Chapitre B5
Matrices

Notations

- Dans tout ce chapitre on note n et p deux entiers naturels non-nuls.
- Dans ce chapitre et les suivants on note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition

Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés *scalaires*.

I. Définitions

A. Matrices

Définition

Une *matrice* de *taille* (n, p) à *coefficients* dans $\mathbb{K}$ est un tableau de n lignes et p colonnes :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

où les coefficients a_{ij} ou $a_{i,j}$ sont éléments de $\mathbb{K}$.
Ils sont indexés par i (indice de ligne) et j (indice de colonne).

Notation

L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté :

$$\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$$

Exemples.

- La *matrice nulle* est notée 0_{np} ou $0_{n,p}$, elle ne contient que des 0.
- Une matrice de taille $(1, p)$ est appelée *matrice-ligne*, une matrice de taille $(n, 1)$ est appelée *matrice-colonne*.

Notation

La matrice A définie ci-dessus peut être notée :

Remarque. Deux matrices sont égales si et seulement si elles sont de même taille et tous leurs coefficients sont égaux.

B. Opérations linéaires

Définition : multiplication par un scalaire

Soit $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On note λA la matrice définie par :

$$\text{Si} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \qquad \text{alors} \qquad \lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \cdots & \lambda a_{np} \end{pmatrix}$$

En d'autre termes, si $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ alors $\lambda A = (\lambda a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$.

Remarque. La multiplication par un scalaire définit l'application suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{K} \times \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K}) \\ (\lambda, A) &\longmapsto \lambda A \end{aligned}$$

Exemples. $1A =$ $\qquad 0A =$ $\qquad (-1)A$ est notée $-A$

Définition : addition

Soit A et B sont deux matrices de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$. Alors on définit leur somme $A + B$ par :

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{1p} \\ \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1} \cdots a_{np} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} b_{11} \cdots b_{1p} \\ \vdots \qquad \vdots \\ b_{n1} \cdots b_{np} \end{pmatrix} \text{ alors } A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} \cdots a_{1p} + b_{1p} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} \cdots a_{np} + b_{np} \end{pmatrix}$$

En d'autre termes, si $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ alors $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$.

Exemple.

Remarque. L'addition des matrices définit l'application suivante :

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K}) \\ (A, B) & \longmapsto & A + B \end{array}$$

Remarque. On note de même $A - B$ pour la soustraction, qui est définie par $A - B = A + (-1)B$. On remarque que :

$$\forall A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K}) \qquad A - A =$$

Proposition

Pour toutes matrices A et B de taille (n, p) et tous scalaires λ et μ :

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B \qquad (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A \qquad \lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$$

Définition

Soit $m \in \mathbb{N}^*$, et soit $A_1, \dots, A_m$ des matrices de taille (n, p) puis $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ des scalaires. Alors la matrice

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k A_k = \lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_m A_m$$

est appelée *combinaison linéaire* des matrices $A_1, \dots, A_m$.

Définition

Pour tout $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, p$ on note E_{ij} ou $E_{i,j}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui de la ligne i et de la colonne j qui vaut 1.

Proposition

Toute matrice $A = (a_{ij})$ se décompose de façon unique comme combinaison linéaire des matrices E_{ij} : $A = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{ij} E_{ij}$

Exemple.

C. Multiplication

Définition

Soit L une matrice-ligne à n coefficients, et C une matrice-colonne à n coefficients. Le produit LC est le réel :

$$LC =$$

Soit A une matrice de taille (m, n), B une matrice de taille (n, p). Alors le produit AB est la matrice C de taille (m, p) dont les coefficients sont :

Remarques.

- La multiplication matricielle définit l'application suivante :
- Le coefficient (i, k) est le produit de la ligne i de A par la colonne k de B.

Exemple 1. Calculer AB et BA dans les cas suivants :

(i) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

(ii) $A = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$

(iii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 7 & -6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & -1 & 9 \end{pmatrix}$

(iv) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$

(v) $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 7 \\ 1 & 0 & 5 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(vi) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -10 \\ -3 \end{pmatrix}$

Remarques.

