## Corrigé du Devoir Surveillé n°3

Exercice 1. (7 points)

1. (1 point) La fonction  $f: x \mapsto \arccos x + \arcsin\left(1 - \frac{x}{2}\right)$  est définie pour tout réel x tel que  $-1 \leqslant x \leqslant 1$  et  $-1 \leqslant 1 - \frac{x}{2} \leqslant 1$ , ce qui donne  $0 \leqslant x \leqslant 1$ .

Donc la fonction f est définie sur l'intervalle [0, 1].

2. (2 points) On calcule  $f(0) = \pi$  et  $f(1) = \frac{\pi}{6}$ .

La fonction f est continue, par composition et somme de fonctions continues.

Comme  $\frac{\pi}{6} \leqslant \frac{5\pi}{6} \leqslant \pi$  alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe  $x \in [0,1]$  tel que  $f(x) = \frac{5\pi}{6}$ .

Ceci signifie que l'équation  $(\star)$  admet au moins une solution.

3. (2 points) On sait que pour tout  $x \in [-1, 1]$ :  $\sin(\arcsin x) = x$ ,  $\cos(\arccos x) = x$ , et  $\sin(\arccos x) = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$ .

Soit  $x \in [0, 1]$ . On calcule :

$$\sin(f(x)) = \sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 - \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2} + x\left(1 - \frac{x}{2}\right)$$
$$= \sqrt{1 - x^2} \frac{1}{2} \sqrt{4x - x^2} + \frac{1}{2}x(2 - x)$$

Si x est solution de l'équation ( $\star$ ) alors par application de la fonction sinus :

$$\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}\sqrt{4x-x^2} + \frac{1}{2}x(2-x) = \frac{1}{2} \tag{1}$$

Cette dernière équation équivaut à :

$$\sqrt{(1-x)(1+x)}\sqrt{4x-x^2} = 1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$$

Comme  $f(1) = \pi \neq \frac{5\pi}{6}$  alors 1 n'est pas solution de l'équation  $(\star)$ , et donc  $x \neq 1$ , puis :

$$(1) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sqrt{1+x}\sqrt{4x-x^2} = (1-x)\sqrt{1-x}$$

Il s'agit de l'équation attendue.

4. (2 points) Tous les termes sont positifs donc :

(1) 
$$\iff$$
  $(1+x)(4x-x^2) = (1-x)^3$ 

En développant :

(1) 
$$\iff$$
  $4x + 4x^2 - x^2 - x^3 = 1 - 3x + 3x^2 - x^3$   
 $\iff$   $7x = 1$   $\iff$   $x = \frac{1}{7}$ 

Ainsi  $\frac{1}{7}$  est la seule solution possible de l'équation. Comme celle-ci admet au moins une solution alors  $\frac{1}{7}$  est bien solution, et donc l'ensemble des solutions de l'équation  $(\star)$  est  $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{7}\right\}$ .

Exercice 2. (4 points)

1. (3 points) Supposons que f est injective.

Soit  $x \in E$ . Comme  $f \circ f = f$  alors : f(f(x)) = f(x).

Comme f est injective alors : f(x) = x.

Ceci montre que x admet lui-même pour antécédent.

Ceci étant vrai pour tout  $x \in E$ , la fonction f est sujective.

Supposons que f est surjective.

Soit x et x' deux éléments de E tels que f(x) = f(x').

Comme f est surjective alors il existe  $(y, y') \in E^2$  tel que f(y) = x et f(y') = x'.

Comme f(x) = f(x') alors  $f \circ f(y) = f \circ f(y')$ . Or  $f \circ f = f$  donc f(y) = f(y'), ce qui donne x = x'.

On a démontré que pour tout  $(x, x') \in E^2$ , si f(x) = f(x') alors x = x'.

Ceci montre que f est injective.

Finalement f est injective si et seulement si f est surjective.

2. (1 point) Supposons que f est injective ou surjective.

D'après la question précédente f est alors injective et surjective, donc bijective.

Elle admet donc une fonction réciproque  $f^{-1}$ .

Par composition, comme  $f \circ f = f$  alors  $f \circ f \circ f^{-1} = f \circ f^{-1}$ , ce qui donne  $f = \mathrm{Id}_E$ .

Donc si f est injective ou surjective alors f est l'identité de E.

Problème 1. (13 points)

1. (a) (2 points) Pour tout entier  $n \ge 2$ :

$$u_{n+1} - u_n = S_{n+1} - S_n - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Par concavité du logarithme :  $u_{n+1} - u_n \ge 0$ .

