Lycée Bellevue – Toulouse **pour le 8 janvier 2026**
MPSI – Mathématiques

Devoir à la Maison n°6

Exercice 1.

Le père Noël est prisonnier d'un univers virtuel. Cet univers se présente comme une sphère dont le rayon grandit à vitesse constante. À l'instant $t = 0$ *le père Noël est dans son traîneau au centre de cette sphère. Il se déplace à vitesse constante* v*. Le rayon de l'univers grandit à la vitesse* V *supérieure ou égale à* v*.*

Le père Noël pourra-t-il sortir de sa prison ?

Il faut tenir compte du fait suivant : l'univers grandit de façon homogène, c'est-à-dire qu'en plus de sa propre vitesse, le père Noël bénéficie de l'écartement de l'univers, comme s'il était sur un élastique.

On admettra que l'univers disparaît dès que le père Noël atteint sa limite.

On note $X(t)$ *le rayon de l'univers à l'instant* t*,* X_0 *le rayon de l'univers à l'instant* $t = 0$*,* V *sa vitesse de croissance, puis* $x(t)$ *le distance du père Noël au centre de l'univers à l'instant* t*, et* v *la vitesse de son traîneau. On définit* $t_0 = \frac{X_0}{V}$*. On suppose que toutes ces grandeurs sont strictement positives, et qu'elles sont exprimées dans le même système d'unités. On admet que la fonction* x *est dérivable.*

1. *Exprimer* $X(t)$ *en fonction de* V*,* t_0 *et* t*.*
2. *Exprimer* $x'(t)$ *en fonction de* v*,* V*,* $x(t)$ *et* $X(t)$*.*
3. *Résoudre l'équation différentielle obtenue sur* $\mathbb{R}_+$*.*
4. *En utilisant la condition initiale, exprimer* $x(t)$ *en fonction de* t*,* t_0 *et* v*.*
5. *Démontrer que le père Noël sortira de l'univers.*
   Exprimer l'instant t_1 *auquel ceci se produira en fonction de* v*,* V *et* X_0*.*

Exercice 2.

On pose $\alpha = \arccos \frac{1}{3}$.
Le but de cet exercice est de démontrer que α n'est pas de la forme $\frac{p\pi}{q}$ avec p et q entiers, c'est-à-dire que $\frac{\alpha}{\pi}$ est irrationnel.

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un couple $(a_n, b_n) \in \mathbb{Z}^2$ tel que :

$$(1 + i2\sqrt{2})^n = a_n + ib_n\sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad a_n - b_n \not\equiv 0 \ [3]$$

2. Calculer $e^{i\alpha}$.
3. Conclure : démontrer que $\frac{\alpha}{\pi}$ est irrationnel.

Exercice 3.

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.

1. Démontrer qu'il existe deux scalaires α et β tels que $M^2 = \alpha M + \beta I_2$ et exprimer ces scalaires en fonction des coefficients de M.

On note (C) l'équation : $\lambda^2 - \alpha\lambda - \beta = 0$.

2. Dans cette question on suppose que le discriminant de l'équation (C) est non-nul et on note λ_1, λ_2 ses solutions.
   (a) Démontrer qu'il existe deux matrices M_1 et M_2 telles que :

$$M_1 + M_2 = I_2 \qquad \text{et} \qquad \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 = M.$$

   Exprimer ces matrices en fonction de I_2, M, λ_1 et λ_2.

   (b) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad M^n = \lambda_1^n M_1 + \lambda_2^n M_2.$$

3. On suppose que le discriminant de (C) est nul et on note λ_0 sa solution.
   Démontrer qu'il existe une matrice M_0 telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad M^n = \lambda_0^n I_2 + \lambda_0^{n-1} n M_0.$$

4. Application : calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{puis} \qquad M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$