- **La multiplication matricielle n'est pas commutative :**
  Il est faux en général que $AB = BA$.
- **La règle du produit nul est fausse en général :**
  On peut avoir $AB = 0_{mp}$ alors que A et B ne sont pas nulles.
  Par contre, pour toute matrice A de taille (n, p) : $\quad 0_{mn}A = 0_{mp} \qquad A0_{pq} = 0_{nq}$

▷ **Exercices 1, 2, 3.**

Définition

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ la *matrice identité* de taille (n, n), notée I_n, est la matrice :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Elle vérifie :

$$\forall A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K}) \qquad AI_n = A \qquad \text{et} \qquad \forall B \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) \qquad I_nB = B$$

Définition

Pour tous entiers i et j le *symbole de Kronecker* δ_{ij} est défini par :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La matrice identité de taille (n, n) est donc la matrice $(\delta_{ij})_{1 \leqslant i, j \leqslant n}$.

Remarque. Démontrons que $AI_n = A$:

Proposition

Pour toutes matrices A, B, C et tout scalaire λ, en supposant que les produits sont définis :

$$(A + B)C = AC + BC \qquad (\lambda A)B = \lambda(AB) \qquad (AB)C = A(BC)$$
$$A(B + C) = AB + AC \qquad A(\lambda B) = \lambda(AB)$$

Démonstration. On utilise la linéarité de la somme pour les quatre premières.

Démonstration de l'associativité.

▷ **Exercice 4.**

D. Transposition

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. La matrice *transposée* de A est la matrice notée ${}^tA$ ou $A^\top$ à p lignes et n colonnes dont, pour tout $(i,j) \in \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,p\}$, le coefficient de coordonnées (j,i) est le coefficient de coordonnées (i,j) de A.

En d'autres termes : si $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ alors ${}^tA = (a'_{ji})_{\substack{1\leqslant j\leqslant p\\1\leqslant i\leqslant n}}$ où, pour tous i et j : $a'_{ji} = a_{ij}$.

Exemple.

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ alors ${}^tA =$

Si $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ alors ${}^tB =$

Remarque. La transposition définit l'application suivante :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & {}^tA \end{array}$$

Propositions

- Pour toutes matrices A et B de même taille : ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$
- Pour toute matrice A et tout scalaire λ : ${}^t(\lambda A) = \lambda({}^tA)$
- Pour toute matrice A de taille (m,n) et toute matrice B de taille (n,p) :
  ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$

Exemple (suite du précédent).

$AB =$ ${}^tB\,{}^tA =$

<u>Démonstration</u>.

Les propriétés sont immédiates pour l'addition et la multiplication par un scalaire.

Pour la multiplication on note pour tous i, j, k tels que $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $1 \leqslant k \leqslant p$:

- a_{ij} b_{jk} c_{ik} les coefficients respectifs des matrices A B et AB
- a'_{ji} b'_{kj} c'_{ki} ceux de ${}^tA$ ${}^tB$ ${}^t(AB)$.

Alors pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$ et tout $k \in \{1, \ldots, p\}$:

$$c'_{ki} = c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} = \sum_{j=1}^{n} a'_{ji} b'_{kj} = \sum_{j=1}^{n} b'_{kj} a'_{ji}$$

Les coefficients de ${}^t(AB)$ sont bien ceux de ${}^tB\,{}^tA$, donc ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$. □

II. Matrices carrées

Définitions

Une matrice de taille (n, n) est dite *carrée*.

On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble de matrices carrées de taille (n, n) à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Les coefficients a_{ii} $(i = 1, \ldots, n)$ d'une matrice carrée sont ses coefficients *diagonaux*.

A. Matrices triangulaires et diagonales

Définitions

Une matrice carrée $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est dite :

- *diagonale* si : $\forall i \neq j \quad a_{ij} = 0$
- *triangulaire supérieure* si : $\forall i > j \quad a_{ij} = 0$
- *triangulaire inférieure* si : $\forall i < j \quad a_{ij} = 0$

Proposition

La somme et le produit de deux matrices diagonales (resp. triangulaires supérieures, resp. triangulaires inférieures) sont diagonales (resp. triangulaires supérieures, resp. triangulaires inférieures).

Démonstration. Pour la somme on note :

$$A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \qquad B = (b_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \qquad C = A + B = (c_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

Alors le coefficient (i,j) de C vérifie $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, il est donc nul si a_{ij} et b_{ij} sont nuls. Ceci prouve la propriété pour la somme.

Remarque. De même, si A est diagonale (resp. triangulaire supérieure, resp. triangulaire inférieure), et λ est un scalaire, alors λA est diagonale (resp. triangulaire supérieure, resp. triangulaire inférieure).

