Chapitre A9
Suites

I. Généralités

A. Définitions

Définitions

Une *suite à valeurs réelles indexée par* $\mathbb{N}$ est une application :

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto u_n \end{aligned}$$

On note u_n l'image de l'entier n par l'application u, au lieu de $u(n)$.
On définit aussi les suites à valeurs complexes, les suites indéxées par $\mathbb{N}^*$, etc.

Exemple. La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est indexées par $\mathbb{N}^*$.

Notations

- Une suite peut être notée : u ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_0, u_1, u_2, \dots)$
- Si λ est un réel, on note $(\lambda)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite constante égale à λ.
- On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à valeurs réelles indexées par $\mathbb{N}$.
  On définit de même $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$, etc.

Modes de définition

On peut définir une suite de plusieurs façons.

- Définition explicite : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 3^n - 2$
- Définition par récurrence : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 1 - u_n^2/2$
- Définition implicite : pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit u_n la solution positive de l'équation $x^n + x - 1$.

B. Opérations

Définitions

L'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est muni des opérations suivantes.

- Addition : si u et v sont deux suites, alors $u+v$ est la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (u+v)_n = u_n + v_n \qquad \text{ou} \qquad u+v = (u_0+v_0, u_1+v_1, \ldots)$$

- Multiplication : si u et v sont deux suites, alors uv est la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (uv)_n = u_n v_n \qquad \text{ou} \qquad uv = (u_0v_0, u_1v_1, \ldots)$$

- Multiplication par un scalaire : si u est une suite et λ un réel alors λu est la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (\lambda u)_n = \lambda u_n \qquad \text{ou} \qquad \lambda u = (\lambda u_0, \lambda u_1, \ldots)$$

Propositions

- Le couple $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +\right)$ est un groupe abélien.
  L'élément neutre est la *suite nulle* $(0)_{n\in\mathbb{N}} = (0,0,0,\ldots)$..
  L'opposée d'une suite u est la suite $-u = (-u_0, -u_1, -u_2, \ldots)$.
- Le triplet $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \times\right)$ est un anneau commutatif.
  L'élément neutre pour la multiplication est la suite constante égale à 1 : $(1)_{n\in\mathbb{N}} = (1,1,1,\ldots)$.
  Ce n'est pas un corps, il n'est pas intègre.

C. Notions de base

Définitions

Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite :

constante	si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_{n+1}$
croissante	si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant u_{n+1}$
décroissante	si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geqslant u_{n+1}$
monotone	si elle est croissante ou décroissante
strictement croissante	si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n < u_{n+1}$
strictement décroissante	si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > u_{n+1}$
strictement monotone	si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Définitions

Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite :

majorée si $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant M$ M est alors un *majorant* de (u_n).

minorée si $\exists\, m \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geqslant m$ m est alors un *minorant* de (u_n).

bornée si elle est majorée et minorée.

Une suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite :

bornée si la suite réelle $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

Définitions

Une suite réelle ou complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite :

périodique si $\exists T \in \mathbb{N}^* \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+T} = u_n$

stationnaire si elle est constante à partir d'un certain rang :

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad u_n = u_{n+1}$$

Remarque. On dit qu'une propriété sur une suite (u_n) est vraie *à partir d'un certain rang* si il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que cette propriété est vraie pour tout $n \geqslant N$.

Exemple. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive à partir d'un certain rang si :

▷ **Exercice 1.**

D. Suites classiques

Remarque. Les définitions et propriétés des suites arithmétiques et géométriques ont été rappelées.

Proposition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q éventuellement complexe.

Alors la suite (u_n)
- converge vers 0 si $|q| < 1$
- converge vers 1 si $q = 1$
- diverge dans tous les autres cas.

Remarque. Si q est réel : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $q \in\,]-1, 1]$.

Démonstration. Si q est non-nul on écrit $|q^n| = |q|^n = e^{n \ln |q|}$, ce qui montre que la suite (q^n) converge vers 0 si $|q| < 1$ et diverge si $|q| > 1$.

Le cas où $|q| = 1$ sera vu en TD. □

Définition (rappel)

Une suite (u_n) est *arithmético-géométrique* s'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = au_n + b.$$

Méthode

- Introduire le réel γ tel que $\gamma = a\gamma + b$.
- Vérifier que la suite $(v_n) = (u_n - \gamma)$ est géométrique.
- En déduire le terme général de (v_n), puis celui de (u_n).

▷ **Exercice 2.**

Définition

Une suite *double-récurrente linéaire* est définie par la donnée de u_0, u_1 et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+2} = \lambda u_{n+1} + \mu u_n$$

où λ et μ sont deux scalaires.

Remarque. On se ramène à la relation

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$$

Définition

On définit l'*équation caractéristique* de la suite :

$$(C) \qquad a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

Théorème

Avec les notations précédentes, en notant Δ le discriminant de (C) :

- Si $\Delta \neq 0$ alors l'équation (C) admet deux solutions λ_1 et λ_2. Le terme général de la suite (u_n) est :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n$$
où α et β sont deux constantes.
- Si $\Delta = 0$ alors l'équation (C) admet une unique solution λ_0. Le terme général de la suite (u_n) est :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (\alpha n + \beta)\lambda_0^n$$
où α et β sont deux constantes.

