Lycée Bellevue – Toulouse **pour le 26 janvier 2026**
MPSI – Mathématiques

Devoir à la Maison n°7

Exercice 1.

Soit f un endomorphisme d'anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$.

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad f(n) = n$.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $\quad f(n) = n$.
3. Démontrer que pour tout $r \in \mathbb{Q}$: $\quad f(r) = r$.
4. (a) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $x \geqslant 0$ alors $f(x) \geqslant 0$.
   En déduire que f est croissante.
   (b) Soit x un réel. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe un rationnel r_n tel que $r_n \leqslant x \leqslant r_n + \frac{1}{n}$.
   (c) Démontrer que $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.
5. Donner un exemple d'endomorphisme d'anneau de $(\mathbb{C}, +, \times)$ différent de $\mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$.
   On pourra même démontrer qu'il existe exactement deux endomorphismes d'anneau de $(\mathbb{C}, +, \times)$.

Exercice 2.

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une *suite de Cauchy* si :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists N \in \mathbb{N} \qquad \forall (p,q) \in \mathbb{N} \qquad (p \geqslant N \quad \text{et} \quad q \geqslant N) \quad \Longrightarrow \quad |u_p - u_q| \leqslant \varepsilon$$

1. Démontrer que toute suite convergente est de Cauchy.
2. Démontrer que toute suite de Cauchy est bornée.
3. Démontrer que toute suite de Cauchy est convergente.

Ainsi les suites de Cauchy sont les suites de Cauchy. Mais cette nouvelle définition a pour avantage de ne pas utiliser la limite de la suite.

4. Application.
   Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.
   On suppose qu'il existe un réel $a \in [0, 1[$ tel que : $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - u_n| \leqslant a^n$.
   Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.