La suite  $(u_n)$  est donc croissante.

De même, pour tout entier  $n \ge 2$ :

$$v_{n+1} - v_n = S_{n+1} - S_n - \ln(n) + \ln(n-1) = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \left(-\frac{1}{n}\right)$$

Par concavité du logarithme :  $v_{n+1} - v_n \leq 0$ 

La suite  $(v_n)$  est donc décroissante.

(b) (2 points) Pour tout entier  $n \ge 2$ :

$$v_n - u_n = S_n - S_n - \ln(n-1) + \ln(n) = -\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \ge 0$$

Ceci montre que  $u_n \leq v_n$ .

Comme la suite  $(v_n)$  est décroissante et  $n \ge 2$  alors  $v_n \le v_2$ , puis par transitivité :  $u_n \le v_2 = S_2$ .

- (c)  $(1 \ point)$  La suite  $(u_n)$  est croissante majorée par  $S_2$ , donc par théorème de la limite monotone elle est convergente.
- (d) (1 point) Comme la suite  $(u_n)$  converge vers  $\gamma$ , alors :

$$S_n - \ln n - \gamma \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

En divisant par  $\ln n$ :

$$\frac{S_n}{\ln n} - 1 - \frac{\gamma}{\ln n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Comme  $\frac{\gamma}{\ln n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$  alors:

$$\frac{S_n}{\ln n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1.$$

Ceci montre bien que  $S_n \sim \ln n$ .

2. (a) (1 point) On définit la fonction  $f: x \mapsto x + \frac{1}{x}$ , itératrice de la suite récurrente  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Cette fonction est définie sur  $\mathbb{R}^*$ , et l'intervalle  $\mathbb{R}_+^*$  est stable par f.

En effet, si x > 0 alors  $x + \frac{1}{x} > 0$  donc f(x) > 0.

La suite  $(u_n)$  est définie par  $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$  et :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$ .

Par propriété, comme  $\mathbb{R}_+^*$  est stable par f alors la suite  $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$  est bien définie et incluse dans  $\mathbb{R}_+^*$ , donc strictement positive.

(b) (2 points) La suite  $(u_n)$  est strictement positive donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} > 0$$

Ceci montre que la suite  $(u_n)$  est strictement croissante.

Par théorème une suite monotone admet une limite, donc la suite  $(u_n)$  admet une limite.

Supposons que cette limite est finie et notons-la  $\ell$ .

On sait que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} \tag{1}$$

Par décalage  $u_{n+1}$  converge vers  $\ell$ . Par soustraction  $\frac{1}{u_n}$  converge vers 0, ce qui veut dire que la suite  $(u_n)$  diverge vers  $+\infty$ , alors qu'on a supposé qu'elle converge vers un réel  $\ell$ .

Cette contradiction montre que la limite de la suite  $(u_n)$  n'est pas finie.

Comme  $(u_n)$  est croissante alors cette limite est  $+\infty$ .

(c) (1 point) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on note  $\mathcal{P}_n$  la propriété :  $u_n^2 \geqslant 2n + u_0^2$ 

On démontre par récurrence que cette propriété est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

<u>Initialisation</u>. La propriété  $\mathcal{P}_0$  s'écrit  $u_0^2 \geqslant u_0^2$ , elle est donc vraie.

<u>Hérédité.</u> Supposons que pour un certain  $n \in \mathbb{N}$  la propriété  $\mathcal{P}_n$  est vraie.

On sait que  $u_{n+1}=u_n+\frac{1}{u_n}$  donc  $u_{n+1}^2=u_n^2+2+\frac{1}{u_n^2}$ . Comme  $\frac{1}{u_n^2}>0$  alors en utilisant la propriété  $\mathcal{P}_n$ :

$$u_{n+1}^2 \ge u_n^2 + 2 \ge 2n + u_0^2 + 2 = 2(n+1) + u_0^2$$

Ceci montre que la propriété  $\mathcal{P}_{n+1}$  est vraie.

<u>Conclusion</u>. La propriété  $\mathcal{P}_n$  est vraie au rang 0 et elle est héréditaire, donc par récurrence elle est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

(d) (1 point) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on note  $\mathcal{P}_n$  la propriété :  $u_n^2 \leqslant 2n + \frac{1}{2}S_n + u_1^2$ 

On démontre par récurrence que cette propriété est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Initialisation. La propriété  $\mathcal{P}_1$  s'écrit  $u_1^2 \leqslant \frac{1}{2}S_1 + u_1^2$ .

