Feuille de T. D. A7
Suites

Exercices de cours

1 Étudier les variations des suites définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{n^2-3}{n+1} \quad v_n = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} \quad w_n = \frac{n^n}{n!}$$

2 Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 2 - \frac{1}{2}u_n$$

a. Déterminer le terme général de (u_n)

b. Démontrer que la suite (u_n) converge et donner sa limite.

c. Calculer la somme de ses 10 premiers termes.

3 Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+2} = 4u_{n+1} + 5u_n$$

4 **Suite de Fibonacci**
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = u_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

a. Déterminer le terme général de cette suite.
On note φ est φ' les deux racines de son équation caractéristique, φ étant la plus grande.

b. Calculer la limite de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

5 Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et s un réel. Écrire en termes logiques la proposition : s n'est pas la borne supérieure de A.

6 Soit A une partie non-vide de $\mathbb{R}_+^*$. Démontrer que A admet une borne inférieure, et que celle-ci est positive ou nulle.

7 Soit A et B deux parties de $\mathbb{R}$ telles que A est non-vide et incluse dans B. Démontrer que si B est minorée alors A est minorée et $\text{Inf}\, B \leqslant \text{Inf}\, A$.

8 La suite $(u_n) = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet-elle des bornes ? Des extrema ?

9 Démontrer que la suite u définie par $u_n = e^{-n}$ est convergente.

10 Démontrer les propriétés suivantes :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$.
Si $\ell > 0$ alors (u_n) est strictement positive à partir d'un certain rang.
Si $\ell < 0$ alors u_n est strictement négative à partir d'un certain rang.

11 Les suites suivantes convergent-elles ?

$$u_n = \sqrt{n^2 - 4n + 5} - n$$

$$v_n = \frac{3^n - 4^n}{3^n + 4^n} \qquad w_n = (2n)^{\frac{1}{\ln n}}$$

12 Étudier la convergence des suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \frac{\left\lfloor \frac{n}{4} + \frac{4}{n} \right\rfloor}{\left\lfloor \frac{n}{7} + \frac{7}{n} \right\rfloor} \qquad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lfloor k\pi \rfloor}{n^2}$$

13 Démontrer que $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

14 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = 1 + \frac{u_n^2}{4}$$

a. Démontrer que (u_n) est majorée et croissante.

b. Démontrer que (u_n) et convergente et donner sa limite.

c. On suppose maintenant que $u_0 = 3$. Démontrer que la suite (u_n) admet une limite et donner cette limite.

15 Soit : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$

Démontrer que ces deux suites sont adjacentes et en déduire que (u_n) est convergente.

16 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $u_n = \cos \dfrac{n\pi}{3}$

a. Décrire les suites (u_{6n}) et (u_{6n+3}).

b. Démontrer que la suite (u_n) est divergente.

c. Que dire de la suite $v_n = \dfrac{1}{n} \cos \dfrac{n\pi}{3}$?

17 Soit (u_n) une suite complexe telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = \frac{1+i}{2}u_n - i$$

Démontrer que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

(18) Étudier le comportement à l'infini des suites suivantes.

$$u_n = \frac{2n+1}{n^2-3} \qquad v_n = \frac{n}{\ln n + e^n} \qquad w_n = \frac{n}{\ln n + e^{-n}}$$

$$x_n = \frac{e^{-n}}{1+n^4} \qquad y_n = \frac{5^n - 6^n}{5^n - 4^n} \qquad z_n = 5^n - n^2 4^n$$

$$a_n = \frac{4^n}{n^3 - n!} \qquad b_n = \frac{n - 2^n}{e^n} \qquad c_n = \frac{n! \ln n}{\sqrt{n}\, e^n}$$

(19) Calculer les limites éventuelles des suites suivantes.