Méthode

- Écrire l'équation caractéristique.
- La résoudre et appliquer le théorème.
- Calculer α et β grâce aux valeurs de u_0 et u_1.

Exemple 1. Déterminer le terme général des suites définies par :

a. $u_0 = -1$ $u_1 = -2$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+2} = 7u_{n+1} - 12u_n$

b. $v_0 = -1$ $v_1 = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $v_{n+2} = v_{n+1} - \frac{1}{4}v_n$

▷ **Exercices 3, 4.**

II. Limites

A. Compléments sur les réels

Propriété de la borne supérieure (axiome)

Toute partie non-vide majorée de $\mathbb{R}$ admet un plus petit majorant.

Propriété de la borne inférieure

Toute partie non-vide minorée de $\mathbb{R}$ admet un plus grand minorant.

Définitions

- Soit A une partie non-vide majorée.
  On appelle *borne supérieure* de A le plus petit de ses majorants. On le note $\mathrm{Sup}(A)$.
- Soit A une partie non-vide minorée.
  On appelle *borne inférieure* de A le plus grand de ses minorants. On le note $\mathrm{Inf}(A)$.

Remarque. La propriété de la borne supérieure n'est pas vérifiée par $\mathbb{Q}$.

Proposition

Soit A une partie non-vide majorée de $\mathbb{R}$ et s un réel.
Alors s est la borne supérieure de A si et seulement si :

Remarques.

- On dit *un* majorant et *la* borne supérieure.
- Si $s = \mathrm{Sup}\, A$ et M est un majorant de A alors :

▷ **Exercices 5, 6, 7.**

Proposition - Définition

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- Si b est un majorant de A et b appartient à A alors b est la borne supérieure de A.
  On dit que b est le *maximum* de A, et on note $b = \mathrm{Max}(A)$.
- Si a est un minorant de A et a appartient à A alors a est la borne inférieure de A.
  On dit que a est le *minimum* de A et on note $a = \mathrm{Min}(A)$.

Exemple 2. L'intervalle $[-5, 4[$ admet un minimum mais pas de maximum.

Remarque. Si une partie A est finie et non-vide alors elle admet un minimum et un maximum.

Définition

Si une suite (u_n) est majorée, alors sa borne supérieure est le plus petit de ses majorants. C'est le réel s tel que :

Remarques.

- En d'autres termes la borne supérieure de la suite (u_n) est la borne supérieure de l'ensemble $U = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
- On définit de même la borne inférieure, le maximum et le minimum d'une suite.

Notations

On note ces réels, s'il sont définis : $\operatorname*{Sup}_{n\in\mathbb{N}} u_n \quad \operatorname*{Inf}_{n\in\mathbb{N}} u_n \quad \operatorname*{Max}_{n\in\mathbb{N}} u_n \quad \operatorname*{Min}_{n\in\mathbb{N}} u_n$

▷ **Exercice 8.**

Résumé

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- Un majorant de A est un réel plus grand que tous les éléments de A.
- La borne supérieure est le plus petit des majorants.
- Le maximum est la borne supérieure lorsqu'elle appartient à A.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

- Un majorant de (u_n) est un réel plus grand que tous les éléments de u_n.
- La borne supérieure est le plus petit des majorants.
- Le maximum est un u_n plus grand que tous les autres.

B. Suites convergentes

Définitions

Soit ℓ un réel. On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* ℓ si :

On note alors : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ ou $u_n \to \ell$

Une suite (u_n) est *convergente* s'il existe un réel ℓ tel que (u_n) converge vers ℓ.

Une suite est *divergente* si elle n'est pas convergente.

Exemple. La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Exercice 9.

Proposition (Unicité de la limite)

Si (u_n) converge vers ℓ et vers ℓ', alors $\ell = \ell'$.

Définition

Si (u_n) converge vers ℓ alors on dit que ℓ est la *limite* de la suite (u_n). On note :

$$\lim u_n = \ell \qquad \text{ou} \qquad \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

Démonstration dans le cas réel.

Démonstration dans le cas général. Si, pour un certain entier n :

$$|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon \qquad \text{et} \qquad |u_n - \ell'| \leqslant \varepsilon$$

alors par inégalité triangulaire :

$$|\ell' - \ell| = |(u_n - \ell) - (u_n - \ell')| \leqslant |u_n - \ell| + |u_n - \ell'| \leqslant 2\varepsilon$$

On obtient une contradiction en choisissant $\varepsilon = \frac{1}{3}|\ell - \ell'|$. □

Exemple 3. Soit (u_n) une suite d'entiers : $(u_n) \subseteq \mathbb{Z}$.
Démontrer que si (u_n) est convergente alors elle est stationnaire.

Proposition

Toute suite convergente est bornée.

Démonstration.

▷ **Exercice 10.**

C. Opérations sur les limites

Théorème

Soit (u_n) et (v_n) deux suites convergentes, de limites ℓ et ℓ'. Soit λ un scalaire. Alors :

(i) La suite $(u_n + v_n)$ converge vers $\ell + \ell'$.

