

**Programme de colles**  
**Semaine 8**  
**du 17 au 21 novembre 2025**

**Questions de cours**

Sauf mention explicite il faut connaître l'énoncé et la démonstration.

1. Pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ ,  $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$  si  $x > 0$  et  $-\frac{\pi}{2}$  si  $x < 0$ .
2. Énoncé du théorème fondamental de l'analyse, énoncé et démonstration de son deuxième corollaire :  
si  $f$  est continue et  $F$  est une primitive de  $f$  alors  $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$ .
3. Calculer une primitive en reconnaissant une primitive usuelle, ou en linéarisant une expression trigonométrique.

**Exercices**

**Chapitre B3. Ensembles**

- I. Ensembles
- II. Applications
- III. Relations binaires
- IV. Ensembles finis

**Programme prévisionnel de la semaine suivante**

Chapitre A5 (Fonctions usuelles).

## **Chapitre B3. Ensembles**

### **I. Ensembles**

Ensemble, éléments. Appartenance, inclusion, ensemble vide, partie ou sous-ensemble. Ensemble  $\mathcal{P}(E)$ . Complémentaire, intersection, réunion, différence. Distributivité de  $\cap$  et  $\cup$  l'une par rapport à l'autre. Lois de de Morgan. Produit cartésien fini. Exemples des ensembles  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}^3$ .

### **II. Applications**

Ensemble  $\mathcal{F}(E, F)$  des applications d'un ensemble  $E$  vers un ensemble  $F$ . Ensembles de départ, d'arrivée, graphe, image et antécédent d'un élément. Identité de  $E$ , restriction, prolongement. Image d'une partie de  $E$ , image réciproque d'une partie de  $F$ .

Injection, surjection, bijection. Stabilité par composition. Fonction réciproque d'une bijection, unicité, caractérisation :  $f : E \rightarrow F$  est bijective si et seulement si il existe  $g : F \rightarrow E$  telle que  $f \circ g = \text{Id}_F$  et  $g \circ f = \text{Id}_E$ . On a alors  $g = f^{-1}$ , et l'unicité de  $f^{-1}$ . Réciproque d'une composée.

Cas des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  : théorème de la bijection, théorème de dérivation de la réciproque.

### **III. Relations binaires**

Relation d'équivalence. Classe d'équivalence, elles réalisent une partition.

Relation d'ordre, total ou partiel. Majorant, minorant, maximum, minimum d'une partie.

### **IV. Ensembles finis**

Cardinal d'un ensemble fini (et uniquement fini). Lien avec l'inclusion, les applications injectives et surjectives. Cardinal d'une union, du complémentaire, du produit cartésien, de l'ensemble des applications de  $E$  dans  $F$ , de l'ensemble des parties de  $E$ .

Nombre de  $p$ -listes d'éléments d'un ensemble fini, de  $p$ -listes d'éléments distincts (sans le mot "arrangement", et sans la notation  $A_n^p$ ). Nombre de permutations.

Nombre de parties à  $p$  éléments d'un ensemble à  $n$  éléments. Formule du binôme et autres, nouvelles démonstrations.