$$u_n = \left(\frac{3}{n}\right)^{\frac{2}{\ln n}} \qquad v_n = n(\ln(n+2) - \ln n)$$

$$w_n = (2n)^{\sin \frac{1}{n}} \qquad x_n = n\left(\sqrt[n]{2} - 1\right)$$

$$y_n = \frac{\operatorname{sh} \frac{1}{n}}{\sin \frac{1}{n}} \qquad z_n = \sqrt[4]{n^4 + 6n^3 + 5n^2} - n$$

Travaux dirigés

1 Déterminer les termes généraux des suites définies par :

a. $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 2u_n - 8$

b. $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n - 2$

c. $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 3 - u_n$

2 Déterminer les termes généraux des suites définies par :

a. $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n$

b. $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$

c. $u_0 = 2$, $u_1 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+2} = 2u_{n+1} + 24u_n$

d. $u_0 = 1$, $u_1 = -4$ et $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+2} = -6u_{n+1} - 9u_n$

e. $u_0 = 2$, $u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$

f. $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+2} = \sqrt{3}u_{n+1} - u_n$

Donner une forme réelle de la suite (e.), et démontrer que la suite (f.) est périodique.

3 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose :

$$u_n = \left(\tfrac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^n + \left(\tfrac{1-\sqrt{13}}{2}\right)^n$$

a. Trouver une relation de récurrence double vérifiée par la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b. Démontrer que tous les u_n sont entiers naturels.

4 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $u_0 > 0$, $u_1 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+2} = \sqrt{u_n u_{n+1}}$$

Démontrer que cette suite converge et exprimer sa limite en fonction de u_0.

5 Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies par $u_0 = 0$, $v_0 = 12$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) \end{cases}$$

a. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

b. Calculer leur limite.

6 Soit (u_n) une suite complexe définie par $u_0 \in \mathbb{C}$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = \frac{2u_n + \overline{u_n}}{3}$$

Étudier la limite de cette suite.

7 Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles vérifiant pour tout entier n :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n - 2v_n) + 2 \\ v_{n+1} = \frac{1}{3}(2u_n + v_n) - 2 \end{cases}$$

Étudier la convergence des suites (u_n) et (v_n).

On pourra utiliser les complexes.

8 Soit q un nombre complexe de module 1.

Démontrer que la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $q = 1$.

On pourra considérer la suite $(q^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

9 Soit A et B deux parties non-vides de $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall a \in A \quad \forall b \in B \qquad a \leqslant b$$

a. Démontrer que A admet une borne supérieure et B admet une borne inférieure.

b. Démontrer que $\operatorname{Sup} A \leqslant \operatorname{Inf} B$.

10 Soit A et B deux parties majorées non vides de $\mathbb{R}$.

a. Démontrer que si $A \subseteq B$ alors :
$$\operatorname{Sup} A \leqslant \operatorname{Sup} B$$

b. Démontrer que $A \cup B$ est majorée et que :
$$\operatorname{Sup}(A \cup B) = \operatorname{Max}\{\operatorname{Sup} A, \operatorname{Sup} B\}$$

c. Démontrer que $A \cap B$ est majorée, et que si elle est non-vide alors :
$$\operatorname{Sup}(A \cap B) \leqslant \operatorname{Min}\{\operatorname{Sup} A, \operatorname{Sup} B\}$$
Montrer que l'égalité n'a pas lieu en général.

d. On note $A + B = \{x + y \mid x \in A,\ y \in B\}$.
Démontrer que $A + B$ est majorée et que :
$$\operatorname{Sup}(A + B) = \operatorname{Sup} A + \operatorname{Sup} B$$

11 Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ croissante, et :

$$A = \{x \in [0,1] \mid f(x) \geqslant x\}.$$

a. Démontrer que A possède une borne supérieure.

b. Soit s la borne supérieure de A. Démontrer que s est un point fixe de f, *i.e.*, que $f(s) = s$.

