Lycée Bellevue – Toulouse **22 novembre 2024**
MPSI – Mathématiques

Devoir Surveillé n°3

Durée : 3 heures – Calculatrices non autorisées

- *On rappelle qu'une grande attention est portée à la présentation, l'orthographe, la qualité de la rédaction.*
- *En général les symboles mathématiques ne doivent pas figurer dans une phrase.*
- *Les objets introduits doivent être présentés correctement.*
- *Les références au cours doivent être citées, de même que les questions précédentes si elles sont utilisées.*
- *Il est inutile de recopier l'énoncé.*
- *Les copies doivent être numérotées, leur nombre total indiqué.*
- *Les annotations au crayon ne sont pas prises en compte.*
- *Si un élève est amené à repérer ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

Exercices.

1. Résoudre l'équation
$$z^9 + 3z^5 - 4z = 0$$
et représenter ses solutions dans le plan complexe.
2. Soit E un ensemble et X, Y deux parties de E. Simplifier :
$$(X \cup Y) \cap (\overline{X} \cup Y) \cap (X \cup \overline{Y})$$
3. Soit E et F deux ensembles, $f : E \to F$ et $g : F \to E$ deux applications telles que $f \circ g \circ f = f$.
   (a) Démontrer que si f est injective alors g est surjective.
   (b) Démontrer que si f est surjective alors g est injective.
   (c) Que peut-on ajouter si f est bijective ?
4. On souhaite résoudre l'équation :
$$\arcsin \frac{1}{\operatorname{ch}(x)} = \arctan \operatorname{sh}(x). \qquad (\star)$$
   (a) Sur quel ensemble cette équation est-elle définie ?
   (b) Soit x un réel et $a = \operatorname{sh} x$. Exprimer $\operatorname{ch} x$ en fonction de a.
   (c) Résoudre l'équation $(\star)$.

Problème 1.
Soit $n \geqslant 2$ un entier et $\theta = \frac{\pi}{n}$. On définit :

$$\forall z \in \mathbb{C} \qquad P(z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta)\, z^k.$$

1. Pour tout complexe z on pose $Q(z) = \left(ze^{i\theta} + 1\right)^n - \left(ze^{-i\theta} + 1\right)^n$.
   Développer $Q(z)$ puis démontrer que :

$$P(z) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{z + e^{-i\theta}}{z + e^{i\theta}} \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}\,.$$

2. En déduire les solutions de l'équation $P(z) = 0$.
   Exprimer celles-ci uniquement à l'aide de la fonction sinus.
3. Démontrer que la fonction $f : x \mapsto -\dfrac{\sin(x+\theta)}{\sin x}$ réalise une bijection de $]0, \pi[$ dans $\mathbb{R}$.
4. En déduire que l'équation $P(z) = 0$ admet exactement $n - 1$ solutions distinctes.

Problème 2.
On pose $f(x) = 2 \arctan \sqrt{\dfrac{x}{4-x}}$.

1. Soit $\varphi(x) = \frac{x}{4-x}$.
   Déterminer l'ensemble de définition de la fonction φ, ses variations et ses limites.
2. Justifier que f est définie sur $[0, 4[$ et à valeurs dans $[0, \pi[$.
3. (a) Démontrer que $f : [0, 4[\to [0, \pi[$ est bijective et calculer sa réciproque.
   (b) Démontrer que pour tout $x \in [0, \pi[$: $\quad f^{-1}(x) = 2(1 - \cos x)$.
   (c) Calculer une réciproque de la fonction $x \mapsto 2(1 - \cos x)$ et en déduire que :

$$\forall x \in [0, 4[\qquad f(x) = \arccos\left(1 - \frac{x}{2}\right). \tag{1}$$

4. On souhaite retrouver le résultat de la question précédente d'une autre façon.
   (a) Calculer $\cos(f(x))$ pour tout $x \in [0, 4[$.
   (b) Retrouver alors la formule (1).
5. On souhaite encore retrouver le résultat précédent d'une manière différente.
   (a) Justifier que f est dérivable sur $]0, 4[$ et calculer sa dérivée.
   (b) Soit $g(x) = \arccos(1 - \frac{x}{2})$.
   Donner l'ensemble de définition de g, et calculer sa dérivée aux points où elle est dérivable.
   (c) En déduire que $f = g$ sur $[0, 4[$.
6. (a) Justifier que pour tout $x \in [0, 4[$: $\quad f(x) = \arcsin\left(\dfrac{x}{2} - 1\right) + \dfrac{\pi}{2}$.
   (b) Tracer la courbe représentative de f en s'aidant de celle de l'arc-sinus.