Définition

Pour tous scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ on note :

$$\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Proposition

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et $\mu_1, \dots, \mu_n$ des scalaires. Alors :

$$\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \times \operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) = \operatorname{diag}(\lambda_1\mu_1, \dots, \lambda_n\mu_n)$$

B. Matrices symétriques et antisymétriques

Définitions

Une matrice carrée A est dite :

- *symétrique* si ${}^tA = A$
- *antisymétrique* si ${}^tA = -A$

En d'autres termes, en notant $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$:

- A est symétrique si : $\forall (i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2 \quad a_{ij} = a_{ji}$
- A est antisymétrique si : $\forall (i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2 \quad a_{ij} = -a_{ji}$

  Ceci implique que la diagonale est nulle.

Exemple.

Proposition

Toute matrice carrée s'exprime de façon unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Démonstration.

▷ **Exercice 5.**

C. Puissances

Exemple 2. Calculer les puissances des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Proposition

Cas d'une matrice diagonale :

$$\text{Si} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

▷ **Exercice 6.**

Exemple 3. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer A^2, B^2, AB, BA, puis $(A+B)^2$ et $A^2 + 2AB + B^2$.

Proposition - Formule du binôme

Soit A et B deux matrices telles que $AB = BA$. Alors pour tout entier naturel n :

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

Exemple 4. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ dans les cas suivants.

(i) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

(ii) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ en utilisant : $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

▷ **Exercice 7.**

D. Matrices inversibles

Définitions

Une matrice A carrée de taille (n, n) est dite *inversible* s'il existe une matrice B telle que :

$$AB = BA = I_n.$$

L'ensemble des matrices inversibles de taille (n, n) est appelé *groupe linéaire* et noté :

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$$

Remarque. Si A est inversible, et si B et B' vérifient $AB = BA = I_n$ et $AB' = B'A = I_n$, alors $BAB' = B = B'$.

Donc si A est inversible alors il existe une unique matrice B telle que $AB = BA = I_n$.

Définition

Si A est inversible alors la matrice B telle que $AB = BA = I_n$ est appelée *matrice inverse* de A, et notée A^{-1}.

Exemples.

- Si $n = 1$, alors $A = (a)$ est inversible si et seulement si $a \neq 0$, et $(a)^{-1} = \left(\frac{1}{a}\right) = (a^{-1})$.
- La matrice nulle n'est pas inversible, car pour toute matrice B : $0_n B = 0_n \neq I_n$
- La matrice identité est inversible, d'inverse elle-même.

Propositions

Soit A et B deux matrices carrées de même taille.

(i) Si A est B sont inversibles alors le produit AB est inversible, d'inverse :

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

(ii) Si A est inversible alors A^{-1} est inversible, d'inverse A : $(A^{-1})^{-1} = A$.

(iii) Si A est inversible alors ${}^tA$ est inversible, et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

Démonstration.

Exemple 4 (suite). On vérifie que les formules obtenues pour $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ sont valables aussi pour $n = -1$.

On vérifie de même les formules obtenues dans les exercices 6 et 7 pour $n = -1$.

E. Opérations élémentaires

Définitions

Les *opérations élémentaires* sur une matrice sont :

$(L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j)$	ajout à la ligne i de la ligne j multipliée par α	$(j \neq i,\ \alpha \in \mathbb{K})$
$(L_i \leftarrow \lambda L_i)$	multiplication de la ligne i par λ	$(\lambda \in \mathbb{K}^*)$
$(L_i \leftrightarrow L_j)$	interversion des lignes i et j.	
$(C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j)$	ajout à la colonne i de la colonne j multipliée par α	$(j \neq i,\ \alpha \in \mathbb{K})$
$(C_i \leftarrow \lambda C_i)$	multiplication de la colonne i par λ	$(\lambda \in \mathbb{K}^*)$
$(C_i \leftrightarrow C_j)$	interversion des colonnes i et j.	

Définitions

Les *matrices élémentaires* sont les matrices de taille (n, n) que l'on peut obtenir à partir de l'identité grâce à une opération élémentaire.