(ii) La suite (λu_n) converge vers $\lambda\ell$.

(iii) La suite $(u_n v_n)$ converge vers $\ell\ell'$.

(iv) La suite $|u_n|$ converge vers $|\ell|$.

(v) Si $\ell \neq 0$, alors la suite (u_n) est non-nulle à partir d'un certain rang, et la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ converge vers $\frac{1}{\ell}$.

Corollaire

De plus :

(vi) Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ la suite $(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge vers $\lambda \ell + \mu \ell'$.

En d'autres termes, les *combinaisons linéaires* des suites (u_n) et (v_n) convergent.

(vii) Si $\ell' \neq 0$ alors la suite quotient $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers $\frac{\ell}{\ell'}$.

Démonstration du corollaire.

Le point *(vi)* est conséquence des points *(ii)* et *(i)*.

Le point *(vii)* est conséquence des points *(v)* et *(iii)*. □

Lemme 1

Une suite (u_n) converge vers ℓ si et seulement si la suite $(u_n - \ell)$ converge vers 0.

Démonstration. Immédiat. □

Lemme 2

Si (u_n) est une suite convergeant vers 0 et (v_n) est une suite bornée, alors la suite $(u_n v_n)$ converge vers 0.

Démonstration.

Démonstration du théorème.

(i) D'après le lemme 1, il suffit de démontrer que si (u_n) et (v_n) convergent vers 0 alors $(u_n + v_n)$ converge vers 0.

(ii) La suite constante (λ) est bornée, donc d'après le lemme 2 si la suite (u_n) converge vers 0, alors la suite (λu_n) converge vers 0.

Maintenant si la suite (u_n) converge vers ℓ, alors d'après le lemme 1 la suite $(u_n - \ell)$ converge vers 0, donc la suite $(\lambda u_n - \lambda\ell)$ converge vers 0, et ainsi la suite (λu_n) converge vers $\lambda\ell$.

(iii) On écrit :

La suite (v_n) est bornée car convergente, la suite $(u_n - \ell)$ converge vers 0 d'après le lemme 1, donc d'après le lemme 2 la suite $(v_n(u_n - \ell))$ converge vers 0.

La suite $(v_n - \ell')$ converge vers 0 d'après le lemme 1, donc la suite $(\ell(v_n - \ell'))$ converge vers 0 d'après le *(ii)*.

D'après le *(i)*, la suite $(v_n(u_n - \ell) + \ell(v_n - \ell'))$ converge vers 0.

D'après le lemme 1, la suite $(u_n v_n)$ converge vers $\ell\ell'$.

(iv) On utilise l'inégalité triangulaire :

$$||u_n| - |\ell|| \leqslant |u_n - \ell|$$

(v) D'après l'exercice 10 la suite (u_n) est non-nulle à partir d'un certain rang. On écrit :

Comme la suite (ℓu_n) converge vers ℓ^2 qui est non-nul, alors elle est bornée à partir d'un certain rang par deux réels strictement positifs. La suite $\left(\frac{1}{\ell u_n}\right)$ est donc également bornée.

De plus la suite $(u_n - \ell)$ converge vers 0 donc par produit alors la suite $\left(\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right)$ converge vers 0, et ainsi la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ converge vers $\frac{1}{\ell}$. □

D. Limites et inégalités

Remarque. Dans cette partie et la suivante toutes les suites considérées sont réelles.

Lemme

Soit (w_n) une suite réelle convergente.

- Si (w_n) est positive à partir d'un certain rang alors $\lim w_n$ est positive.
- Si (w_n) est négative à partir d'un certain rang alors $\lim w_n$ est négative.

Démonstration.

Théorème de comparaison

Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles convergentes.

(i) Si à partir d'un certain rang $u_n < v_n$ alors $\lim u_n \leqslant \lim v_n$.

(ii) Si à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n$ alors $\lim u_n \leqslant \lim v_n$.

Démonstration. Le [ ] est conséquence du [ ] donc il suffit de démontrer celui-ci.

On pose $w_n = v_n - u_n$. Alors la suite (w_n) est positive à partir d'un certain rang, et par opérations sur les limites elle converge vers $\lim v_n - \lim u_n$.

On déduit du lemme précédent que la limite de w_n est positive, donc $\lim u_n \leqslant \lim v_n$. □

Remarque. L'implication $(\forall n \geqslant N \quad u_n < v_n) \implies \lim u_n < \lim v_n$ est fausse.

Contre-exemple. Soit $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ et $v_n = 1 + \frac{1}{n}$. Alors : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n < v_n$

Pourtant la limite de (u_n) n'est pas strictement inférieure à celle de (v_n), puisqu'elles valent 1 toutes les deux.

E. Limites infinies

Définition

Une suite réelle (u_n) *tend vers* $+\infty$ si :

On note alors : $\lim u_n = +\infty$ ou $u_n \to +\infty$

Une suite réelle (u_n) *tend vers* $-\infty$ si :

On note alors : $\lim u_n = -\infty$ ou $u_n \to -\infty$

Remarque. Si (u_n) tend vers $+\infty$ alors $(-u_n)$ tend vers $-\infty$, et vice-versa.

