Corrigé du Devoir à la Maison n°5

1. (a) Si $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ alors $-1 \leqslant \sin x < 1$ donc $1 - \sin x$ est non-nul.
Ceci montre que la fonction f est bien définie.
La fonction f est quotient de fonctions dérivables donc elle est dérivable. Sa dérivée est :
$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\qquad f'(x) = \frac{\cos x(1-\sin x) + (1+\sin x)\cos x}{(1-\sin x)^2} = \frac{2\cos x}{(1-\sin x)^2}$$
Cette dérivée est strictement positive sauf en $x = -\frac{\pi}{2}$ donc f est strictement croissante.
La limite de f en $\frac{\pi}{2}$ est : $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} \frac{\pi}{2}} f(x) = +\infty$
On calcule $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $f'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$, et $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$.
La courbe de f est représentée page suivante.
(b) La fonction f est continue est strictement croissante sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ donc par théorème elle réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dans $f(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[)$.
Les variations de f montrent que $f(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[) = [0, +\infty[= \mathbb{R}_+$, donc f réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}_+$.
2. (a) La fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}_+$ et la fonction arc-tangente est définie sur $\mathbb{R}$, donc par composition et addition la fonction g est bien définie.
La fonction arc-tangente réalise une bijection croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, donc :
$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad 0 \geqslant \sqrt{x} \quad &\Longrightarrow \quad 0 \leqslant \arctan\sqrt{x} < \frac{\pi}{2} \\ &\Longrightarrow \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant 2\arctan\sqrt{x} - \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$
Ainsi la fonction g est bien définie sur $\mathbb{R}_+$ et prend ses valeurs dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
(b) La fonction arc-tangente est dérivable en 0 donc : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arctan x - \arctan 0}{x-0} = \arctan' 0$.
Comme $\arctan 0 = 0$ et $\arctan' 0 = 1$ alors $\frac{\arctan x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ et donc $\arctan x \underset{(0)}{\sim} x$.
En conséquence :
$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{2\arctan\sqrt{x}}{x} \underset{(0)}{\sim} \frac{2\sqrt{x}}{x} = \frac{2}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$$
La fonction g n'est pas dérivable en 0.

3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\cos(2\arctan x) = 2\cos^2(\arctan x) - 1$$

La formule $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ donne :

$$\cos(2\arctan x) = \frac{2}{1+\tan^2(\arctan x)} - 1 = \frac{2}{1+x^2} - 1 = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad f \circ g(x) = \frac{1+\sin\left(2\arctan\sqrt{x} - \frac{\pi}{2}\right)}{1-\sin\left(2\arctan\sqrt{x} - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1-\cos\left(2\arctan\sqrt{x}\right)}{1+\cos\left(2\arctan\sqrt{x}\right)}$$

D'après la formule pour $\cos(2\arctan x)$:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad f \circ g(x) = \frac{1-\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)} = \frac{1+x-1+x}{1+x+1-x} = x$$

Ceci montre que $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+}$.

(b) On a justifié que f est bijective, donc elle admet une réciproque f^{-1}.
On vient de démontrer que $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+}$, ce qui donne :

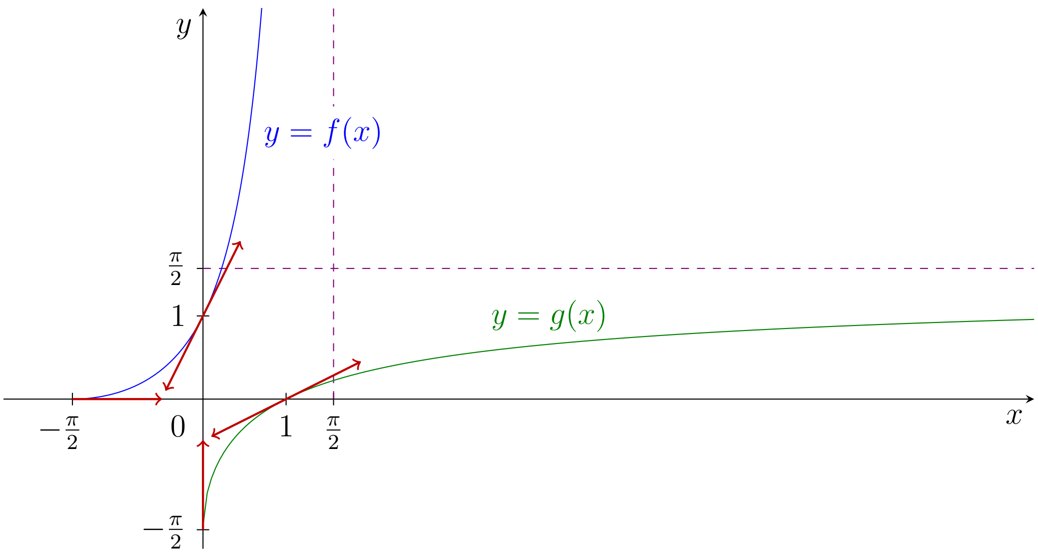
$$f^{-1} \circ (f \circ g) = f^{-1} \circ \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+} = f^{-1}$$

D'autre part, par associativité de la loi $\circ$:

$$f^{-1} \circ (f \circ g) = \left(f^{-1} \circ f\right) \circ g = \mathrm{Id}_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[} \circ g = g$$

On en déduit donc que $g = f^{-1}$: g est la réciproque de f.