Plus précisément ce sont, pour tout $(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2$:

- les matrices de *transvection* : $T_{ij}(\alpha) = I_n + \alpha E_{ij}$ $\quad i \neq j \quad \alpha \in \mathbb{K}$
- les matrices de *dilatation* : $D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{ii}$ $\quad \lambda \in \mathbb{K}^*$
- les matrices de *permutation* : $P_{ij} = I_n + E_{ij} + E_{ji} - E_{ii} - E_{jj}$

Exemple 5. Soit :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{puis} \quad M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Calculer DM, TM, PM, puis MD, MT, MP.

Proposition

Les opérations $(L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j)$, $(L_i \leftarrow \lambda L_i)$, $(L_i \leftrightarrow L_j)$ sur une matrice M (à n lignes) reviennent à multiplier M à gauche par $T_{ij}(\alpha)$, $D_i(\lambda)$, P_{ij}.

Les opérations $(C_j \leftarrow C_j + \alpha C_i)$, $(C_i \leftarrow \lambda C_i)$, $(C_i \leftrightarrow C_j)$ sur une matrice M (à n colonnes) reviennent à multiplier M à droite par $T_{ij}(\alpha)$, $D_i(\lambda)$, P_{ij}.

Proposition

Les matrices élémentaires sont inversibles, d'inverses :

$T_{ij}(\alpha)^{-1} =$ $D_i(\lambda)^{-1} =$ $P_{ij}^{-1} =$

Démonstration. Il suffit de vérifier les produits. □

Remarque. Effectivement :

- La suite d'opérations élémentaires $(L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j)$ puis $(L_i \leftarrow L_i - \alpha L_j)$ sur une matrice ne change pas cette matrice.
- De même pour les opérations élémentaires $(L_i \leftarrow \lambda L_i)$ puis $(L_i \leftarrow \lambda^{-1} L_i)$.
- De même pour les opérations élémentaires $(L_i \leftrightarrow L_j)$ puis $(L_i \leftrightarrow L_j)$.

Corollaires

(i) Un produit de matrices élémentaires est inversible.

(ii) Les opérations élémentaires sur une matrice ne changent pas son caractère inversible.

Démonstration.

(i) Un produit de matrices inversibles est inversible, les matrices élémentaires sont inversibles, donc un produit de matrices élémentaires est inversible.

(ii) Soit A et E deux matrices carrées, E étant élémentaire. Alors E est inversible, donc elle admet une matrice inverse E^{-1}.

Un produit de matrices inversibles est inversible donc :

$$A \text{ inversible} \implies EA \text{ inversible} \implies E^{-1}EA \text{ inversible}$$

Ceci montre que A est inversible si et seulement si EA est inversible. □

III. Systèmes linéaires

A. Algorithme du pivot de Gauss

Rappels. Soit S un système linéaire de n équations à p inconnues :

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

L'*écriture matricielle* de ce système est :

$$S : AX = B$$

où on a posé :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

On dit que A est la *matrice du système S*.

Proposition

Les opérations élémentaires sur les lignes d'un système linéaire donnent un système équivalent.

Démonstration. Soit $AX = B$ l'écriture matricielle d'un système linéaire S, et E une matrice élémentaire. Comme E est inversible alors :

$$AX = B \qquad \Longleftrightarrow \qquad EAX = EB$$

Donc l'opération élémentaire de matrice E donne un système linéaire équivalent au système S. $\square$

Méthode : Pivot de Gauss pour les systèmes linéaires

Par opérations élémentaires sur les lignes (et uniquement les lignes) on aboutit à une matrice :

- *Échelonnée* : chaque ligne non-nulle commence par davantage de 0 que la suivante.
- *Réduite* : le premier coefficient non-nul de chaque ligne non-nulle est égal à 1, et c'est le seul coefficient non-nul de sa colonne.

Remarques.

- Le premier 1 de chaque ligne non-nulle est appelé *pivot* de la matrice.
- Les inconnues correspondant aux colonnes de ces pivots sont appelées *inconnues principales*, les autres sont les *inconnues secondaires*, qui deviennent des paramètres.

  Il est possible d'exprimer les inconnues principales en fonction des inconnues secondaires.
- Le nombre de pivots d'une matrice échelonnée est appelé *rang* de cette matrice.

