Chapitre A7
Suites

I. Généralités

A. Notations

Une suite indexée par $\mathbb{N}$ est une application :

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto u_n \end{aligned}$$

On note u_n l'image de l'entier n par l'application u, au lieu de $u(n)$.

Une suite peut être notée : u ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_0, u_1, u_2, \ldots)$

On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à valeurs réelles indexées par $\mathbb{N}$.

On considère parfois des suites indexées par $\mathbb{N}^*$. Par exemple $(u_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ est implicitement indexée par $\mathbb{N}^*$.

Modes de définition :

On peut définir une suite de plusieurs façons :

- Définition explicite : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 3^n - 2$
- Définition par récurrence : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 1 - u_n^2/2$
- Définition implicite : pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit u_n la solution positive de l'équation $x^n + x - 1$.

B. Opérations

- Addition : si u et v sont deux suites, alors $u + v$ est la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (u+v)_n = u_n + v_n \qquad \text{ou} \qquad u + v = (u_0 + v_0, u_1 + v_1, \ldots)$$

- Multiplication : si u et v sont deux suites, alors uv est la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (uv)_n = u_n v_n \qquad \text{ou} \qquad uv = (u_0 v_0, u_1 v_1, \ldots)$$

- Multiplication par un scalaire : si u est une suite et λ un réel alors λu est la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (\lambda u)_n = \lambda u_n \qquad \text{ou} \qquad \lambda u = (\lambda u_0, \lambda u_1, \ldots)$$

C. Définitions de base

Définitions. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite

constante	si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_{n+1}$
croissante	si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant u_{n+1}$
décroissante	si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geqslant u_{n+1}$
monotone	si elle est croissante ou décroissante
strictement croissante	si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n < u_{n+1}$
strictement décroissante	si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > u_{n+1}$
strictement monotone	si elle est strictement croissante ou strictement décroissante

majorée si

minorée si

bornée si

périodique si

stationnaire si

Remarques.

(i) Si λ est un réel, on note $(\lambda)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite constante égale à λ.

(ii) La suite (u_n) est bornée si et seulement si la suite $(|u_n|)$ est majorée.

(iii) On dit qu'une propriété sur une suite (u_n) est vraie à partir d'un certain rang si il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que cette propriété est vraie pour tout $n \geqslant N$.

Exemple. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive à partir d'un certain rang si :

▷ **Exercice 1.**

II. Suites classiques

A. Suites arithmétiques

Définition. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique s'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = u_n + r}$$

On dit alors que r est la raison de la suite arithmétique (u_n).

Proposition. *Le terme général d'une suite arithmétique (u_n) de raison r est :*

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = u_0 + nr}$$

Remarque. La somme des premiers termes d'une suite arithmétique se déduit de la formule :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 1 + 2 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

La somme des $n+1$ premiers termes d'une suite arithmétique (u_n) de raison r est :

B. Suites géométriques

Définition. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique s'il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = q u_n}$$

On dit alors que q est la raison de la suite géométrique (u_n).

Proposition. *Le terme général d'une suite géométrique (u_n) de raison q est :*

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = u_0 q^n}$$

Proposition. *La suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$*
- *converge vers 0 si $|q| < 1$*
- *converge vers 1 si $q = 1$*
- *diverge dans tous les autres cas.*

Proposition - Somme des termes d'une suite géométrique. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q. Alors pour tous entiers m, M tels que $0 \leqslant m \leqslant M$:*

C. Suites arithmético-géométriques

Définition. Une suite (u_n) est arithmético-géométrique s'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = au_n + b}$$

Remarque. On suppose dans la suite que $a \neq 1$ (sinon la suite est arithmétique).

Méthode.

- Introduire le réel γ tel que $\gamma = a\gamma + b$.
- Vérifier que la suite $(v_n) = (u_n - \gamma)$ est géométrique.
- En déduire le terme général de (v_n), puis celui de (u_n).

Exemple 1. Déterminer le terme général de la suite définie par :

$$u_0 = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 3u_n - 4$$

▷ **Exercice 2.**

D. Suites double-récurrentes linéaires

Définition. Une suite double-récurrente linéaire est définie par la donnée de u_0, u_1 et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+2} = \lambda u_{n+1} + \mu u_n$$

où λ et μ sont deux scalaires.

Remarque. On se ramène à la relation

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$$

avec a non-nul.

Définition. On définit l'équation caractéristique associée à la suite :

$$(C) \qquad a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

Théorème. *Avec les notations précédentes, en notant Δ le discriminant de (C) :*

- *Si $\Delta \neq 0$ alors l'équation (C) admet deux solutions λ_1 et λ_2. Le terme général de la suite (u_n) est :*
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n$$
où α et β sont deux constantes.
- *Si $\Delta = 0$ alors l'équation (C) admet une unique solution λ_0. Le terme général de la suite (u_n) est :*
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (\alpha n + \beta)\lambda_0^n$$
où α et β sont deux constantes.

Méthode. Les constantes α et β sont calculées grâce aux valeurs de u_0 et u_1.

Exemple 2. Déterminer le terme général des suites définies par :

$$\begin{array}{lllll} (i) & u_0 = -2 & u_1 = -1 & \forall n \in \mathbb{N} & u_{n+2} = 7u_{n+1} - 10u_n \\ (ii) & v_0 = -1 & v_1 = 1 & \forall n \in \mathbb{N} & v_{n+2} = v_{n+1} - \frac{1}{4}v_n \end{array}$$

▷ **Exercices 3, 4.**

III. Limites

A. Compléments sur les réels

Propriété de la borne supérieure. (Axiome admis)

Toute partie non-vide majorée de $\mathbb{R}$ admet un plus petit majorant.

Propriété de la borne inférieure.