Plus généralement, pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$, si (u_n) tend vers $+\infty$ alors (λu_n) tend vers $\operatorname{sgn}(\lambda)\infty$.

Proposition

(i) Si la suite (u_n) tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ alors la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ converge vers 0.

(ii) Si la suite (u_n) converge vers 0 et est strictement positive à partir d'un certain rang, alors la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ tend vers $+\infty$.

Si la suite (u_n) converge vers 0 et est strictement négative à partir d'un certain rang, alors la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ tend vers $-\infty$.

Démonstration.

(i)

(ii) Supposons que la suite (u_n) converge vers 0 et est strictement positive à partir d'un certain rang.

Soit A un réel.

Si A est négatif alors il est clair qu'à partir d'un certain rang : $\left|\frac{1}{u_n}\right| \geqslant A$.

Si A est strictement positif alors $\varepsilon = \frac{1}{A}$ est strictement positif, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant N \Longrightarrow |u_n| \leqslant \frac{1}{A}$$

Ceci donne

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant N \Longrightarrow \left|\frac{1}{u_n}\right| \geqslant A$$

Comme u_n est strictement positive à partir d'un certain rang alors quitte à augmenter N on peut supposer que $\left|\frac{1}{u_n}\right| = \frac{1}{u_n}$.

On a démontré que :

$$\forall A \in \mathbb{R} \qquad \exists N \in \mathbb{N} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant N \Longrightarrow \frac{1}{u_n} > A$$

donc la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ tend vers $+\infty$.

Le cas où (u_n) est strictement négative à partir d'un certain rang se déduit de ce cas en remplaçant u_n par $-u_n$. $\square$

Définitions

On dit qu'une suite *admet une limite* si elle converge ou tend vers $\pm\infty$.

Dans ce cas sa limite est élément de :

Cet ensemble est appelé *droite numérique achevée.*

Remarque. L'addition et la multiplication ne sont pas des lois de composition interne de $\overline{\mathbb{R}}$, elles ne sont pas définies sur $\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$ tout entier. Les formes indéterminées sont :

Exemple 4. Dans les cas ci-dessus toutes les limites sont possibles.

F. Cas des suites complexes

▷ **Exercice 11.**

Remarque. Pour étudier la convergence d'une suite complexe $u : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ on peut :

- considérer la suite des modules $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$, qui est une suite réelle positive,
- utiliser les deux suites réelles $(\mathrm{Re}\,(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{Im}\,(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe.
Si (u_n) converge vers ℓ alors la suite conjuguée $(\overline{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\bar{\ell}$.

Démonstration. C'est immédiat car $\left|\overline{u_n} - \bar{\ell}\right| = \left|\overline{u_n - \ell}\right| = |u_n - \ell|$. □

Théorème

Soit ℓ un complexe, de forme algébrique $\ell = a + ib$.
Alors une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ si et seulement si les suites $(\mathrm{Re}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{Im}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers a et b.

Démonstration. Si la suite (u_n) converge vers ℓ alors la suite $(\overline{u_n})$ converge vers $\bar{\ell}$ donc par somme et multiplication par un scalaire la suite $\left(\frac{u_n+\bar{u}_n}{2}\right)$ converge vers $\frac{\ell+\bar{\ell}}{2}$, donc la suite $(\mathrm{Re}(u_n))$ converge vers a.

De même la suite $(\mathrm{Im}(u_n))$ converge vers b.

Réciproquement, si les suites $(\mathrm{Re}(u_n))$ et $(\mathrm{Im}(u_n))$ convergent respectivement vers a et b alors par combinaison linéaire la suite $(\mathrm{Re}(u_n) + i\,\mathrm{Im}(u_n))$ converge vers $a + ib$, donc la suite (u_n) converge vers ℓ. □

▷ **Exercice 12.**

G. Relations de comparaison

Définitions

Soit (u_n) et (v_n) deux suites. On dit que :

- La suite (u_n) est *négligeable* devant la suite (v_n) s'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 0 telle qu'à partir d'un certain rang $u_n = \varepsilon_n v_n$.
- La suite (u_n) est *équivalente* à la suite (v_n) s'il existe une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 1 telle qu'à partir d'un certain rang $u_n = h_n v_n$.
- La suite (u_n) est *dominée* par la suite (v_n) s'il existe une suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée telle qu'à partir d'un certain rang $u_n = M_n v_n$.

On note respectivement dans ces trois cas :

$$\begin{array}{cccc} & u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n) & u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n & u_n \underset{+\infty}{=} O(v_n) \\ \text{ou :} & u_n = o(v_n) & u_n \sim v_n & u_n = O(v_n) \end{array}$$

Remarques.

- Si la suite (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang alors :

$$\begin{aligned} u_n = o(v_n) \quad &\iff \quad \frac{u_n}{v_n} \longrightarrow 0 \\ u_n \sim v_n \quad &\iff \quad \frac{u_n}{v_n} \longrightarrow 1 \\ u_n = O(v_n) \quad &\iff \quad \frac{u_n}{v_n} \text{ est bornée.} \end{aligned}$$

- Les propriétés énoncées dans le chapitre A4 sont toujours valables. Par exemple :

$$u_n \sim v_n \quad \iff \quad u_n - v_n = o(v_n).$$

Proposition

La relation $\sim$ est une relation d'équivalence.