Exemple 6. Résolution des systèmes :

$$S_1 : \begin{cases} 2x + y + z - t = 4 \\ x + 2y + t = 1 \\ 3x + 5y + z + t = 6 \\ 3x - 2z = 2 \end{cases} \qquad S_2 : \begin{cases} x - 2y + z + t = 2 \\ -x + y - 2z - t = -1 \\ 2x + 6z + 3t = 1 \\ x - 3y + 4t = 6 \end{cases}$$

$$S_3 : \begin{cases} x + y + z - 3t = 1 \\ x + y - 3z + t = 1 \\ x - 3y + z + t = 1 \\ -3x + y + z + t = 1 \end{cases}$$

▷ **Exercice 8.**

B. Structure de l'ensemble des solutions

Définition

- Un système qui n'admet pas de solution est dit *incompatible*.
- Un système qui admet au moins une solution est dit *compatible*.

Remarque. Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$, et $(C_j)_{1\leqslant j\leqslant p}$ les colonnes de A.

Alors, pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p1}(\mathbb{K})$:

$$\begin{aligned} x_1C_1 + \cdots + x_pC_p &= x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \cdots + x_p \begin{pmatrix} a_{1p} \\ \vdots \\ a_{np} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = AX \end{aligned}$$

On peut en déduire que le système $AX = B$ est compatible si et seulement si B est combinaison linéaire des colonnes de A.

Définition

Un système linéaire est dit *homogène* si son second membre est nul.

Si S est un système linéaire, alors le *système homogène associé* à S est le système S_0 dont les coefficients sont égaux à ceux de S sauf ceux de son second membre qui sont nuls :

Le système homogène associé au système $\quad S : AX = B \quad$ est $\quad S_0 : AX = 0$

où 0 est la matrice colonne nulle à n lignes.

Théorème

Soit S un système linéaire, et S_0 le système homogène associé.
On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de S et $\mathscr{S}_0$ celui de S_0.
On suppose que le système S admet une solution $x = (x_1, \ldots, x_p)$, que l'on appelle *solution particulière* de S.
Alors l'ensemble des solutions de S est l'ensemble des p-uplets $x+y = (x_1+y_1, \ldots, x_p+y_p)$ où y est élément de $\mathscr{S}_0$.

Exemple 6 (suite). Réécriture des solutions du système S_2.

Démonstration. Notons $AX = B$ l'écriture matricielle du système S. Alors le système homogène associé s'écrit $AX = 0$.

Soit X la *représentation matricielle* de $x = (x_1, \ldots, x_p)$, c'est-à-dire la matrice colonne dont les coefficients sont les x_i. Alors $AX = B$.

Soit $y = (y_1, \ldots, y_p)$ une solution du système homogène S_0, et Y sa représentation matricielle. Alors $AY = 0$.

Par somme on obtient $A(X + Y) = B + 0 = B$, donc $x + y$ est solution de S.

Nous avons démontré que $\{x + y \mid y \in \mathscr{S}_0\} \subseteq \mathscr{S}$.

Soit maintenant $z = (z_1, \ldots, z_p)$ un élément de $\mathscr{S}$, c'est-à-dire une solution de S. Soit Z sa représentation matricielle. Alors $AZ = B$. Or $AX = B$, donc par soustraction $A(Z - X) = B - B = 0$, et donc $Z - X$ est solution du système S_0, *i.e.*, $z - x$ appartient à $\mathscr{S}_0$. Or $z = x + (z - x)$, ce qui montre que $z \in \{x + y \mid y \in \mathscr{S}_0\}$.

Nous avons démontré l'inclusion $\mathscr{S} \subseteq \{x + y \mid y \in \mathscr{S}_0\}$.

Le théorème est démontré par double inclusion. $\square$

IV. Inversion des matrices et systèmes de Cramer

A. Systèmes de Cramer

Définition

Un système linéaire est dit *de Cramer* si sa matrice est inversible.

Théorème

Un système de Cramer admet une et une seule solution.

Démonstration. On considère l'écriture matricielle $AX = B$ d'un système de Cramer. Alors A est inversible, donc par multiplication à gauche par A^{-1} et par A on obtient :

Ceci montre que $A^{-1}B$ est l'unique solution du système. □

Remarque. On constate que la résolution d'un système linéaire de Cramer $AX = B$ revient au calcul de A^{-1}.

Méthode : Pivot de Gauss pour les matrices

Soit A une matrice carrée. On souhaite déterminer si elle est inversible, et si c'est le cas calculer sa matrice inverse.

On écrit $AA' = I_n$ où A' est une matrice carrée non explicitée.