Or  $S_1 = 0$  car c'est une somme vide, et ainsi la propriété  $\mathcal{P}_1$  est vraie.

<u>Hérédité.</u> Supposons que pour un certain  $n \in \mathbb{N}^*$  la propriété  $\mathcal{P}_n$  est vraie.

On a démontré ci-dessus que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_n^2 \geqslant 2n + u_0^2$ 

Ceci montre que  $u_n^2 \geqslant 2n$  donc  $\frac{1}{u_n^2} \leqslant \frac{1}{2n}$ . On en déduit :

$$u_{n+1}^2 = \left(u_n + \frac{1}{u_n}\right)^2 = u_n^2 + 2 + \frac{1}{u_n^2} \leqslant u_n^2 + 2 + \frac{1}{2n}$$

Comme la propriété  $\mathcal{P}_n$  est supposée vraie :

$$u_n^2 \le 2n + \frac{1}{2}S_n + u_1^2 + 2 + \frac{1}{2n} = 2(n+1) + \frac{1}{2}\left(S_n + \frac{1}{n}\right) + u_1^2$$

Or

$$S_n + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = S_{n+1}$$

Ceci montre que la propriété  $\mathcal{P}_{n+1}$  est vraie.

<u>Conclusion</u>. La propriété  $\mathcal{P}_n$  est vraie au rang 1 et elle est héréditaire, donc par récurrence elle est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

(e) (2 points) Les deux questions précédentes montrent que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*$$
  $2n + u_0^2 \leqslant u_n^2 \leqslant 2n + \frac{1}{2}S_n + u_1^2$ 

En divisant par 2n:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad 1 + \frac{u_0^2}{2n} \leqslant \frac{u_n^2}{2n} \leqslant 1 + \frac{1}{4n} S_n + \frac{u_1^2}{2n} \tag{2}$$

Par croissances comparées  $\ln n = o(n)$  donc la suite  $\left(\frac{\ln n}{n}\right)$  converge vers 0.

D'après la partie A :  $S_n \sim \ln n$ . Donc  $\frac{S_n}{n} \sim \frac{\ln n}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ . On en déduit :

$$\lim \left(1 + \frac{u_0^2}{2n}\right) = \lim \left(1 + \frac{1}{4n}S_n + \frac{u_1^2}{2n}\right) = 1$$

On applique le théorème d'encadrement à l'inégalité (2), il montre que la suite  $\left(\frac{u_n^2}{2n}\right)$  converge vers 1.

La suite  $\frac{u_n}{\sqrt{2n}}$  est positive et son carré converge vers 1 donc elle converge vers 1.

Ceci montre que  $(u_n)$  est équivalente à la suite  $(\sqrt{2n})$ .

$$u_n \sim \sqrt{2n}$$

Problème 2. (15 points)

1. (a) (1 point) Démontrons les formules :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \operatorname{ch}(2x) = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = 2 \operatorname{ch}^2 x - 1 = 1 + 2 \operatorname{sh}^2 x$$
$$\operatorname{sh}(2x) = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$$

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Alors:

$$\operatorname{ch}^{2} x + \operatorname{sh}^{2} x = \left(\frac{e^{x} + e^{-x}}{2}\right)^{2} + \left(\frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right)^{2} = \frac{2e^{2x} + 2e^{-2x}}{4} = \operatorname{ch}(2x).$$

La formule  $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$  permet d'obtenir les deux autres formules pour  $\operatorname{ch}(2x)$ . Ensuite :

$$2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = 2 \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \operatorname{sh}(2x).$$

Les formules sont démontrées.

- (b) (2 points) Vérifions que l'égalité proposée est bien définie sur R.
  - Les fonctions th,  $\arctan$  et sh sont définies sur  $\mathbb{R}$ ,
  - La fonction arcsin est définie sur [-1, 1].
  - La fonction th prend ses valeurs dans l'intervalle ]-1,1[.

Ceci montre que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , les expressions arcsin th x et arctan sh x sont bien définies. Montrons maintenant qu'elles sont égales.

Méthode 1. On remarque que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ :

$$\tan(\arcsin th x) = \frac{\sin(\arcsin th)}{\cos(\arcsin th)} = \frac{th x}{\sqrt{1 - th^2 x}}$$

De plus:

$$\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 x} = \sqrt{\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}} = \frac{1}{|\operatorname{ch} x|} = \frac{1}{\operatorname{ch} x}.$$

Ceci car la fonction che st strictement positive. Ainsi:

$$\tan(\arcsin \operatorname{th} x) = \operatorname{th} x \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} x.$$

Par application de la fonction arctan:

$$\arctan \tan (\arcsin \operatorname{th} x) = \arctan \operatorname{sh} x.$$

On sait que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ :  $-1 < \operatorname{th} x < 1$ .