Démonstration. La réflexivité et la transitivité sont immédiates.

Pour la symétrie : si (u_n) est équivalente à (v_n) alors il existe une suite (h_n) convergeant vers 1 telle qu'à partir d'une certain rang $u_n = h_n v_n$.

On définit une suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $k_n = \frac{1}{h_n}$ si $h_n \neq 0$ et $k_n = 1$ sinon.

Comme (h_n) converge vers 1 alors à partir d'un certain rang (h_n) est strictement positif et donc $k_n = \frac{1}{h_n}$, ce qui montre que k_n converge vers 1. De plus à partir d'un certain rang $v_n = k_n u_n$, donc (v_n) est équivalente à (u_n). □

Proposition

Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles.
Si $u_n \sim v_n$ alors u_n et v_n ont même signe à partir d'un certain rang.

Démonstration.

III. Théorèmes d'existence de limite

Remarque. Dans toute cette partie les suites considérées sont réelles.

A. Encadrement

Théorème de divergence par comparaison

Soit (u_n) et (v_n) deux suites, telles que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang.
(i) Si (u_n) tend vers $+\infty$ alors (v_n) tend vers $+\infty$.
(ii) Si (v_n) tend vers $-\infty$ alors (u_n) tend vers $-\infty$.

Démonstration.

Corollaires

(i) Si (u_n) tend vers $+\infty$ et (v_n) est minorée alors $(u_n + v_n)$ tend vers $+\infty$.
En particulier :
- Si (u_n) tend vers $+\infty$ et (v_n) est convergente alors $(u_n + v_n)$ tend vers $+\infty$.
- Si (u_n) et (v_n) tendent vers $+\infty$ alors $(u_n + v_n)$ tend vers $+\infty$.

(ii) Si (u_n) tend vers $+\infty$ et (v_n) est minorée par un réel strictement positif à partir d'un certain rang alors $(u_n v_n)$ tend vers $+\infty$.
En particulier :
- Si (u_n) tend vers $+\infty$ et (v_n) converge vers un réel strictement positif alors $(u_n v_n)$ tend vers $+\infty$.
- Si (u_n) et (v_n) tendent vers $+\infty$ alors $(u_n v_n)$ tend vers $+\infty$.

Démonstration. En exercice. □

Théorème d'encadrement

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites. On suppose qu'il existe un entier N tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$$

i.e., $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ à partir d'un certain rang.
Si les suites (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite ℓ, alors la suite (v_n) converge vers ℓ.

Remarque. Ce théorème est un théorème d'existence de limite, il prouve d'abord que la suite (v_n) est convergente, puis qu'elle converge vers ℓ.

Exemple 5.

(i) Soit (u_n) et (v_n) deux suites *positives* telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n \leqslant v_n$$

Si (v_n) converge vers 0 alors (u_n) converge vers 0.

(ii) Convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\frac{\lfloor nx \rfloor}{n}\right)$ où x est un réel.

Démonstration.

Corollaire

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites. On suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$$

Si (u_n) et (w_n) sont équivalentes à une même suite (x_n) alors $v_n \sim x_n$.

Démonstration. Comme $u_n \sim x_n$ et $w_n \sim x_n$ alors par transitivité $w_n \sim u_n$. Il existe donc une suite (h_n) convergeant vers 1 telle qu'à partir d'un certain rang $w_n = h_n u_n$.

Alors, à partir d'un certain rang :

$$0 \leqslant v_n - u_n \leqslant w_n - u_n = (h_n - 1)u_n.$$

Comme $(h_n - 1)$ converge vers 0 alors $v_n - u_n = o(u_n)$ et donc $v_n \sim u_n$.

Par transitivité $v_n \sim x_n$. □

▷ **Exercice 13.**

B. Suites monotones

Rappel. Selon la propriété de la borne supérieure, toute partie non-vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure, c'est-à-dire un plus petit majorant.

Théorème de la limite monotone

Toute suite monotone admet une limite. Plus précisément :
Soit (u_n) une suite croissante.
(i) Si (u_n) est majorée alors elle est convergente.
(ii) Si (u_n) n'est pas majorée alors elle tend vers $+\infty$.
Soit (u_n) une suite décroissante.
(i) Si (u_n) est minorée alors elle est convergente.
(ii) Si (u_n) n'est pas minorée alors elle tend vers $-\infty$.

Démonstration. Supposons que la suite (u_n) est croissante.

On démontre le théorème dans le cas où la suite (u_n) est décroissante de la même façon, ou en appliquant le théorème pour la suite $(-u_n)$. $\square$

Théorème (complément)

- Une suite croissante majorée converge vers sa borne supérieure.
- Une suite décroissante minorée converge vers sa borne inférieure.

Proposition

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non-vide majorée. Alors il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de A convergeant vers $\operatorname{Sup} A$.