On raisonne par équivalences, en appliquant des opérations élémentaires.

Si A est inversible alors on aboutit par l'algorithme du pivot de Gauss à $A' = A^{-1}$.

Si A n'est pas inversible alors on aboutit à une absurdité.

Exemple 7. Inverser : $A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$ $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$

Méthode 2

On résout le système $AX = Y$ où X et Y sont deux matrices colonnes inconnues.

Si ce système admet une et une seule solution alors A est inversible.

On explicite son inverse grâce à la relation :

$$AX = Y \qquad \Longleftrightarrow \qquad X = A^{-1}Y$$

Exemple 8. Calcul de l'inverse des matrices $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $A_5 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Lemme

Soit A un matrice carrée. Alors A est inversible si et seulement si pour toute matrice colonne Y le système $AX = Y$ possède une et une seule solution.

Démonstration. Le sens direct est déjà connu : si A est inversible alors le système $AX = Y$ est de Cramer donc il possède une unique solution : $X = A^{-1}Y$.

Supposons que tout système $AX = Y$ possède une et une seule solution. Soit n le nombre de ligne et de colonnes de A.

Pour tout $j = 1, \dots, n$, notons E_j la j-ème colonne de I_n, puis C_j l'unique colonne telle que $AC_j = E_j$, et enfin $B = (C_1 \ \cdots \ C_n)$ la matrice dont les colonnes sont les C_j. Alors :

$$AB = A(C_1 \ \cdots \ C_n) = (AC_1 \ \cdots \ AC_n) = (E_1 \ \cdots \ E_n) = I_n.$$

Ceci montre que $AB = I_n$. Il reste à démontrer que $BA = I_n$.

Comme $AB = I_n$ alors $ABA = A$, puis $A(BA - I_n) = 0_n$. Chaque colonne de la matrice $BA - I_n$ est l'unique solution du système $AX = 0$, donc elle est nulle. Ainsi $BA - I_n = 0_n$ et $BA = I_n$.

Finalement $AB = BA = I_n$ donc A est inversible. □

▷ **Exercices 9, 10.**

B. Cas $n = 2$

Proposition

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors A est inversible si et seulement si : $\quad ad - bc \neq 0$.

Dans ce cas : $$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Corollaire

Le système S : $\begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta \end{cases}$ est de Cramer si et seulement si $ad - bc \neq 0$.

Définition

Le réel $ad - bc$ est appelé *déterminant* de la matrice A, ou du système S. On note :

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Démonstration.

Proposition (Formules de Cramer pour $n = 2$)

Soit $S : \begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta \end{cases}$ un système de Cramer. Ses solutions sont :

Démonstration.

Exemple 9. Résoudre : $\begin{cases} 3x + 4y = 3 \\ 5x + 6y = 7 \end{cases}$

▷ **Exercice 11.**

C. Cas des matrices triangulaires

Proposition

- Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont non-nuls.
- La matrice inverse d'une matrice inversible triangulaire supérieure (resp. inférieure) est triangulaire supérieure (resp. inférieure).

Démonstration. Soit A une matrice triangulaire.

La transposition conserve l'inversibilité, donc on peut supposer que A est triangulaire supérieure.

Si les coefficients diagonaux de A sont non-nuls, alors l'algorithme du pivot de Gauss montre que tout système $AX = Y$ possède une et une seule solution, donc A est inversible.

Les opérations élémentaires qui permettent d'obtenir I_n à partir de A sont uniquement des dilations et des transvections de la forme $(L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j)$ avec $i < j$. Celles-ci conservent le caractère triangulaire supérieur des matrices, car les matrices élémentaires $D_i(\lambda)$ et $T_{ij}(\alpha)$ avec $i < j$ sont triangulaires supérieures. Donc A^{-1} est trangulaire supérieure.

Réciproquement, supposons que la matrice A admet au moins un coefficient diagonal nul. Par pivot de Gauss on obtient une matrice A' dont la dernière ligne est nulle. Une telle matrice n'est pas inversible, car le système $A'X = E_n$ n'a pas de solution.

Les opérations élémentaires conservant l'inversibilité, A n'est pas inversible. $\square$

Remarques.

- Si A est une matrice triangulaire inversible de coefficients diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ alors les coefficients diagonaux de A^{-1} sont $\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}$.
- Tout ceci s'applique en particulier aux matrices diagonales.