Toute partie non-vide minorée de $\mathbb{R}$ admet un plus grand minorant.

Définitions. Soit A une partie non-vide majorée. On appelle borne supérieure de A le plus petit de ses majorants. On le note $\mathrm{Sup}(A)$.

Soit A une partie non-vide minorée. On appelle borne inférieure de A le plus grand de ses minorants. On le note $\mathrm{Inf}(A)$.

Remarque. La propriété de la borne supérieure n'est pas vérifiée par $\mathbb{Q}$.

Proposition. *Soit A une partie non-vide majorée de $\mathbb{R}$ et s un réel. Alors $s = \mathrm{Sup}(A)$ si et seulement si :*

Remarques.

(i) On dit *un* majorant et *la* borne supérieure.

(ii) Si $s = \mathrm{Sup}\, A$ et M est un majorant de A alors

▷ **Exercices 5, 6, 7.**

Proposition - Définition. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et b un majorant de A* appartenant *à A. Alors b est la borne supérieure de A.*

On dit que b est le maximum de A, et on note $b = \mathrm{Max}(A)$.

De même, si a est un minorant de A appartenant à A alors a est la borne inférieure de A. On dit que a est le minimum de A et on note $a = \mathrm{Min}(A)$.

Exemple 3. L'intervalle $[-5, 4[$ admet un minimum mais pas de maximum.

Remarque. Si une partie A est finie et non-vide alors elle admet un minimum et un maximum.

Définition. Si une suite (u_n) est majorée, alors sa borne supérieure est le plus petit de ses majorants. C'est le réel s tel que :

Remarques.

(i) En d'autres termes la borne supérieure de la suite (u_n) est la borne supérieure de l'ensemble $U = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

(ii) On définit de même la borne inférieure, le maximum et le minimum d'une suite.

Notations. On note ces réels, s'il sont définis : $\operatorname*{Sup}_{n\in\mathbb{N}} u_n \quad \operatorname*{Inf}_{n\in\mathbb{N}} u_n \quad \operatorname*{Max}_{n\in\mathbb{N}} u_n \quad \operatorname*{Min}_{n\in\mathbb{N}} u_n$

▷ **Exercice 8.**

Résumé. Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- Un majorant de A est un réel plus grand que tous les éléments de A.
- La borne supérieure est le plus petit des majorants.
- La maximum est la borne supérieure lorsqu'elle appartient à A.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

- Un majorant de (u_n) est un réel plus grand que tous les éléments de u_n.
- La borne supérieure est le plus petit des majorants.
- La maximum est un u_n plus grand que tous les autres.

B. Suites convergentes

Définitions. Soit ℓ un réel. On dit qu'une suite (u_n) converge vers ℓ si :

On note alors : $u_n \to \ell$

On dit qu'une suite (u_n) est convergente s'il existe un réel ℓ tel que (u_n) converge vers ℓ.

Une suite est divergente si elle n'est pas convergente.

Exemple. La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

▷ **Exercice 9.**

Proposition (Unicité de la limite). *Si (u_n) converge vers ℓ et vers ℓ', alors $\ell = \ell'$.*

Définition. Si (u_n) converge vers ℓ alors on dit que ℓ est la limite de la suite (u_n). On note :

$$\lim u_n = \ell \qquad \text{ou} \qquad \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

Démonstration dans le cas réel.

Remarque. Dans le cas où (u_n) est une suite à valeurs complexes, on utilise l'inégalité triangulaire. Si

$$|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon \qquad \text{et} \qquad |u_n - \ell'| \leqslant \varepsilon$$

alors :

$$|\ell' - \ell| = |(u_n - \ell) - (u_n - \ell')| \leqslant |u_n - \ell| + |u_n - \ell'| \leqslant 2\varepsilon$$

On obtient une contradiction en choisissant $\varepsilon = \frac{1}{3}|\ell - \ell'|$.

Exemple 4. Soit (u_n) une suite d'entiers : $(u_n) \subseteq \mathbb{Z}$.

Démontrer que si (u_n) est convergente alors elle est stationnaire.

Théorème. *Toute suite convergente est bornée.*

Démonstration.

▷ **Exercice 10.**

C. Opérations sur les limites

Théorème. *Soit (u_n) et (v_n) deux suites convergentes, de limites ℓ et ℓ'. Soit λ un réel. Alors*

(i) *La suite $(u_n + v_n)$ converge vers $\ell + \ell'$.*
(ii) *La suite (λu_n) converge vers $\lambda\ell$.*
(iii) *La suite $(u_n v_n)$ converge vers $\ell\ell'$.*
(iv) *La suite $|u_n|$ converge vers $|\ell|$.*
(v) *Si $\ell \neq 0$, alors la suite (u_n) est non-nulle à partir d'un certain rang, et la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ converge vers $\frac{1}{\ell}$.*

Corollaire. *De plus :*

(vi) *Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ la suite $(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge vers $\lambda\ell + \mu\ell'$.*
En d'autres termes, les combinaisons linéaires des suites (u_n) et (v_n) convergent.
(vii) *Si $\ell' \neq 0$ alors la suite quotient $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers $\frac{\ell}{\ell'}$.*

Démonstration du corollaire.

Le point *(vi)* est conséquence des points *(ii)* et *(i)*.

Le point *(vii)* est conséquence des points *(v)* et *(iii)*. □

Lemme 1. *Une suite (u_n) converge vers ℓ si et seulement si la suite $(u_n - \ell)$ converge vers 0.*

Démonstration. Immédiat. □

Lemme 2. *Si* (u_n) *est une suite convergeant vers 0 et* (v_n) *est une suite bornée, alors la suite* $(u_n v_n)$ *converge vers 0.*

Démonstration.