12 Soit (u_n) une suite et ℓ un réel. Que signifient, ou qu'impliquent les propositions suivantes ?

a. $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$

b. $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$

c. $\exists \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$

d. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$

e. $\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$

f. $\forall N \in \mathbb{N} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$

g. $\exists N \in \mathbb{N} \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$

h. $\forall N \in \mathbb{N} \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$

13 Soit (u_n) une suite réelle. Traduire les assertions suivantes à l'aide de quantificateurs :

a. La suite (u_n) est bornée.

b. La suite (u_n) est stationnaire.

c. La suite (u_n) n'est pas croissante.

d. La suite (u_n) n'est croissante à partir d'aucun rang.

e. La suite (u_n) ne converge pas vers 0.

14 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ puis :

$$v_n = u_n - 2\sqrt{n} \qquad w_n = u_n - 2\sqrt{n+1}$$

a. Démontrer que les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes.

b. En déduire que le suite (u_n) tend vers $+\infty$.

c. Démontrer que $u_n \sim 2\sqrt{n}$.

15 Étudier les limites des suites suivantes.

a. $u_n = \sqrt{(n+a)(n+b)} - n \qquad (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$

b. $u_n = e^{4n}\,\mathrm{sh}(n) - e^{3n}\,\mathrm{sh}(2n)$

c. $u_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\ln n}}$

d. $u_n = \sqrt[n]{3 + \cos n}$

e. $u_n = \left\lfloor \frac{(n-1)^2}{n^2-3} \right\rfloor$

f. $u_n = \sin n \, \sin \frac{1}{n}$

g. $u_n = \frac{n-\sqrt{n^2+1}}{n-\sqrt{n^2-1}}$

h. $u_n = \sqrt[n]{2^n - 1}$

i. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k+n^2}$

j. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k+n}{k^2+n^3}$

k. $u_n = \cos(\pi\sqrt{n})$

l. $u_n = e^{2i\pi\sqrt{n^2+1}}$

16 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = f(u_n)$$

où f est la fonction définie sur $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{4}\right\}$ par :

$$f(x) = \tfrac{5x-1}{4x+1}.$$

a. Étudier les variations de f.

b. Démontrer que (u_n) est bien définie et incluse dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

c. Démontrer que (u_n) converge et calculer sa limite.

d. Soit maintenant v_n la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad v_n = \frac{1}{u_n - \frac{1}{2}}.$$

Démontrer que v_n est bien définie et exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.

e. En déduire le terme général de la suite (u_n). Démontrer de nouveau qu'elle converge et retrouver sa limite.

f. Donner un équivalent de $u_n - \ell$, où $\ell = \lim u_n$.

17 On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 1 + \frac{6}{un}$.
On pose $f(x) = 1 + \frac{6}{x}$.

a. Justifier que l'intervalle $I = [u_0, u_1]$ est stable par f, et en déduire que la suite (u_n) est bien définie et bornée.

b. Décrire les variations de la suite (u_n).

c. Décrire les variations de $g = f \circ f$.
En déduire que les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes.

d. Démontrer que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.

18 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par une valeur $u_0 \geqslant 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2 + 7u_n}{2}} - 1$$

a. Étudier sur $\mathbb{R}_+$ les fonctions $f : x \mapsto \sqrt{\frac{x^2+7x}{2}} - 1$ et $g : x \mapsto f(x) - x$.

b. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.

c. Que peut-on dire si $u_0 \in [0, 1[$?

19 Donner une suite la plus simple possible équivalente à chacune des suites suivantes.

a. $u_n = e^{\frac{1}{n}} - 1$

b. $u_n = e^{\frac{1}{n}}$

c. $u_n = \mathrm{ch}\, n$

d. $u_n = \ln(n+7) - \ln(n+3)$

e. $u_n = n \sin \frac{\sqrt{n}}{(n+2)^2}$

f. $u_n = \ln(2n^3 + 5)$

g. $u_n = n^{\frac{1}{n}} - 1$

h. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$

i. $u_n = \sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2}$

j. $u_n = \tan(\arcsin \frac{n}{n+1})$

k. $u_n = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}\right)$

l. $u_n = \binom{n+k}{k}$, $k \in \mathbb{N}$

20 Étudier les limites des suites suivantes.

