TD. A9
Suites

Exercices de cours

(1) Étudier les variations des suites définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{n^2-3}{n+1} \qquad v_n = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} \qquad w_n = \frac{n^n}{n!}$$

(2) Déterminer le terme général des suites définies par :

a. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 3u_n - 4$
b. $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{4-u_n}{2}$.

(3) Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+2} = 4u_{n+1} + 5u_n$$

(4) **Suite de Fibonacci**

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = u_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

a. Déterminer le terme général de cette suite.
b. Calculer la limite de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

(5) Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et s un réel. Écrire en termes logiques la proposition : s n'est pas la borne supérieure de A.

(6) Soit A une partie non-vide de $\mathbb{R}_+^*$. Démontrer que A admet une borne inférieure, et que celle-ci est positive ou nulle.

(7) Soit A et B deux parties de $\mathbb{R}$ telles que A est non-vide et incluse dans B. Démontrer que si B est minorée alors A est minorée et $\operatorname{Inf} B \leqslant \operatorname{Inf} A$.

(8) La suite $(u_n) = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet-elle des bornes ? Des extrema ?

(9) Démontrer que la suite u définie par $u_n = e^{-n}$ est convergente.

(10) Démontrer les propriétés suivantes :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$.

Si $\ell > 0$ alors (u_n) est strictement positive à partir d'un certain rang.

Si $\ell < 0$ alors u_n est strictement négative à partir d'un certain rang.

(11) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = u_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = u_{n+1} - (1+i)u_n.$$

Calculer u_{15}.

(12) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{x_n - y_n}{2} \\ y_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2} - 1 \end{cases}$$

En considérant la suite complexe $(z_n) = (x_n + iy_n)$, démontrer que les suites (x_n) et (y_n) convergent et déterminer leurs limites.

(13) Étudier la convergence des suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \frac{\left\lfloor \frac{n}{4} + \frac{4}{n} \right\rfloor}{\left\lfloor \frac{n}{7} + \frac{7}{n} \right\rfloor} \qquad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lfloor k\pi \rfloor}{n^2}$$

(14) Démontrer que $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

(15) Soit : $\quad u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \quad$ et $\quad v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$

Démontrer que ces deux suites sont adjacentes et en déduire que (u_n) est convergente.

(16) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $\quad u_n = \cos \dfrac{n\pi}{3}$

a. Décrire les suites (u_{6n}) et (u_{6n+3}).
b. Démontrer que la suite (u_n) est divergente.
c. Que dire de la suite $v_n = \dfrac{1}{n} \cos \dfrac{n\pi}{3}$?

Travaux dirigés

$\boxed{1}$ Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = 1 + \frac{u_n^2}{4}$$

a. Démontrer que (u_n) est majorée et croissante.
b. Démontrer que (u_n) et convergente et donner sa limite.
c. On suppose maintenant que $u_0 = 3$. Démontrer que la suite (u_n) admet une limite et donner cette limite.

2 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 > 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = \frac{1}{1+u_n}$$

a. Démontrer que la suite (u_n) est bien définie et décrire ses variations.

b. Démontrer que les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent et donner leurs limites.

c. Démontrer que la suite (u_n) converge.

3 Déterminer les termes généraux des suites définies par :

a. $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 2u_n - 8$

b. $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 3 - u_n$

c. $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 2$.

4 Déterminer les termes généraux des suites définies par :

a. $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n$

b. $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$

c. $u_0 = 2$, $u_1 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 24u_n$

d. $u_0 = 1$, $u_1 = -4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+2} = -6u_{n+1} - 9u_n$

e. $u_0 = 2$, $u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$

Donner une forme réelle de cette suite.

f. $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+2} = \sqrt{3}u_{n+1} - u_n$

Démontrer que cette suite est périodique.

5 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose :

$$u_n = \left(\tfrac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^n + \left(\tfrac{1-\sqrt{13}}{2}\right)^n$$

a. Trouver une relation de récurrence double vérifiée par la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b. Démontrer que tous les u_n sont entiers naturels.

6 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $u_0 > 0$, $u_1 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+2} = \sqrt{u_n u_{n+1}}$$

Démontrer que cette suite converge et exprimer sa limite en fonction de u_0.