Démonstration du théorème.

(i) D'après le lemme 1, il suffit de démontrer que si (u_n) et (v_n) convergent vers 0 alors $(u_n + v_n)$ converge vers 0.

(ii) La suite constante (λ) est bornée, donc d'après le lemme 2 si la suite (u_n) converge vers 0, alors la suite (λu_n) converge vers 0.

Maintenant si la suite (u_n) converge vers ℓ, alors d'après le lemme 1 la suite $(u_n - \ell)$ converge vers 0, donc la suite $(\lambda u_n - \lambda\ell)$ converge vers 0, et ainsi la suite (λu_n) converge vers $\lambda\ell$.

(iii) On écrit :

La suite (v_n) est bornée car convergente, la suite $(u_n - \ell)$ converge vers 0 d'après le lemme 1, donc d'après le lemme 2 la suite $(v_n(u_n - \ell))$ converge vers 0.

La suite $(v_n - \ell')$ converge vers 0 d'après le lemme 1, donc la suite $(\ell(v_n - \ell'))$ converge vers 0 d'après le *(ii)*.

D'après le *(i)*, la suite $(v_n(u_n - \ell) + \ell(v_n - \ell'))$ converge vers 0.

D'après le lemme 1, la suite $(u_n v_n)$ converge vers $\ell\ell'$.

(iv) On utilise l'inégalité triangulaire :

$$||u_n| - |\ell|| \leqslant |u_n - \ell|$$

(v) D'après l'exercice 10 la suite (u_n) est non-nulle à partir d'un certain rang. On écrit :

Comme la suite (ℓu_n) converge vers ℓ^2 qui est non-nul, alors elle est bornée à partir d'un certain rang par deux réels strictement positifs. La suite $\left(\frac{1}{\ell u_n}\right)$ est donc également bornée.

De plus la suite $(u_n - \ell)$ converge vers 0 donc par produit alors la suite $\left(\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right)$ converge vers 0, et ainsi la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ converge vers $\frac{1}{\ell}$. □

D. Limites et inégalités

Lemme. *Soit (w_n) une suite convergente.*

Si (w_n) est positive à partir d'un certain rang alors $\lim w_n$ est positive.

Si (w_n) est négative à partir d'un certain rang alors $\lim w_n$ est négative.

Démonstration.

Théorème de comparaison.

Soit (u_n) et (v_n) deux suites convergentes.

(i) Si à partir d'un certain rang $u_n < v_n$ *alors* $\lim u_n \leqslant \lim v_n$.

(ii) Si à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n$ *alors* $\lim u_n \leqslant \lim v_n$.

Démonstration. Le est conséquence du donc il suffit de démontrer celui-ci.

On pose $w_n = v_n - u_n$. Alors la suite (w_n) est positive à partir d'un certain rang, et par opérations sur les limites elle converge vers $\lim v_n - \lim u_n$.

On déduit du lemme précédent que la limite de w_n est positive, donc $\lim u_n \leqslant \lim v_n$. $\square$

Remarque. L'implication $(\forall n \geqslant N \quad u_n < v_n) \implies \lim u_n < \lim v_n$ est fausse.

Exemple. Soit $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ et $v_n = 1 + \frac{1}{n}$. Alors : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n < v_n$

Pourtant la limite de (u_n) n'est pas strictement inférieure à celle de (v_n), puisqu'elles valent 1 toutes les deux.

E. Limites infinies

Définition. Une suite (u_n) tend vers $+\infty$ si :

On note alors : $\lim u_n = +\infty$ ou $u_n \to +\infty$

Une suite (u_n) tend vers $-\infty$ si :

On note alors : $\lim u_n = -\infty$ ou $u_n \to -\infty$

Remarque. Si (u_n) tend vers $+\infty$ alors $(-u_n)$ tend vers $-\infty$, et vice-versa.
Plus généralement, pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$, si (u_n) tend vers $+\infty$ alors (λu_n) tend vers $\mathrm{sgn}(\lambda)\infty$.

Théorème.

(i) Si la suite (u_n) tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ alors la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ converge vers 0.

(ii) Si la suite (u_n) converge vers 0 et est strictement positive à partir d'un certain rang, alors la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ tend vers $+\infty$.
Si la suite (u_n) converge vers 0 et est strictement négative à partir d'un certain rang, alors la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ tend vers $-\infty$.

Démonstration.
(i)

(ii) Supposons que la suite (u_n) converge vers 0 et est strictement positive à partir d'un certain rang.
Soit A un réel.
Si A est négatif alors il est clair qu'à partir d'un certain rang : $\left|\frac{1}{u_n}\right| \geqslant A$.
Si A est strictement positif alors $\varepsilon = \frac{1}{A}$ est strictement positif, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant N \Longrightarrow |u_n| \leqslant \frac{1}{A}$$

Ceci donne

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant N \Longrightarrow \left|\frac{1}{u_n}\right| \geqslant A$$

Comme u_n est strictement positive à partir d'un certain rang alors quitte à augmenter N on peut supposer que $\left|\frac{1}{u_n}\right| = \frac{1}{u_n}$.
On a démontré que

$$\forall A \in \mathbb{R} \qquad \exists N \in \mathbb{N} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant N \Longrightarrow \frac{1}{u_n} > A$$

donc la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ tend vers $+\infty$.
Le cas où (u_n) est strictement négative à partir d'un certain rang se déduit de ce cas en remplaçant u_n par $-u_n$. □

Définitions. On dit qu'une suite admet une limite si elle converge ou tend vers $\pm\infty$.
Dans ce cas sa limite est élément de :

Cet ensemble est appelé droite numérique achevée.

Rappel : Calculs de limites.