La fonction arcsin est strictement croissante donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}$$
  $-\frac{\pi}{2} < \arcsin(\operatorname{th} x) < \frac{\pi}{2}$ 

De plus par définition de l'arc-tangente :

$$\forall X \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \arctan(\tan X) = X$$

On en déduit donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}$$
 arcsin th  $x = \arctan \sinh x$ .

Méthode 2. On définit les fonctions f et g par :

$$\forall x \in \mathbb{R}$$
  $g(x) = \arcsin \operatorname{th} x$  et  $g(x) = \arctan \operatorname{sh} x$ .

D'après le préambule de cette question ces fonctions sont définies sur R.

La fonction arcsin est dérivable sur ]-1,1[. La fonction the est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \text{th } x \in ]-1, 1[.$$

Donc par composition la fonction f est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

Les fonctions arctan et sh sont dérivables sur  $\mathbb{R}$  donc par composition la fonction g est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

On obtient:

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = \frac{1 - \operatorname{th}^2 x}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 x}} = \sqrt{1 - \operatorname{th}^2 x} = \sqrt{\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}} = \frac{1}{\operatorname{ch} x} \qquad \operatorname{car} \ \operatorname{ch} x > 0$$
$$g'(x) = \frac{\operatorname{ch} x}{1 + \operatorname{sh}^2 x} = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch} x}$$

Ainsi f' = g'. Comme  $\mathbb R$  est un intervalle alors par théorème il existe une constante K telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}$$
  $f(x) = g(x) + K$ 

Comme f(0)=g(0)=0 alors K=0, ce qui montre que f=g, l'égalité est démontrée.

2. (a) (2 points) Soit  $t \in \left] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right[$ . Alors  $t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$  donc  $\tan(2t)$  est définie et :

$$f(\tan(2t)) = 2\arctan\frac{\tan(2t)}{1 + \sqrt{1 + \tan^2(2t)}} = 2\arctan\frac{\sin(2t)}{\cos(2t) + \cos(2t)\sqrt{\frac{1}{\cos^2(2t)}}}$$

Comme  $2t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \text{ alors } \cos(2t) > 0 \text{ et } :$ 

$$f(\tan(2t)) = 2\arctan\frac{\sin(2t)}{\cos(2t) + 1} = 2\arctan\frac{2\sin t\cos t}{2\cos^2 t} = 2\arctan(\tan t).$$

Comme  $t \in \left] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right[$  alors  $t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$  et donc  $\arctan(\tan t) = t$ . On en déduit :

$$\forall t \in \left] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right[ f(\tan(2t)) = 2t.$$

(b) (1 point) Soit x un réel, et  $t = \frac{1}{2} \arctan x$ . Alors  $\tan(2t) = x$ .

De plus  $\arctan x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \text{ donc } t \in \left] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right[, \text{ et d'après la question précédente} :$ 

$$f(x) = f(\tan(2t)) = 2t = \arctan x.$$

Ceci étant valable pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on en déduit que f est la fonction arc-tangente.

- 3. (a) (1 point) La fonction g est définie en tout point x tel que  $1-x^2\geqslant 0$ . En effet, si  $1-x^2\geqslant 0$  alors  $\sqrt{1-x^2}$  est défini et positif, donc  $1+\sqrt{1-x^2}>0$ , et ainsi le quotient  $\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$  est défini, c'est un réel donc il admet un arc-tangente. La fonction g est donc définie sur I=[-1,1].
  - (b) (1 point) Si  $x \in \mathbb{R}$  alors th(2x) est défini et appartient à ]-1, 1[, donc  $g(\operatorname{th}(2x))$  est défini. On calcule :

$$g(\operatorname{th}(2x)) = 2 \arctan \frac{\operatorname{th}(2x)}{1 + \sqrt{1 - \operatorname{th}^2(2x)}} = 2 \arctan \frac{\operatorname{sh}(2x)}{\operatorname{ch}(2x)\left(1 + \sqrt{\frac{1}{\operatorname{ch}^2(2x)}}\right)}$$

La fonction ch est strictement positive donc  $|\operatorname{ch}(2x)| = \operatorname{ch}(2x)$ , et:

$$g(\operatorname{th}(2x)) = 2 \arctan \frac{\operatorname{sh}(2x)}{\operatorname{ch}(2x) + 1} = 2 \arctan \frac{2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}{2 \operatorname{ch}^2 x} = 2 \arctan \operatorname{th} x$$