7 Soit A une matrice carrée inversible de taille (n, n) satisfaisant $A + A^{-1} = I_n$.

Calculer $A^p + A^{-p}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

8 Soit (u_n) une suite complexe définie par $u_0 \in \mathbb{C}$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = \frac{2u_n + \overline{u_n}}{3}$$

Étudier la limite de cette suite.

9 Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles vérifiant pour tout entier n :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n - 2v_n) + 2 \\ v_{n+1} = \frac{1}{3}(2u_n + v_n) - 2 \end{cases}$$

Étudier la convergence des suites (u_n) et (v_n).

On pourra utiliser les complexes.

10 Soit q un nombre complexe de module 1.

Démontrer que la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $q = 1$.

On pourra considérer la suite $(q^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

11 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ puis :

$$v_n = u_n - 2\sqrt{n} \qquad w_n = u_n - 2\sqrt{n+1}$$

a. Démontrer que les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes.

b. En déduire que le suite (u_n) tend vers $+\infty$.

c. Démontrer que $u_n \sim 2\sqrt{n}$.

12 Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies par $u_0 = 0$, $v_0 = 12$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) \end{cases}$$

a. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

b. Calculer leur limite.

13 Soit A et B deux parties non-vides de $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall a \in A \quad \forall b \in B \qquad a \leqslant b$$

a. Démontrer que A admet une borne supérieure et B admet une borne inférieure.

b. Démontrer que $\operatorname{Sup} A \leqslant \operatorname{Inf} B$.

14 Soit A et B deux parties majorées non vides de $\mathbb{R}$.

a. Démontrer que si $A \subseteq B$ alors :

$$\operatorname{Sup} A \leqslant \operatorname{Sup} B$$

b. Démontrer que $A \cup B$ est majorée et que :

$$\operatorname{Sup}(A \cup B) = \operatorname{Max}\{\operatorname{Sup} A, \operatorname{Sup} B\}$$

c. Démontrer que $A \cap B$ est majorée, et que si elle est non-vide alors :

$$\operatorname{Sup}(A \cap B) \leqslant \operatorname{Min}\{\operatorname{Sup} A, \operatorname{Sup} B\}$$

Montrer que l'égalité n'a pas lieu en général.

d. On note $A + B = \{x + y \mid x \in A,\ y \in B\}$.

Démontrer que $A + B$ est majorée et que :

$$\operatorname{Sup}(A + B) = \operatorname{Sup} A + \operatorname{Sup} B$$

15 Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ croissante, et :

$$A = \{x \in [0,1] \mid f(x) \geqslant x\}.$$

a. Démontrer que A possède une borne supérieure.

b. Soit s la borne supérieure de A. Démontrer que s est un point fixe de f, *i.e.*, que $f(s) = s$.

16 Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non majorée.

Démontrer qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A tendant vers $+\infty$.

17 Soit (u_n) une suite et ℓ un réel. Que signifient, ou qu'impliquent les propositions suivantes ?

a. $\forall\varepsilon>0 \quad \forall N\in\mathbb{N} \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad n\geqslant N \Longrightarrow |u_n-\ell|\leqslant\varepsilon$

b. $\exists\varepsilon>0 \quad \forall N\in\mathbb{N} \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad n\geqslant N \Longrightarrow |u_n-\ell|\leqslant\varepsilon$

c. $\exists\varepsilon>0 \quad \exists N\in\mathbb{N} \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad n\geqslant N \Longrightarrow |u_n-\ell|\leqslant\varepsilon$

d. $\forall\varepsilon>0 \quad \exists N\in\mathbb{N} \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad n\geqslant N \Longrightarrow |u_n-\ell|\leqslant\varepsilon$

e. $\exists N\in\mathbb{N} \quad \forall\varepsilon>0 \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad n\geqslant N \Longrightarrow |u_n-\ell|\leqslant\varepsilon$

f. $\forall N\in\mathbb{N} \quad \forall\varepsilon>0 \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad n\geqslant N \Longrightarrow |u_n-\ell|\leqslant\varepsilon$

g. $\exists N\in\mathbb{N} \quad \exists\varepsilon>0 \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad n\geqslant N \Longrightarrow |u_n-\ell|\leqslant\varepsilon$

h. $\forall N\in\mathbb{N} \quad \exists\varepsilon>0 \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad n\geqslant N \Longrightarrow |u_n-\ell|\leqslant\varepsilon$

18 Soit (u_n) une suite réelle. Traduire les assertions suivantes à l'aide de quantificateurs :

a. La suite (u_n) est bornée.
b. La suite (u_n) est stationnaire.
c. La suite (u_n) n'est pas croissante.
d. La suite (u_n) n'est croissante à partir d'aucun rang.
e. La suite (u_n) ne converge pas vers 0.