(i) Si (u_n) tend vers $+\infty$ et (v_n) est minorée (par exemple parce qu'elle est convergente, ou tend vers $+\infty$), alors $(u_n + v_n)$ tend vers $+\infty$.

(ii) Si (u_n) tend vers $+\infty$ et (v_n) est minorée par un réel strictement positif à partir d'un certain rang (par exemple parce qu'elle converge vers un réel positif ou tend vers $+\infty$) alors $(u_n v_n)$ tend vers $+\infty$.

Les formes indéterminées sont :

Exemple 5. Dans les cas ci-dessus toutes les limites sont possibles.

▷ **Exercice 11.**

IV. Théorèmes d'existence de limite

A. Encadrement

Théorème de divergence par comparaison.
Soit (u_n) *et* (v_n) *deux suites, telles que* $u_n \leqslant v_n$ *à partir d'un certain rang.*

(i) Si (u_n) *tend vers* $+\infty$ *alors* (v_n) *tend vers* $+\infty$.
(ii) Si (v_n) *tend vers* $-\infty$ *alors* (u_n) *tend vers* $-\infty$.

Démonstration.

Théorème d'encadrement.
Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites. On suppose qu'il existe un entier N tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$$

i.e., $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ *à partir d'un certain rang.*
Si les suites (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite ℓ, alors la suite (v_n) converge vers ℓ.

Remarque. Ce théorème est un théorème d'existence de limite, il prouve d'abord que la suite (v_n) est convergente, puis qu'elle converge vers ℓ.

Exemple 6. Soit (u_n) et (v_n) deux suites *positives* telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n \leqslant v_n$$

Si (v_n) converge vers 0 alors (u_n) converge vers 0.

Démonstration.

Exemple 7. Convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\frac{\lfloor nx \rfloor}{n}\right)$ où x est un réel.

▷ **Exercice 12.**

B. <u>Suites monotones</u>

Rappel. Selon la propriété de la borne supérieure, toute partie non-vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure, c'est-à-dire un plus petit majorant.

Théorème. *Toute suite monotone admet une limite. Plus précisément :*
Soit (u_n) une suite croissante.
(i) Si (u_n) est majorée alors elle est convergente.
(ii) Si (u_n) n'est pas majorée alors elle tend vers $+\infty$.
Soit (u_n) une suite décroissante.
(i) Si (u_n) est minorée alors elle est convergente.
(ii) Si (u_n) n'est pas minorée alors elle tend vers $-\infty$.

<u>Démonstration</u>. Supposons que la suite (u_n) est croissante.

On démontre le théorème dans le cas où la suite (u_n) est décroissante de la même façon, ou en appliquant le théorème pour la suite $(-u_n)$. □

Théorème (complément).

- *Une suite croissante majorée converge vers sa borne supérieure.*
- *Une suite décroissante minorée converge vers sa borne inférieure.*

Proposition. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non-vide majorée. Alors il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de A convergeant vers* $\operatorname{Sup} A$.

Démonstration. Soit $s = \operatorname{Sup} A$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ le réel $s - \frac{1}{n}$ est strictement inférieur à s. Il existe donc $a_n \in A$ tel que $a_n > s - \frac{1}{n}$.

Or comme a_n appartient à A et $s = \operatorname{Sup} A$ alors $a_n \leqslant s$. On en déduit $s - \frac{1}{n} \leqslant a_n \leqslant s$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad |s - a_n| \leqslant \frac{1}{n}$$

D'après le théorème d'encadrement la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers s. □

C. Applications

1) Lien avec la densité

Proposition - Caractérisation séquentielle de la densité.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) A est dense dans $\mathbb{R}$: tout intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point contient un élément de A.

(ii) Pour tout réel x il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de A convergeant vers x.

Démonstration. Supposons que le point *(i)* est satisfait. Soit x un réel. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'ensemble $\left[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right]$ est un intervalle non réduit à un point, donc il contient un élément de A. Notons a_n un tel élément.

On a construit une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |a_n - x| \leqslant \frac{1}{n}$$

D'après le théorème d'encadrement cette suite converge vers x. Le point *(ii)* est démontré.

Supposons que la partie A satisfait le point *(ii)*. Soit I un intervalle non réduit à un point. Alors cet intervalle contient deux points a et b tels que $a < b$. Posons $c = \frac{a+b}{2}$, et $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$. Alors ε est strictement positif, $c - \varepsilon = a$ et $c + \varepsilon = b$.

Comme c est un réel alors il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de A convergeant vers c. En conséquence, comme $\varepsilon > 0$ alors il existe un entier N tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant N \implies |a_n - c| \leqslant \varepsilon$$

Ceci donne $c - \varepsilon \leqslant a_n \leqslant c + \varepsilon$, donc $a_n \in [a, b]$. Comme a et b sont deux éléments de I et I est un intervalle alors $[a, b] \subseteq I$, donc $a_n \in I$. Ainsi I contient bien un élément de A. Le point *(i)* est démontré.

On a démontré par double implication que les points *(i)* et *(ii)* sont équivalents. □

▷ **Exercice 13.**

2) Suites récurrentes

Définition. Une suite récurrente est une suite définie par la donnée de son premier terme et d'une relation $u_{n+1} = f(u_n)$ valable pour tout n, où f est une fonction.

Méthodes.

- Si la fonction f n'est pas définie sur $\mathbb{R}$ tout entier alors l'existence de la suite doit être justifiée par la proposition suivante.

Définition. Soit D une partie de $\mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction.

Une partie de I de D est stable par f si : $\forall x \in I \quad f(x) \in I$

Proposition. *Si I est stable par f et $u_0 \in I$ alors la suite (u_n) est bien définie et incluse dans I :*

Exemple 8. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{6}{1+u_n}$.

Méthodes (suite).

