Devoir Surveillé n°3

Durée : 3 heures – Calculatrices non autorisées.

- On rappelle qu'une grande attention est portée à la présentation, l'orthographe, la qualité de la rédaction.
- En général les symboles mathématiques ne doivent pas figurer dans une phrase.
- Les objets introduits doivent être présentés correctement.
- Les références au cours doivent être citées, de même que les questions précédentes si elles sont utilisées.
- Il est inutile de recopier l'énoncé.
- Les copies doivent être numérotées, leur nombre total indiqué.
- Les annotations au crayon ne sont pas prises en compte.
- Le barème est indicatif.
- Si un élève est amené à repérer ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1. (7 points)

On souhaite résoudre l'équation :

$$\arccos x + \arcsin\left(1 - \frac{x}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$$
 (*)

Pour ceci on définit la fonction $f: x \mapsto \arccos x + \arcsin\left(1 - \frac{x}{2}\right)$.

- 1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
- 2. Déterminer les valeurs de f aux bornes de son ensemble de définition. En déduire que l'équation (\star) admet au moins une solution.
- 3. Calculer $\sin(f(x))$ et en déduire que si x est solution de (\star) alors :

$$\sqrt{1+x}\sqrt{4x-x^2} = (1-x)\sqrt{1-x}$$

4. Conclure : quel est l'ensemble des solutions de l'équation (\star) ?

Exercice 2. (4 points)

Soit E un ensemble et f une fonction de E dans E.

On suppose que $f \circ f = f$.

- 1. Démontrer que f est injective si et seulement si f est surjective.
- 2. Démontrer que si f est injective ou surjective alors $f = \mathrm{Id}_E$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note : $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ on définit :

$$u_n = S_n - \ln n$$
 et $v_n = S_n - \ln(n-1)$.

On rappelle que, du fait de la concavité du logarithme : $\forall x \in]-1, +\infty[$ $\ln(1+x) \leq x$

- (a) Déterminer le sens de variations des suites (u_n) et (v_n) .
- (b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$: $u_n \leqslant v_n$ et en déduire : $u_n \leqslant S_2$.
- (c) Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On notera γ sa limite.
- (d) Démontrer que $S_n \sim \ln n$.
- 2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par une certaine valeur strictement positive de u_0 et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$$

- (a) Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et strictement positive.
- (b) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
- (c) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n^2 \geqslant 2n + u_0^2$
- (d) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n^2 \leqslant 2n + \frac{1}{2}S_n + u_1^2$
- (e) Déterminer un équivalent simple de u_n .

Problème 2. (15 points)

- 1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\operatorname{ch}(2x)$ et $\operatorname{sh}(2x)$ en fonction de $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{sh} x$, et démontrer ces formules.
 - (b) Par la méthode de votre choix, démontrer que :

 $\forall x \in \mathbb{R}$ arcsin th $x = \arctan \sinh x$.

On pose:

$$f(x) = 2 \arctan \frac{x}{1 + \sqrt{1 + x^2}}$$
 $g(x) = 2 \arctan \frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}}$ $h(x) = 2 \arctan \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}$.

- 2. On constate que la fonction f est définie sur \mathbb{R} (inutile de le démontrer).
 - (a) Calculer $f(\tan(2t))$ pour tout $t \in \left] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right[$.
 - (b) En déduire une expression de f comme fonction usuelle.
- 3. (a) Donner l'ensemble de définition de la fonction q, que l'on note I.
 - (b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Justifier que l'expression $g(\operatorname{th}(2x))$ est définie et la simplifier.
 - (c) Justifier que l'expression tan(g(th(2x))) est définie et la simplifier.
 - (d) En utilisant (1b), donner une forme simplifiée de g sur I.
- 4. (a) Donner l'ensemble de définition de la fonction h, que l'on note J. Justifier que pour tout $x \in J, h(x) \in [0, \pi[$.
 - (b) Pour tout $y \in [0, \pi[$, résoudre l'équation h(x) = y d'inconnue $x \in J$
 - (c) En déduire une expression simplifiée de h sur J.