Démonstration. Soit $s = \operatorname{Sup} A$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ le réel $s - \frac{1}{n}$ est strictement inférieur à s. Il existe donc $a_n \in A$ tel que $a_n > s - \frac{1}{n}$.

Or comme a_n appartient à A et $s = \operatorname{Sup} A$ alors $a_n \leqslant s$. On en déduit $s - \frac{1}{n} \leqslant a_n \leqslant s$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad |s - a_n| \leqslant \frac{1}{n}$$

D'après le théorème d'encadrement la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers s. □

C. Lien avec la densité

Proposition - Caractérisation séquentielle de la densité

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) A est dense dans $\mathbb{R}$: tout intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point contient un élément de A.

(ii) Pour tout réel x il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de A convergeant vers x.

Démonstration. Supposons que le point *(i)* est satisfait. Soit x un réel. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'ensemble $\left[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right]$ est un intervalle non réduit à un point, donc il contient un élément de A. Notons a_n un tel élément.

On a construit une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |a_n - x| \leqslant \frac{1}{n}$$

D'après le théorème d'encadrement cette suite converge vers x. Le point *(ii)* est démontré.

Supposons que la partie A satisfait le point *(ii)*. Soit I un intervalle non réduit à un point. Alors cet intervalle contient deux points a et b tels que $a < b$. Posons $c = \frac{a+b}{2}$, et $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$. Alors ε est strictement positif, $c - \varepsilon = a$ et $c + \varepsilon = b$.

Comme c est un réel alors il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de A convergeant vers c. En conséquence, comme $\varepsilon > 0$ alors il existe un entier N tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant N \implies |a_n - c| \leqslant \varepsilon$$

Ceci donne $c - \varepsilon \leqslant a_n \leqslant c + \varepsilon$, donc $a_n \in [a, b]$. Comme a et b sont deux éléments de I et I est un intervalle alors $[a, b] \subseteq I$, donc $a_n \in I$. Ainsi I contient bien un élément de A. Le point *(i)* est démontré.

On a démontré par double implication que les points *(i)* et *(ii)* sont équivalents. □

▷ **Exercice 14.**

D. Suites adjacentes

Définition

Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites *adjacentes* si

- L'une est croissante et l'autre est décroissante.
- La suite $(v_n - u_n)$ converge vers 0.

Théorème

Si deux suites sont adjacentes alors elles convergent vers la même limite.

Démonstration. Quitte à inverser les deux suites, on suppose que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante. On démontre le théorème en trois étapes.

1. Montrons que $(u_n) \leqslant (v_n)$:

Comme (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} \geqslant u_n \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} \leqslant v_n$$

Ceci implique :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant v_n - u_n$$

donc la suite $(v_n - u_n)$ est décroissante. Par hypothèse cette suite converge vers 0, donc 0 est sa borne inférieure, et ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad v_n - u_n \geqslant 0 \qquad \text{donc} \qquad u_n \leqslant v_n$$

2. Montrons que (u_n) et (v_n) sont convergentes :

La suite (u_n) est croissante, donc minorée par u_0. La suite (v_n) est décroissante, donc majorée par v_0. Le point précédent donne :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$$

La suite (u_n) est croissante et majorée par v_0, donc par théorème elle converge.

La suite (v_n) est décroissante et minorée par u_0, donc par théorème elle converge.

3. Montrons que leurs limites sont égales :

Soit $\ell = \lim u_n$, $\ell' = \lim v_n$. Comme $\lim(v_n - u_n) = 0$ alors $\ell' - \ell = 0$, puis $\ell = \ell'$.

Ainsi (u_n) est (v_n) convergent vers la même limite. □

▷ **Exercice 15.**

IV. Suites extraites

A. Généralités

Définition

Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante, et (u_n) une suite. La suite

$$(u_{\varphi(n)}) = (u_{\varphi(0)}, u_{\varphi(1)}, u_{\varphi(2)}, \dots)$$

est dite *extraite* de la suite (u_n).

Exemples. Les suites suivantes sont extraites de la suite (u_n) :

$$\begin{array}{lcl} (u_{2n}) & = & (u_0, u_2, u_4, \dots) \\ (u_{2n+1}) & = & (u_1, u_3, u_5, \dots) \\ (u_{n^3}) & = & (u_0, u_1, u_8, u_{27}, \dots) \end{array}$$

Théorème

Si une suite (u_n) admet une limite alors toutes ses suites extraites admettent la même limite.

Démonstration. Soit $(u_{\varphi(n)})$ une suite extraite d'une suite (u_n) admettant ℓ pour limite. On suppose que ℓ est un réel, les cas où ℓ est infini sont similaires.

Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$n \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Si $n \geqslant N$ alors $\varphi(n) \geqslant N$ (car $\varphi(n) \geqslant n$, voir lemme ci-dessous). Ceci montre que :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad \left|u_{\varphi(n)} - \ell\right| \leqslant \varepsilon$$

La suite $(u_{\varphi(n)})$ converge bien vers ℓ. □

Lemme

Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante. Alors $\varphi(n) \geqslant n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Par récurrence, sachant que si p et q sont deux entiers alors :

$$p > q \quad \Longrightarrow \quad p \geqslant q + 1$$ □

▷ **Exercice 16.**

Remarque : décalage. Soit (u_n) une suite admettant une limite. Pour tout $p \in \mathbb{N}$ la suite

$$(u_{n+p})_{n \in \mathbb{N}} = (u_p, u_{p+1}, u_{p+2}, \dots)$$

admet la même limite.