- L'étude de la fonction f permet de prévoir le comportement de la suite (u_n).
- Si la fonction f est croissante alors la suite (u_n) est monotone. Son sens de variation est déterminé par ses deux premiers termes.

Démonstration.

Remarque. Si f est décroissante alors (u_n) n'est ni croissante ni décroissante.

Méthode (suite).

- On peut appliquer les théorèmes d'existence de limite pour démontrer que la suite est convergente ou divergente.
- Si la suite (u_n) est convergente et f est continue alors la limite ℓ de (u_n) est un point fixe de f : $f(\ell) = \ell$
- La fonction $h : x \mapsto f(x) - x$ peut aussi donner des indications.
  En effet si h est positive alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et si h est négative alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
  De plus si f est continue et (u_n) converge vers ℓ alors $h(\ell) = 0$.

Proposition. *Soit (u_n) une suite vérifiant une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est une fonction continue. On suppose que la suite (u_n) est convergente.*
Alors sa limite ℓ est un point fixe de f : $f(\ell) = \ell$

Démonstration.

▷ **Exercice 14.**

D. Suites adjacentes

Définition. Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes si

(i) L'une est croissante et l'autre est décroissante.

(ii) La suite $(v_n - u_n)$ converge vers 0.

Théorème. *Si deux suites sont adjacentes alors elles convergent vers la même limite.*

Démonstration. Quitte à inverser les deux suites, on suppose que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante. On démontre le théorème en trois étapes.

1. Montrons que $(u_n) \leqslant (v_n)$:

Comme (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} \geqslant u_n \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} \leqslant v_n$$

Ceci implique :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant v_n - u_n$$

donc la suite $(v_n - u_n)$ est décroissante. Par hypothèse cette suite converge vers 0, donc 0 est sa borne inférieure, et ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad v_n - u_n \geqslant 0 \qquad \text{donc} \qquad u_n \leqslant v_n$$

2. Montrons que (u_n) et (v_n) sont convergentes :

La suite (u_n) est croissante, donc minorée par u_0. La suite (v_n) est décroissante, donc majorée par v_0. Le point précédent donne :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$$

La suite (u_n) est croissante et majorée par v_0, donc par théorème elle converge.

La suite (v_n) est décroissante et minorée par u_0, donc par théorème elle converge.

3. Montrons que leurs limites sont égales :

Soit $\ell = \lim u_n$, $\ell' = \lim v_n$. Comme $\lim(v_n - u_n) = 0$ alors $\ell' - \ell = 0$, puis $\ell = \ell'$.

Ainsi (u_n) est (v_n) convergent vers la même limite. □

▷ **Exercice 15.**

V. Suites extraites

A. Généralités

Définition. Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante, et (u_n) une suite. La suite

$$(u_{\varphi(n)}) = (u_{\varphi(0)}, u_{\varphi(1)}, u_{\varphi(2)}, \ldots)$$

est dite extraite de la suite (u_n).

Exemples. Les suites suivantes sont extraites de la suite (u_n) :

$$\begin{array}{lcl} (u_{2n}) & = & (u_0, u_2, u_4, \ldots) \\ (u_{2n+1}) & = & (u_1, u_3, u_5, \ldots) \\ (u_{n^3}) & = & (u_0, u_1, u_8, u_{27}, \ldots) \end{array}$$

Théorème. *Si une suite (u_n) admet une limite alors toutes ses suites extraites admettent la même limite.*

Démonstration. Soit $(u_{\varphi(n)})$ une suite extraite d'une suite (u_n) admettant ℓ pour limite.

On suppose que ℓ est un réel, les cas où ℓ est infini sont similaires.

Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$n \geqslant N \qquad \Longrightarrow \qquad |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Si $n \geqslant N$ alors $\varphi(n) \geqslant N$ (car $\varphi(n) \geqslant n$, voir lemme ci-dessous). Ceci montre que :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists N \in \mathbb{N} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad \left|u_{\varphi(n)} - \ell\right| \leqslant \varepsilon$$

La suite $(u_{\varphi(n)})$ converge bien vers ℓ. □

Lemme. *Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante. Alors $\varphi(n) \geqslant n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Démonstration. Par récurrence, sachant que si p et q sont deux entiers alors :

$$p > q \qquad \Longrightarrow \qquad p \geqslant q + 1$$

□

▷ **Exercice 16.**

Remarque : décalage. Soit (u_n) une suite admettant une limite. Pour tout $p \in \mathbb{N}$ la suite

$$(u_{n+p}) = (u_p, u_{p+1}, u_{p+2}, \ldots)$$

admet la même limite.

On peut aussi décaler dans l'autre sens :

$$(u_{n-p}) = (0, \ldots, 0, u_0, u_1, \ldots)$$

Dans ce cas également la suite admet la même limite, mais ce n'est pas conséquence du théorème précédent.

Proposition. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite. Si les suites extraites* $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *tendent vers la même limite (finie ou infinie) alors la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend aussi vers cette limite.*

Démonstration. On traite le cas où les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent. Les cas où la limite est infinie sont similaires.

Supposons que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une limite commune ℓ.

Démontrons que la suite (u_n) converge également vers ℓ.

Soit ε un réel strictement positif. Comme les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers ℓ alors il existe deux entiers N_0 et N_1 tels que :

$$\begin{array}{llcl} \forall n \in \mathbb{N} & n \geqslant N_0 & \Longrightarrow & |u_{2n} - \ell| \leqslant \varepsilon \\ \text{et} & n \geqslant N_1 & \Longrightarrow & |u_{2n+1} - \ell| \leqslant \varepsilon \end{array}$$

De façon équivalente :

$$\begin{array}{llcll} \forall k \in \mathbb{N} & 2k \geqslant 2N_0 & \Longrightarrow & |u_{2k} - \ell| \leqslant \varepsilon & (1) \\ \text{et} & 2k+1 \geqslant 2N_1+1 & \Longrightarrow & |u_{2k+1} - \ell| \leqslant \varepsilon & (2) \end{array}$$

On pose $N = \operatorname{Max}\{2N_0, 2N_1+1\}$.

