n = \lambda_0^n I_2 + \lambda_0^{n-1} n M_0 = 4^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 4^{n-1} n \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On vérifie que cette formule est vraie aussi pour $n = 0$, donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad M^n = 4^{n-1}\begin{pmatrix} 4 - n & n \\ -n & 4 + n \end{pmatrix}.}$$