

**Programme de colles**  
**Semaine 11**  
**du 8 au 12 décembre 2025**

**Questions de cours**

Sauf mention explicite il faut connaître l'énoncé et la démonstration.

1.  $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .
2. Théorème de résolution d'une équation de la forme  $y' - a(t)y = 0$  où  $a$  est une fonction continue.
3. Soit  $(E)$  une équation différentielle de la forme  $y' - a(t)y = b(t)$ .  
Soit  $(H)$  l'équation homogène associée et  $y_1$  une solution de  $(E)$ .  
Alors les solutions de  $(E)$  sont les fonctions  $y = y_0 + y_1$  où  $y_0$  est solution de  $(H)$ .
4. Résoudre sur  $\mathbb{R}$  et sur  $\mathbb{C}$  une équation donnée de la forme  $ay'' + by' + cy = 0$  (pas de démonstration).
5. La multiplication matricielle est associative.

**Exercices**

**Chapitre A6. Primitives**

- I. Intégrales et primitives
- II. Calculs de primitives

**Chapitre B4. Arithmétique**

- I. Entiers
- II. PGCD et PPCM
- III. Nombres premiers
- IV. Congruence
- V. Rationnels

**Programme prévisionnel de la semaine suivante**

Chapitres B4 (Arithmétique) et A7 (Équations différentielles).

## **Chapitre A6. Primitives**

### **I. Intégrales et primitives**

Intégrale  $\int_a^b f(t) dt$  : c'est l'aire sous la courbe. Relation de Chasles, linéarité de l'intégrale, croissance de l'intégrale (sans la positivité).

Primitive : définition, deux primitives d'une même fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante. Théorème fondamental : si  $f$  est continue sur un intervalle  $I$ , et  $a \in I$  alors la fonction  $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  est une primitive de  $f$ . Si  $F$  est une primitive de  $f$  alors  $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$ . Corollaire : toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive.

### **II. Calculs de primitives**

Primitives usuelles. Linéarisation d'expressions trigonométriques (y compris hyperboliques), utilisation des complexes ( $e^{ax} \cos(bx)$  par exemple), décomposition de polynômes ( $\frac{x+2}{x+1}$  par exemple), fractions rationnelles du type  $\frac{dx+e}{ax^2+bx+c}$ , intégration par parties, changement de variable.

## **Chapitre B4. Arithmétique**

### **I. Entiers**

Diviseur, multiple. Division euclidienne dans  $\mathbb{Z}$ .

### **II. PGCD et PPCM**

PGCD, algorithme d'Euclide. Relation de Bézout, calcul des coefficients.

PPCM. Formule  $(a \wedge b)(a \vee b) = ab$ .

Entiers premiers entre eux, théorème de Bézout, lemme de Gauss.

Généralisation à plusieurs entiers.

### **III. Nombres premiers**

Nombres premiers, en nombre infini. Décomposition en produit de facteurs premiers.

Valuations  $p$ -adiques. Caractérisation de la divisibilité, formules pour le PGCD et le PPCM.

### **IV. Congruence**

Définition, compatibilité avec l'addition et la multiplication. Petit théorème de Fermat.

### **V. Rationnels**

Définition, forme irréductible. Stabilité par somme, produit, quotient. L'écriture décimale d'un rationnel présente une ration (sans démonstration). Irrationalité de  $\sqrt{2}$ .

Nombres décimaux ( $\mathbb{D}$ ).

Densité de  $\mathbb{Q}$  et de  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$ .