Soit n un entier supérieur à N. Alors n est supérieur à $2N_0$ et à $2N_1+1$.

De plus n est pair ou impair.

Si n est pair alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$. On a supposé que $n \geqslant 2N_0$, donc $2k \geqslant 2N_0$, puis (1) donne $|u_{2k} - \ell| \leqslant \varepsilon$ et donc $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.

Si n est impair alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$. On a supposé que $n \geqslant 2N_1+1$, donc $2k+1 \geqslant 2N_1+1$, puis (2) donne $|u_{2k+1} - \ell| \leqslant \varepsilon$ et donc $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.

Finalement, que n soit impair ou pair on a obtenu $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$. On a donc démontré :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists N \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant N \implies |u_n - \ell| \geqslant \varepsilon$$

Ceci prouve que la suite (u_n) converge vers ℓ. □

B. Théorème de Bolzano-Weierstrass

Théorème de Bolzano-Weierstrass.
Toute suite bornée admet une suite extraite convergente.

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée, m et M un minorant et un majorant de (u_n), si bien que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad m \leqslant u_n \leqslant M$$

On démontre le théorème en trois étapes.

1. Construction d'une suite de segments emboîtés.

On applique le procédé de dichotomie pour construire par récurrence deux suites (a_n) et (b_n) telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$ le segment $[a_n, b_n]$ contienne une infinité de termes de la suite u.

Initialisation. On pose $a_0 = m$, $b_0 = M$. Comme la suite (u_n) est incluse dans le segment $[m, M]$ alors le segment $[a_0, b_0]$ contient une infinité de termes u_n puisqu'il les contient tous.

De plus $b_0 - a_0 = M - m$, donc le segment $[a_0, b_0]$ est de longueur $M - m$.

Hérédité. Supposons définis deux réels a_n et b_n tels que le segment $[a_n, b_n]$ contienne une infinité de termes de la suite u.

Soit $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$. Alors l'un des segments $[a_n, c_n]$ et $[c_n, b_n]$ contient une infinité de termes u_k. De plus : $\quad a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$.

Si $[a_n, c_n]$ est dans ce cas alors on définit $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$. Sinon on définit $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$. Alors le segment $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ contient une infinité de termes u_k.

Dans les deux cas : $\quad a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \qquad$ et $\qquad b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2}$

En effet :

$$
\begin{aligned}
& b_{n+1} - a_{n+1} = c_n - a_n = \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} \\
\text{ou} \qquad & b_{n+1} - a_{n+1} = b_n - c_n = b_n - \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{b_n - a_n}{2}
\end{aligned}
$$

Conclusion. On a construit par récurrence deux suites (a_n) et (b_n) telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$ le segment $[a_n, b_n]$ contienne une infinité de termes de la suite u.

De plus on a démontré que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n \leqslant a_{n+1} \qquad b_{n+1} \leqslant b_n \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2}$$

Les deux premières inégalités montrent que la suite (a_n) est croissante et la suite (b_n) est décroissante. La troisième égalité montre que la suite $(b_n - a_n)$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Son premier terme est $b_0 - a_0 = M - m$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad b_n - a_n = \frac{M - m}{2^n}$$

La suite $(b_n - a_n)$ converge donc vers 0.

Finalement (a_n) est croissante, (b_n) est décroissante, leur différence converge vers 0 donc ces deux suites sont adjacentes.

Par théorème elles convergent vers une limite ℓ.

2. Construction d'une suite extraite.

On construit par récurrence une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ encadrée par les suites (a_n) et (b_n).

Initialisation. On pose $\varphi(0) = 0$, si bien que $u_{\varphi(0)} = u_0$. Alors $u_{\varphi(0)} \in [m, M]$ car le segment $[m, M]$ contient toute la suite (u_n). Ainsi $a_0 \leqslant u_{\varphi(0)} \leqslant b_0$.

Hérédité. Supposons défini $u_{\varphi(n)}$ avec $a_n \leqslant u_{\varphi(n)} \leqslant b_n$.

Le segment $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ contient une infinité de termes u_k. Il contient donc un u_k pour k strictement supérieur à $\varphi(n)$, puisque $\varphi(n)$ est fini. On pose $\varphi(n+1) = k$, si bien que $\varphi(n+1) > \varphi(n)$, et $a_{n+1} \leqslant u_{\varphi(n+1)} \leqslant b_{n+1}$.

Conclusion. On a construit par récurrence une suite $(u_{\varphi(n)})$ comprise entre les suites (a_n) et (b_n). Cette suite est bien extraite de la suite (u_n) car la fonction φ est strictement croissante : $\quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \varphi(n+1) > \varphi(n)$

3. La suite extraite est convergente.

On sait que : $\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n \leqslant u_{\varphi(n)} \leqslant b_n$

De plus les suites (a_n) et (b_n) convergent vers le même réel ℓ.

Par théorème d'encadrement la suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ converge vers ℓ.

On a démontré que la suite (u_n) admet une suite extraite convergente. □

C. Valeurs d'adhérence

Définition. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Un réel a est valeur d'adhérence de la suite (u_n) si :

Remarque. De façon équivalente, le réel a est valeur d'adhérence de la suite (u_n) si pour tout $\varepsilon > 0$ l'intervalle $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ contient une infinité de termes de la suite.