(c) (1 point) Comme th  $x \in ]-1,1[$  alors par stricte croissance de la fonction arctangente  $\operatorname{arctan}(\operatorname{th} x) \in ]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}[$ , et donc  $g(\operatorname{th}(2x)) \in ]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ . Ainsi ce réel admet une tangente, et :

$$\tan(g(\operatorname{th}(2x))) = \tan(2\arctan\operatorname{th} x) = \frac{2\operatorname{th} x}{1-\operatorname{th}^2 x}$$

Comme  $1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$  alors :

$$\tan(q(\operatorname{th}(2x))) = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = \operatorname{sh}(2x).$$

(d) (2 points) Par définition de l'arctangente :

$$\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad y = \tan x \iff x = \arctan y.$$

Nous avons vu que  $g(\operatorname{th}(2x)) \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ , donc l'expression de la question précédente donne :

$$g(\operatorname{th}(2x)) = \arctan(\operatorname{sh}(2x)).$$

D'après l'égalité de la question (1b) :

$$\forall x \in \mathbb{R}$$
  $g(\operatorname{th}(2x)) = \arcsin(\operatorname{th}(2x)).$ 

Tout élément y de l'intervalle ]-1,1[ admet un antécédent x par la fonction  $x \mapsto th(2x)$ , donc :

$$\forall y \in ]-1,1[$$
  $g(y) = \arcsin y.$ 

La fonction g est continue par composition, somme et quotient. La fonction arcsin est également continue, donc par unicité de la limite en -1 et 1:

$$\forall y \in [-1, 1]$$
  $g(y) = \arcsin y$ .

En conclusion, la fonction g est la fonction arc-sinus.

4. (a) (1 point) La fonction h est définie en tout réel x tel que  $1+x\neq 0$  et  $\frac{1-x}{1+x}\geqslant 0$ .

Comme  $(1+x)^2$  est positif alors  $\frac{1-x}{1+x}$  est du signe de  $(1-x)(1+x)=1-x^2$ , donc la fonction h est définie sur J=]-1,1].

Si  $x \in J$  alors  $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$  est défini et positif, et donc par propriétés de l'arc-tangente :

$$0 \leqslant \arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} < \frac{\pi}{2}$$
 ce qui montre que  $h(x) \in [0, \pi[$ .

(b) (2 points) Soit  $y \in [0, \pi[$ . Alors pour tout  $x \in J$ :

$$h(x) = y$$
  $\iff$   $\arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{y}{2}$ 

Comme  $y\in[0,\pi[$  alors  $\frac{y}{2}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ , donc par propriétés de l'arctangente :

$$h(x) = y$$
  $\iff$   $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \tan\frac{y}{2}$ 

Comme  $\frac{y}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  alors  $\tan \frac{y}{2}$  est positif, donc :

$$h(x) = y$$
  $\iff$   $\frac{1-x}{1+x} = \tan^2 \frac{y}{2}$ 

Par équivalences :

$$h(x) = y \qquad \iff \qquad 1 - x = (1+x)\tan^2\frac{y}{2}$$
 
$$\iff \qquad \left(1 + \tan^2\frac{y}{2}\right)x = 1 - \tan^2\frac{y}{2}$$
 
$$\iff \qquad x = \frac{1 - \tan^2\frac{y}{2}}{1 + \tan^2\frac{y}{2}} = \frac{\cos^2\frac{y}{2} - \sin^2\frac{y}{2}}{\cos^2\frac{y}{2} + \sin^2\frac{y}{2}} = \cos y.$$

Nous avons démontré que l'équation h(x) = y admet  $x = \cos y$  pour unique solution.

(c) (1 point) D'après la question précédente la fonction h est bijective de J=[-1,1] dans  $[0,\pi[$ , de réciproque  $\cos:[0,\pi[\to]-1,1]$ .

Or la réciproque de la fonction  $\cos: [0, \pi] \to [-1, 1]$  est la fonction  $\arccos: [-1, 1] \to [0, \pi]$ .

Par restriction la réciproque de la fonction cos :  $[0, \pi[ \to ]-1, 1]$  est la fonction arccos :  $]-1, 1] \to [0, \pi[$ .

Par unicité de la fonction réciproque, h est la fonction arccos restreinte à l'intervalle [-1,1]:

$$\forall x \in ]-1,1]$$
  $h(x) = \arccos x.$