a. $u_n = \frac{a}{n}\left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor$, $v_n = \frac{n}{a}\left\lfloor \frac{b}{n} \right\rfloor$ où $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$

b. $u_n = 4^{2n} - 5^n n^4$

c. $u_n = \frac{3^n - e^n}{\operatorname{ch} n}$

d. $u_n = n^{\frac{\sin n}{n}}$

e. $u_n = \frac{n^n}{2^{2^n}}$

f. $u_n = \sqrt[3]{n^3+n^2} - n$

g. $u_n = \frac{n!}{\pi^n \ln n}$

h. $u_n = \left(\frac{n^2+2n+3}{n^2-3n+5}\right)^{\frac{n^2+4}{2n-1}}$

i. $u_n = \left(1 + i\frac{\pi}{n}\right)^n$

21 Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. On suppose que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge vers un réel a élément de $[0,1[$. Le but de cet exercice est de démontrer que la suite (u_n) converge vers 0.

a. On pose $b = \frac{1+a}{2}$. Justifier qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant p \quad u_{n+1} \leqslant b u_n$

b. Pour tout entier naturel n, donner une majoration de u_{n+p} en fonction de b, n et u_p.

c. Conclure.

Seconde démonstration :

d. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang, puis qu'elle est convergente, et enfin que sa limite ne peut être non-nulle.

Applications :

e. Démontrer que la suite $(n!)$ est négligeable devant la suite (n^n).

f. Démontrer que pour tout réel $\alpha > 1$ la suite (n^n) est négligeable devant la suite $(n!^\alpha)$.

22 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.
On suppose que $u_n + u_{n+1} \sim \frac{1}{n}$.

a. Démontrer que si la suite (u_n) est décroissante alors $u_n \sim \frac{1}{2n}$.

b. Justifier que le résultat est faux si la suite (u_n) n'est pas supposée décroissante.
Considérer par exemple $u_n = \frac{1}{2n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

23 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2}{1 + n u_n}$$

a. Démontrer que la suite (u_n) converge.

b. Déterminer sa limite.

c. Démontrer que $u_n = O\left(\frac{1}{(n-1)!}\right)$.

24 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $f_n(x) = x^n - nx + 1$.

a. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 2$ il existe un unique $u_n \in [0,1]$ tel que $f_n(u_n) = 0$.

b. Démontrer que pour tout $n \geqslant 2$: $\frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \frac{2}{n}$
Que peut-on en déduire pour la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$?

c. Donner un équivalent simple de (u_n).

25 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $f_n(x) = x^n + x - 1$.

a. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe un unique $u_n \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f_n(u_n) = 0$.

b. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

c. Déterminer sa limite.

26 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. converge-t-elle si :

a. Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent ?

b. Les suites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent ?

c. Les suites (u_{2n}), (u_{3n}) et (u_{5n}) convergent ?

d. La suite (u_n) est croissante et la suite (u_{2n}) converge ?

27 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite non majorée.

Démontrer qu'il existe une suite extraite de (u_n) tendant vers $+\infty$.

28 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive.

a. On suppose qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positives convergeant vers 0 telles que :

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 \qquad u_{n+p} \leqslant a_p u_n + b_n$$

Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

b. Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive convergeant vers 0, et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \operatorname{Sup}_{j\geqslant n} \varepsilon_j$.

Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et qu'elle converge vers 0.

c. On suppose qu'il existe un réel K strictement supérieur à 1 et une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positive convergeant vers 0 tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} \leqslant \frac{u_n + \varepsilon_n}{K}$$

Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

29 Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une *suite de Cauchy* si :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists N \in \mathbb{N} \qquad \forall (p,q) \in \mathbb{N}$$
$$(p \geqslant N \quad \text{et} \quad q \geqslant N) \implies |u_p - u_q| \leqslant \varepsilon$$

a. Démontrer que si une suite est convergente alors elle est de Cauchy.

b. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy.

(i) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

(ii) En déduire qu'elle est convergente.

30 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée.

Démontrer que la suite (u_n) converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.