Proposition. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et a un réel. Alors a est valeur d'adhérence de la suite (u_n) si et seulement s'il existe une suite extraite de (u_n) convergeant vers a.*

Démonstration. Soit a une valeur d'adhérence de la suite (u_n). On construit par récurrence une suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers a.

Initialisation. On pose $\varphi(0) = 0$.

Hérédité. Supposons, pour un $k \in \mathbb{N}$, que $\varphi(k)$ est défini. Soit $N = \varphi(k) + 1$. Comme a est valeur d'adhérence alors il existe $n \geqslant N$ tel que $|u_n - a| \leqslant \frac{1}{k+1}$. On pose $\varphi(k+1) = n$. Alors $\varphi(k+1) > \varphi(k)$ et $\left|u_{\varphi(k+1)} - a\right| \leqslant \frac{1}{k+1}$.

Conclusion. On a construit une suite extraite $(u_{\varphi(k)})$ car la fonction φ est strictement croissante. D'après le théorème d'encadrement cette suite converge vers a.

Réciproquement, supposons qu'il existe une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ convergeant vers a. Soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$. Alors il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant M \quad \Longrightarrow \quad \left|u_{\varphi(n)} - a\right| \leqslant \varepsilon$$

Ainsi par exemple pour $n = \operatorname{Max}\{N, M\}$ on a $|u_n - a| \leqslant \varepsilon$.

Ceci montre que a est valeur d'adhérence de la suite (u_n), et achève la démonstration. □

Remarques.

(i) En conséquence du théorème de Bolzano-Weierstrass, toute suite bornée admet une valeur d'adhérence.

(ii) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Les valeurs d'adhérence de (u_n) sont les limites des suites extraites convergentes de (u_n).

Exemple. La suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet deux valeurs d'adhérences : 1 et -1.

VI. Suites complexes

Définition. Une suite complexe est une application u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$, donc une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Remarque. La définition d'une suite convergente de nombres complexes est identique à celle des suites réelles, mais il faut lire «module de $(u_n - \ell)$» et non «valeur absolue de $(u_n - \ell)$» pour $|u_n - \ell|$.

La propriété d'unicité reste valide, toute suite convergente est bornée, les théorèmes d'opérations sur les limites finies sont valides, en particulier celui sur $|u_n|$.

Ne sont pas définis : majorant, minorant, minimum, maximum, suites croissantes, suites adjacentes, limites infinies, théorèmes de comparaison et d'encadrement.

On se ramène souvent au cas des suites réelles en étudiant la suite des modules $(|u_n|)$, qui est une suite réelle positive. On utilise aussi les deux suites réelles $(\operatorname{Re}(u_n))$ et $(\operatorname{Im}(u_n))$.

▷ **Exercice 17.**

Proposition. *Soit (u_n) une suite complexe.*
Si (u_n) converge vers ℓ alors la suite conjuguée $(\overline{u_n})$ converge vers $\bar{\ell}$.

Démonstration. C'est immédiat car $\left|\overline{u_n} - \bar{\ell}\right| = \left|\overline{u_n - \ell}\right| = |u_n - \ell|$. □

Théorème. *Soit ℓ un complexe, de forme algébrique $\ell = a + ib$.*
Une suite (u_n) converge vers $\ell = a + ib$ si et seulement si les suites $(\operatorname{Re}(u_n))$ et $(\operatorname{Im}(u_n))$ convergent respectivement vers a et b.

Démonstration. C'est un corollaire de la propriété précédente :

Si (u_n) converge vers ℓ alors $(\overline{u_n})$ converge vers $\bar{\ell}$ donc par somme et multiplication par un scalaire $\left(\frac{u_n+\bar{u}_n}{2}\right)$ converge vers $\frac{\ell+\bar{\ell}}{2}$, donc $(\operatorname{Re}(u_n))$ converge vers a.

De même $(\operatorname{Im}(u_n))$ converge vers b.

Réciproquement, si $(\operatorname{Re}(u_n))$ et $(\operatorname{Im}(u_n))$ convergent respectivement vers a et b alors $(\operatorname{Re}(u_n) + i\operatorname{Im}(u_n))$ converge vers $a + ib$, donc (u_n) converge vers ℓ. □

Théorème de Bolzano-Weierstrass.
Toute suite complexe bornée admet une suite extraite convergente.

Démonstration. Soit (u_n) une suite complexe bornée.

On sait que pour tout complexe z : $\quad |\operatorname{Re} z| \leqslant |z| \quad$ et $\quad |\operatorname{Im} z| \leqslant |z|$.

Ceci montre que les suites réelles $(\operatorname{Re}(u_n))$ et $(\operatorname{Im}(u_n))$ sont bornées.

D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass dans le cas réel il existe une suite extraite $(\operatorname{Re}(u_{\varphi(n)}))$ convergente.

La suite $(\operatorname{Im}(u_{\varphi(n)}))$ est extraite de la suite $(\operatorname{Im}(u_n))$ donc elle est bornée, et d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass dans le cas réel il existe une suite extraite $(\operatorname{Im}(u_{\varphi\circ\psi(n)}))$ convergente.

La suite $(\operatorname{Re}(u_{\varphi\circ\psi(n)}))$ est extraite de la suite $(\operatorname{Re}(u_{\varphi(n)}))$ qui est convergente donc elle est convergente.

Les deux suites $(\operatorname{Re}(u_{\varphi\circ\psi(n)}))$ et $(\operatorname{Im}(u_{\varphi\circ\psi(n)}))$ sont convergentes donc la suite extraite $(u_{\varphi\circ\psi(n)})$ est convergente. □

VII. Relations de comparaison

A. Négligeabilité

Définition. Soit (u_n) et (v_n) deux suites, (v_n) ne s'annulant pas. On dit que u_n est négligeable devant v_n si la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ tend vers 0. On note alors :

$$u_n = o(v_n) \qquad \text{ou} \qquad u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$$

Exemple 9. Comparaison des suites (n) et (n^2), puis $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $\left(\frac{1}{n}\right)$.

