Devoir à la Maison n°7

Suites double-récurrentes linéaires

On désigne par $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites complexes indexées par $\mathbb{N}$.
Soit a, b et c trois éléments de $\mathbb{C}$, avec a et c non-nuls. On définit l'ensemble :

$$E = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \forall n \in \mathbb{N} \quad au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0 \right\}$$

On définit ensuite l'équation du second degré

$$(C) \qquad a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

et on note Δ son discriminant.
Si Δ est non-nul on note λ_1 et λ_2 les deux solutions de l'équation (C), sinon on note λ_0 son unique solution.
On pose ensuite :

$$F = \begin{cases} \left\{ \left(\alpha(\lambda_1)^n + \beta(\lambda_2)^n\right)_{n\in\mathbb{N}} \;\middle|\; (\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2 \right\} & \text{si } \Delta \neq 0 \\ \left\{ \left((\alpha n + \beta)(\lambda_0)^n\right)_{n\in\mathbb{N}} \;\middle|\; (\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2 \right\} & \text{si } \Delta = 0 \end{cases}$$

On souhaite démontrer le résultat suivant, figurant dans le cours : $E = F$

1. Démontrer que $F \subseteq E$. Il faudra bien sûr séparer les deux cas.

On note dorénavant $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de E, c'est-à-dire une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $U_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

2. Déterminer une matrice A telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} = AU_n$.
3. Exprimer U_n pour $n \in \mathbb{N}$ en fonction de A, n et U_0.
4. Dans cette question on suppose que Δ est non-nul.
   (a) Exprimer A en fonction de λ_1 et λ_2. Déterminer deux matrices colonnes non-nulles C_1 et C_2 telles que $AC_i = \lambda_i C_i$ pour $i = 1, 2$.
   On note P la matrice $(C_1\ C_2)$.
   (b) Justifier que P est inversible et donner sa matrice inverse.
   (c) Calculer $D = P^{-1}AP$.
   (d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer A^n en fonction de P, D et n.
   (e) Calculer $P^{-1}U_0$ puis $D^nP^{-1}U_0$ en fonction de u_0, u_1, λ_1, λ_2 et n.
   En déduire une expression de (u_n) pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (f) Conclure.

5. Dans cette question on suppose que Δ est nul.
   (a) Exprimer A en fonction de λ_0 puis déterminer deux matrices colonnes non-nulles C_0 et C_0' telles que $AC_0 = \lambda_0 C_0$ et $AC_0' = \lambda_0 C_0' + C_0$.

   On note P la matrice $(C_0\ C_0')$.

   (b) (c) Reproduire les questions 4 (b) et 4 (c).

   (d) Calculer D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. *On pourra utiliser la formule du binôme.*

   (e) (f) En procédant comme dans les questions 4 (e) et 4 (f) donner une expression de (u_n) et conclure.