

Programme de colles
Semaine 11
du 8 au 12 décembre 2025

Questions de cours

Sauf mention explicite il faut connaître l'énoncé et la démonstration.

1. \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} .
2. Théorème de résolution d'une équation de la forme $y' - a(t)y = 0$ où a est une fonction continue.
3. Soit (E) une équation différentielle de la forme $y' - a(t)y = b(t)$.
Soit (H) l'équation homogène associée et y_1 une solution de (E) .
Alors les solutions de (E) sont les fonctions $y = y_0 + y_1$ où y_0 est solution de (H) .
4. Résoudre sur \mathbb{R} et sur \mathbb{C} une équation donnée de la forme $ay'' + by' + cy = 0$ (pas de démonstration).
5. La multiplication matricielle est associative.

Exercices

Chapitre A6. Primitives

- I. Intégrales et primitives
- II. Calculs de primitives

Chapitre B4. Arithmétique

- I. Entiers
- II. PGCD et PPCM
- III. Nombres premiers
- IV. Congruence
- V. Rationnels

Programme prévisionnel de la semaine suivante

Chapitres B4 (Arithmétique) et A7 (Équations différentielles).

Chapitre A6. Primitives

I. Intégrales et primitives

Intégrale $\int_a^b f(t) dt$: c'est l'aire sous la courbe. Relation de Chasles, linéarité de l'intégrale, croissance de l'intégrale (sans la positivité).

Primitive : définition, deux primitives d'une même fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante. Théorème fondamental : si f est continue sur un intervalle I , et $a \in I$ alors la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est une primitive de f . Si F est une primitive de f alors $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$. Corollaire : toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive.

II. Calculs de primitives

Primitives usuelles. Linéarisation d'expressions trigonométriques (y compris hyperboliques), utilisation des complexes ($e^{ax} \cos(bx)$ par exemple), décomposition de polynômes ($\frac{x+2}{x+1}$ par exemple), fractions rationnelles du type $\frac{dx+e}{ax^2+bx+c}$, intégration par parties, changement de variable.

Chapitre B4. Arithmétique

I. Entiers

Diviseur, multiple. Division euclidienne dans \mathbb{Z} .

II. PGCD et PPCM

PGCD, algorithme d'Euclide. Relation de Bézout, calcul des coefficients.

PPCM. Formule $(a \wedge b)(a \vee b) = ab$.

Entiers premiers entre eux, théorème de Bézout, lemme de Gauss.

Généralisation à plusieurs entiers.

III. Nombres premiers

Nombres premiers, en nombre infini. Décomposition en produit de facteurs premiers.

Valuations p -adiques. Caractérisation de la divisibilité, formules pour le PGCD et le PPCM.

IV. Congruence

Définition, compatibilité avec l'addition et la multiplication. Petit théorème de Fermat.

V. Rationnels

Définition, forme irréductible. Stabilité par somme, produit, quotient. L'écriture décimale d'un rationnel présente une partie décimale (sans démonstration). Irrationalité de $\sqrt{2}$.

Nombres décimaux (\mathbb{D}).

Densité de \mathbb{Q} et de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans \mathbb{R} .