Propositions. *Soit (u_n), (v_n), (w_n) trois suites.*

(i) Si (u_n) et (v_n) sont négligeables devant (w_n) alors $(u_n + v_n)$ est négligeable devant (w_n).

(ii) Si (u_n) est négligeable devant (v_n) et (v_n) est négligeable devant (w_n) alors (u_n) est négligeable devant (w_n).

(iii) Si (u_n) est négligeable devant (v_n), et si (v_n) tend vers une limite finie ℓ, alors (u_n) tend vers 0.

Démonstration. Laissées en exercice. □

B. Équivalence

Définition. Soit (u_n) et (v_n) deux suites, (v_n) ne s'annulant pas. On dit que (u_n) est équivalente à (v_n) si la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ tend vers 1. On note alors :

$$u_n \sim v_n \qquad \text{ou} \qquad u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$$

Exemple 10. $(n^2 + 3n - 1)$ est équivalente à (n^2).

Remarque. Si (u_n) est équivalente à (v_n) alors (v_n) est équivalente à (u_n). On peut donc dire que (u_n) et (v_n) sont équivalentes.

Propositions. *Soit (u_n), (v_n), (w_n) trois suites.*

(i) Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$ alors $u_n \sim w_n$.
L'équivalence est une relation d'équivalence sur l'ensemble des suites non-nulles à partir d'un certain rang.

(ii) Si $u_n \sim v_n$ et si (v_n) tend vers une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors (u_n) tend vers ℓ.

(iii) Si $u_n \sim v_n$ alors u_n et v_n ont même signe à partir d'un certain rang.

(iv) Si (v_n) est négligeable devant (u_n), alors $(u_n + v_n)$ est équivalente à (u_n).

Exemple.

$n^2 + 5n \sim n^2$ car

Remarque. La dernière proposition équivaut à : $u_n \sim v_n \iff u_n - v_n = o(v_n)$.

Démonstration.

Proposition. *Soit* (u_n), (v_n), (u'_n), (v'_n) *quatre suites.*

$$\text{Si} \quad u_n \sim u'_n \quad \text{et} \quad v_n \sim v'_n \qquad \text{alors} \qquad u_n v_n \sim u'_n v'_n \quad \text{et} \quad \frac{u_n}{v_n} \sim \frac{u'_n}{v'_n}$$

Démonstration. Laissée en exercice. □

Exemple. Comme $\quad 2n^2 - 3n + 1 \sim 2n^2 \quad$ et $\quad n^2 + 5 \sim n^2$

alors $\dfrac{2n^2 - 3n + 1}{n^2 + 5}$

Remarque. La relation d'équivalence est compatible avec les produits et les quotients. Par contre elle ne l'est pas avec les sommes :

$$\boxed{\text{On ne peut pas ajouter d'équivalences}}$$

Exemple 11. $n^2 + n \sim n^2 + 1 \quad$ et $\quad 1 - n^2 \sim -n^2$

Proposition. *Si* $u_n \sim v_n$ *alors* $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$ *pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Laissée en exercice. □

C. Domination

Définition. On dit que (u_n) est dominée par (v_n) si la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée. On note alors :

$$u_n = O(v_n) \qquad \text{ou} \quad u_n \underset{+\infty}{=} O(v_n).$$

Exemple 12. La suite $((-2)^n)$ est dominée par la suite (2^n).

Proposition. *Soit (u_n), (v_n), (w_n) trois suites.*

(i) Si (u_n) et (v_n) sont dominées par (w_n) alors $(u_n + v_n)$ est dominée par (w_n).

(ii) Si (u_n) est dominée par (v_n) et (v_n) est dominée par (w_n) alors (u_n) est dominée par (w_n).

Démonstration. Laissées en exercice. □

Remarque. Si (u_n) est négligeable devant (v_n) ou si (u_n) est équivalente à (v_n) alors (u_n) est dominée par (v_n).

Résumé.

D. Croissances comparées

Théorème. *Soit α, β et a trois réels.*

(i) Si $\alpha < \beta$ alors $n^\alpha = o(n^\beta)$

(ii) $n^\alpha = o(a^n)$ (en supposant que $a > 1$)

(iii) $\ln^\beta n = o(n^\alpha)$ (en supposant que $\alpha > 0$)

(iv) $a^n = o(n!)$

Exemple. Une suite polynomiale $u_n = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \cdots + a_p n^p$ (où $a_p \neq 0$) est équivalente à son terme de plus haut degré :

$$u_n \sim a_p n^p$$

Démonstration.

Le point *(i)* est immédiat.

Les points *(ii)* et *(iii)* sont conséquences du théorème des croissances comparées pour les fonctions.

Le point *(iv)* est démontré page suivante. □

Démonstration du point *(iv)*.

▷ **Exercice 18.**

E. Équivalents usuels

Proposition. *Si* (u_n) *est une suite tendant vers 0 alors :*

Démonstration. Ceci est conséquence des limites usuelles de fonctions. ☐

Exemple 13.

(i) Calculer la limite de : $u_n = 2^n \tan \dfrac{\pi}{2^n}$

(ii) Donner une équivalent simple de : $v_n = \ln \sqrt{\dfrac{n-1}{n+1}}$

(iii) Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer la limite de : $w_n = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$

Remarque. On ne peut pas appliquer une fonction à une équivalence : si $u_n \sim v_n$ alors il est faux en général que $f(u_n) \sim f(v_n)$.

▷ **Exercice 19.**