19 Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. On suppose que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge vers un réel a élément de $[0,1[$. Le but de cet exercice est de démontrer que la suite (u_n) converge vers 0.

a. On pose $b=\frac{1+a}{2}$. Justifier qu'il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que : $\quad \forall n\geqslant p \quad u_{n+1}\leqslant bu_n$
b. Pour tout entier naturel n, donner une majoration de u_{n+p} en fonction de b, n et u_p.
c. Conclure.

Seconde démonstration :

d. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang, puis qu'elle est convergente, et enfin que sa limite ne peut être non-nulle.

Applications :

e. Démontrer que la suite $(n!)$ est négligeable devant la suite (n^n).
f. Démontrer que pour tout réel $\alpha>1$ la suite (n^n) est négligeable devant la suite $(n!^\alpha)$.

20 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

On suppose que $u_n+u_{n+1}\sim\frac{1}{n}$.

a. Démontrer que si la suite (u_n) est décroissante alors $u_n\sim\frac{1}{2n}$.
b. Justifier que le résultat est faux si la suite (u_n) n'est pas supposée décroissante.
Considérer par exemple $u_n=\frac{1}{2n}+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

21 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0>0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$u_{n+1}=\frac{u_n^2}{1+nu_n}$$

a. Démontrer que la suite (u_n) converge.
b. Déterminer sa limite.
c. Démontrer que $u_n=O\Big(\frac{1}{(n-1)!}\Big)$.

22 Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on pose $f_n(x)=x^n-nx+1$.

a. Démontrer que pour tout entier $n\geqslant 2$ il existe un unique $u_n\in[0,1]$ tel que $f_n(u_n)=0$.
b. Démontrer que pour tout $n\geqslant 2$: $\quad \frac{1}{n}\leqslant u_n\leqslant\frac{2}{n}$
Que peut-on en déduire pour la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$?
c. Donner un équivalent simple de (u_n).

23 Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on pose $f_n(x)=x^n+x-1$.

a. Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ il existe un unique $u_n\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $f_n(u_n)=0$.
b. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
c. Déterminer sa limite.
d. Démontrer que $\frac{1}{n}=o(1-u_n)$.

24 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Converge-t-elle si :

a. Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent ?
b. Les suites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent ?
c. Les suites (u_{2n}), (u_{3n}) et (u_{5n}) convergent ?
d. La suite (u_n) est croissante et la suite (u_{2n}) converge ?

25 Pour tout $n\in\mathbb{N}$ on pose $u_n=\cos(\pi\sqrt{n})$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ?

26 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite non majorée.

Démontrer qu'il existe une suite extraite de (u_n) tendant vers $+\infty$.

27 Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une *suite de Cauchy* si :

$$\forall\varepsilon>0 \qquad \exists N\in\mathbb{N} \qquad \forall(p,q)\in\mathbb{N}$$
$$(p\geqslant N \quad \text{et} \quad q\geqslant N) \quad \Longrightarrow \quad |u_p-u_q|\leqslant\varepsilon$$

a. Démontrer que si une suite est convergente alors elle est de Cauchy.
b. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy.
(i) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
(ii) En déduire qu'elle est convergente.

28 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée.

Démontrer que la suite (u_n) converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.

Indication : Justifier que si la suite (u_n) ne converge pas vers ℓ alors il existe un réel $\varepsilon > 0$ et une suite extraite de (u_n) entièrement comprise hors de l'intervalle $[\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]$.

29 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive.

a. On suppose qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positives convergeant vers 0 telles que :

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 \qquad u_{n+p} \leqslant a_p u_n + b_n$$

Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

b. Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive convergeant vers 0, et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \operatorname*{Sup}_{j\geqslant n} \varepsilon_j$.

Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et qu'elle converge vers 0.

c. On suppose qu'il existe un réel K strictement supérieur à 1 et une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positive convergeant vers 0 tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} \leqslant \frac{u_n + \varepsilon_n}{K}$$

Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.