(c) Comme g est la réciproque de f alors la courbe de g est obtenue à partir de celle de f par symétrie par rapport à la première bissectrice des axes.



4. (a) On note $x = 2t - \frac{\pi}{2}$, ce qui équivaut à $t = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}$.
   - La fonction $t \mapsto 2t - \frac{\pi}{2}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2$, donc $\mathrm{d}x = 2\mathrm{d}t$.
   - Si $x = -\frac{\pi}{2}$ alors $t = 0$ et si $x = 0$ alors $t = \frac{\pi}{4}$.
   - Par changement de variable :

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1+\sin x}{1-\sin x}\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\sin\left(2t-\frac{\pi}{2}\right)}{1-\sin\left(2t-\frac{\pi}{2}\right)}\,2\mathrm{d}t$$

Les formules de trigonométrie donnent :

$$\frac{1+\sin\left(2t-\frac{\pi}{2}\right)}{1-\sin\left(2t-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1-\cos 2t}{1+\cos 2t} = \frac{2\sin^2 t}{2\cos^2 t} = \tan^2 t$$

Donc :

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 t\,\mathrm{d}t$$

On calcule alors :

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \left(1+\tan^2 t - 1\right)\mathrm{d}t = 2\Big[\tan t - t\Big]_{0}^{\frac{\pi}{4}} = \boxed{2 - \frac{\pi}{2}}$$

(b) Soit $t = \sqrt{x}$. Alors $x = t^2$.
   - La fonction $t \mapsto t^2$ est de classe $\mathscr{C}^1$, de dérivée $t \mapsto 2t$, donc $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2t$, ce qui donne $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$.
   - Si $t = 0$ alors $x = 0$ et si $t = 1$ alors $x = 1$.
   - Par changement de variable :

$$\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(2\arctan t - \frac{\pi}{2}\right)2t\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 2t\,\arctan t\,\mathrm{d}t - \pi\int_0^1 t\,\mathrm{d}t \tag{1}$$

Pour calculer la première intégrale posons :

$$\forall t \in [0,1] \qquad u(t) = t^2 \qquad \text{et} \qquad v(t) = \arctan t$$

Ces deux fonctions sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ et :

$$\forall t \in [0,1] \qquad u'(t) = 2t \qquad \text{et} \qquad v'(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

Par intégration par parties :

$$\int_0^1 2t\arctan t\,\mathrm{d}t = \Big[t^2\arctan t\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

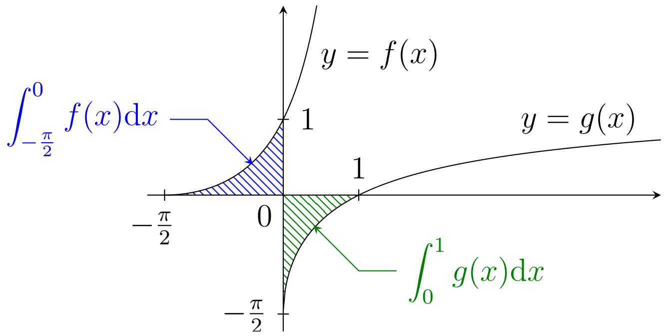
Ceci donne :

$$\int_0^1 2t\arctan t\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} - \Big[t - \arctan t\Big]_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1$$

En poursuivant le calcul (1) donne :

$$\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 2\left(\frac{\pi}{2}-1\right) - \pi\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \boxed{\frac{\pi}{2}-2}$$

On constate que les deux intégrales calculées ci-dessus sont opposées, ce qui se comprends grâce au schéma suivant :



Les courbes représentatives des fonctions f et g sont symétriques l'une à l'autre par rapport à la première bissectrice des axes car f et g sont bijectives réciproques l'une de l'autre.

Les deux intégrales mesurent donc la même surface, mais l'intégrale de g est négative car g est négative sur l'intervalle $[0,1]$.

5. On applique le changement de variable $x = \varphi(t)$ à l'intégrale $\displaystyle\int_0^b \varphi^{-1}(x)\,\mathrm{d}x$.

- La fonction φ est de classe $\mathscr{C}^1$ par hypothèse, donc $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \varphi'(t)$, puis $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t$.
- Comme φ est une bijection alors la définition $x = \varphi(t)$ équivaut à $t = \varphi^{-1}(x)$.

  De plus φ est une bijection croissante de $[a,0]$ dans $[0,b]$, donc $\varphi(a) = 0$ et $\varphi(0) = b$. On en déduit $a = \varphi^{-1}(0)$ et $0 = \varphi^{-1}(b)$.

  Ceci montre que si $x = 0$ alors $t = a$ et si $x = b$ alors $t = 0$.
- Par changement de variable on obtient :

$$\int_0^b \varphi^{-1}(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^0 t\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

On applique maintenant le théorème d'intégration par parties, en posant $u(t) = t$ et $v(t) = \varphi(t)$. Ces deux fonctions sont bien de classe $\mathscr{C}^1$, de dérivées $u'(t) = 1$ et $v'(t) = \varphi'(t)$. L'intégration par parties montre que :

$$\int_a^0 t\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \Big[t\varphi(t)\Big]_a^0 - \int_a^0 \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

On sait que $\varphi(a) = 0$, et la variable t est muette donc :

$$\int_a^0 t\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = 0 - a\varphi(a) - \int_a^0 \varphi(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^0 \varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

On a bien prouvé que :

$$\int_0^b \varphi^{-1}(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^0 \varphi(x)\,\mathrm{d}x$$