On peut aussi décaler dans l'autre sens, mais alors la suite n'est définie que pour $n \geqslant p$:

$$(u_{n-p})_{n \geqslant p} = (u_0, u_1, \dots) = (u_n)_{n \geqslant 0}$$

Dans ce cas également la suite admet la même limite, mais ce n'est pas conséquence du théorème précédent.

Proposition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Si les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers la même limite (finie ou infinie) alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend aussi vers cette limite.

Démonstration. On traite le cas où les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent. Les cas où la limite est infinie sont similaires.

Supposons que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une limite commune ℓ.

Démontrons que la suite (u_n) converge également vers ℓ.

Soit ε un réel strictement positif. Comme les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers ℓ alors il existe deux entiers N_0 et N_1 tels que :

$$\begin{array}{lccc} \forall n \in \mathbb{N} & & n \geqslant N_0 \implies & |u_{2n} - \ell| \leqslant \varepsilon \\ & \text{et} & n \geqslant N_1 \implies & |u_{2n+1} - \ell| \leqslant \varepsilon \end{array}$$

De façon équivalente :

$$\begin{array}{lcccc} \forall k \in \mathbb{N} & & 2k \geqslant 2N_0 \implies & |u_{2k} - \ell| \leqslant \varepsilon & (1) \\ & \text{et} & 2k+1 \geqslant 2N_1+1 \implies & |u_{2k+1} - \ell| \leqslant \varepsilon & (2) \end{array}$$

On pose $N = \operatorname{Max}\{2N_0, 2N_1+1\}$.

Soit n un entier supérieur à N. Alors n est supérieur à $2N_0$ et à $2N_1+1$.

De plus n est pair ou impair.

Si n est pair alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$. On a supposé que $n \geqslant 2N_0$, donc $2k \geqslant 2N_0$, puis (1) donne $|u_{2k} - \ell| \leqslant \varepsilon$ et donc $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.

Si n est impair alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$. On a supposé que $n \geqslant 2N_1+1$, donc $2k+1 \geqslant 2N_1+1$, puis (2) donne $|u_{2k+1} - \ell| \leqslant \varepsilon$ et donc $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.

Finalement, que n soit impair ou pair on a obtenu $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$. On a donc démontré :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists N \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant N \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Ceci prouve que la suite (u_n) converge vers ℓ. □

B. Théorème de Bolzano-Weierstrass

Théorème de Bolzano-Weierstrass

Toute suite bornée admet une suite extraite convergente.

Démonstration dans le cas réel. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée, m et M un minorant et un majorant de (u_n), si bien que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad m \leqslant u_n \leqslant M$$

On démontre le théorème en trois étapes.

1. Construction d'une suite de segments emboîtés.

On applique le procédé de dichotomie pour construire par récurrence deux suites (a_n) et (b_n) telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$ le segment $[a_n, b_n]$ contienne une infinité de termes de la suite u.

Initialisation. On pose $a_0 = m$, $b_0 = M$. Comme la suite (u_n) est incluse dans le segment $[m, M]$ alors le segment $[a_0, b_0]$ contient une infinité de termes u_n puisqu'il les contient tous.

De plus $b_0 - a_0 = M - m$, donc le segment $[a_0, b_0]$ est de longueur $M - m$.

Hérédité. Supposons définis deux réels a_n et b_n tels que le segment $[a_n, b_n]$ contienne une infinité de termes de la suite u.

Soit $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$. Alors l'un des segments $[a_n, c_n]$ et $[c_n, b_n]$ contient une infinité de termes u_k. De plus : $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$.

Si $[a_n, c_n]$ est dans ce cas alors on définit $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$. Sinon on définit $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$. Alors le segment $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ contient une infinité de termes u_k.

Dans les deux cas : $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$ et $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n-a_n}{2}$

En effet :

$$\begin{aligned} & b_{n+1} - a_{n+1} = c_n - a_n = \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} \\ \text{ou} \qquad & b_{n+1} - a_{n+1} = b_n - c_n = b_n - \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{b_n - a_n}{2} \end{aligned}$$

Conclusion. On a construit par récurrence deux suites (a_n) et (b_n) telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$ le segment $[a_n, b_n]$ contienne une infinité de termes de la suite u.

De plus on a démontré que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n \leqslant a_{n+1} \qquad b_{n+1} \leqslant b_n \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2}$$

Les deux premières inégalités montrent que la suite (a_n) est croissante et la suite (b_n) est décroissante. La troisième égalité montre que la suite $(b_n - a_n)$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Son premier terme est $b_0 - a_0 = M - m$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad b_n - a_n = \frac{M - m}{2^n}$$

Ainsi la suite $(b_n - a_n)$ converge vers 0.

Finalement (a_n) est croissante, (b_n) est décroissante, leur différence converge vers 0 donc ces deux suites sont adjacentes.

Par théorème elles convergent vers une limite ℓ.

2. Construction d'une suite extraite.

On construit par récurrence une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ encadrée par les suites (a_n) et (b_n).

Initialisation. On pose $\varphi(0) = 0$, si bien que $u_{\varphi(0)} = u_0$. Alors $u_{\varphi(0)} \in [m, M]$ car le segment $[m, M]$ contient toute la suite (u_n). Ainsi $a_0 \leqslant u_{\varphi(0)} \leqslant b_0$.

Hérédité. Supposons défini $u_{\varphi(n)}$ avec $a_n \leqslant u_{\varphi(n)} \leqslant b_n$.

Le segment $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ contient une infinité de termes u_k. Il contient donc un u_k pour k strictement supérieur à $\varphi(n)$, puisque $\varphi(n)$ est fini. On pose $\varphi(n+1) = k$, si bien que $\varphi(n+1) > \varphi(n)$, et $a_{n+1} \leqslant u_{\varphi(n+1)} \leqslant b_{n+1}$.

Conclusion. On a construit par récurrence une suite $(u_{\varphi(n)})$ comprise entre les suites (a_n) et (b_n). Cette suite est bien extraite de la suite (u_n) car la fonction φ est strictement croissante : $\forall n \in \mathbb{N} \qquad \varphi(n+1) > \varphi(n)$

3. La suite extraite est convergente.

On sait que : $\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n \leqslant u_{\varphi(n)} \leqslant b_n$

De plus les suites (a_n) et (b_n) convergent vers le même réel ℓ.

Par théorème d'encadrement la suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ converge vers ℓ.

On a démontré que la suite (u_n) admet une suite extraite convergente. □

Démonstration dans le cas complexe. Soit (u_n) une suite complexe bornée.

On sait que pour tout complexe z : $|\mathrm{Re}\, z| \leqslant |z| \quad$ et $\quad |\mathrm{Im}\, z| \leqslant |z|$.

Ceci montre que les suites réelles $(\mathrm{Re}(u_n))$ et $(\mathrm{Im}(u_n))$ sont bornées.

D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass dans le cas réel il existe une suite extraite $(\mathrm{Re}(u_{\varphi(n)}))$ convergente.

La suite $(\mathrm{Im}(u_{\varphi(n)}))$ est extraite de la suite $(\mathrm{Im}(u_n))$ donc elle est bornée, et d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass dans le cas réel il existe une suite extraite $(\mathrm{Im}(u_{\varphi\circ\psi(n)}))$ convergente.

La suite $(\mathrm{Re}(u_{\varphi\circ\psi(n)}))$ est extraite de la suite $(\mathrm{Re}(u_{\varphi(n)}))$ qui est convergente donc elle est convergente.

Les deux suites $(\mathrm{Re}(u_{\varphi\circ\psi(n)}))$ et $(\mathrm{Im}(u_{\varphi\circ\psi(n)}))$ sont convergentes donc la suite extraite $(u_{\varphi\circ\psi(n)})$ est convergente. □

C. Valeurs d'adhérence

Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Un réel a est *valeur d'adhérence* de la suite (u_n) si :

Remarque. De façon équivalente, le réel a est valeur d'adhérence de la suite (u_n) si pour tout $\varepsilon > 0$ l'intervalle $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ contient une infinité de termes de la suite.

Proposition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et a un réel. Alors a est valeur d'adhérence de la suite (u_n) si et seulement s'il existe une suite extraite de (u_n) convergeant vers a.

Démonstration. Soit a une valeur d'adhérence de la suite (u_n).

On construit par récurrence une suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers a.

Initialisation. On pose $\varphi(0) = 0$.

Hérédité. Supposons, pour un $k \in \mathbb{N}$, que $\varphi(k)$ est défini. Soit $N = \varphi(k) + 1$. Comme a est valeur d'adhérence alors il existe $n \geqslant N$ tel que $|u_n - a| \leqslant \frac{1}{k+1}$. On pose $\varphi(k+1) = n$. Alors $\varphi(k+1) > \varphi(k)$ et $\left|u_{\varphi(k+1)} - a\right| \leqslant \frac{1}{k+1}$.

Conclusion. On a construit une suite extraite $(u_{\varphi(k)})$ car la fonction φ est strictement croissante. D'après le théorème d'encadrement cette suite converge vers a.

Réciproquement, supposons qu'il existe une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ convergeant vers a. Soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$. Alors il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant M \quad \Longrightarrow \quad \left|u_{\varphi(n)} - a\right| \leqslant \varepsilon$$

Ainsi par exemple pour $n = \operatorname{Max}\{N, M\}$ on a $\left|u_{\varphi(n)} - a\right| \leqslant \varepsilon$.

Ceci montre que a est valeur d'adhérence de la suite (u_n), et achève la démonstration. □

Remarques.

- Le théorème de Bolzano-Weierstrass peut donc s'énoncer : toute suite bornée admet une valeur d'adhérence.
- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Les valeurs d'adhérence de (u_n) sont les limites des suites extraites convergentes de (u_n).

Exemple. La suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet deux valeurs d'adhérences : 1 et -1.