

## Chapitre A7

# Équations différentielles

### Définition

Une *équation différentielle* est une équation dont l'inconnue est une fonction, supposée au moins une fois dérivable, et qui relie cette fonction à ses dérivées.

## I. Équations différentielles linéaires du premier ordre

Soit  $D$  une partie de  $\mathbb{R}$ .

Dans cette partie on cherche toutes les fonctions  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant :

$$\forall t \in D \quad f'(t) - a(t)f(t) = b(t)$$

où  $a$  et  $b$  sont deux fonctions continues de  $D$  dans  $\mathbb{R}$ .

On dit que l'on résout l'équation différentielle :

$$(E) \quad y' - a(t)y = b(t)$$

### A. Structure de l'ensemble des solutions

#### Proposition : Principe de superposition

Soit  $a$ ,  $b_1$  et  $b_2$  trois fonctions. On considère les équations :

$$\begin{aligned} (E_1) \quad y' - a(t)y &= b_1(t) \\ (E_2) \quad y' - a(t)y &= b_2(t) \\ (E) \quad y' - a(t)y &= b_1(t) + b_2(t) \end{aligned}$$

Si  $y_1$  est une solution de  $(E_1)$  et  $y_2$  est une solution de  $(E_2)$  alors  $y = y_1 + y_2$  est solution de  $(E)$ .

Démonstration. Comme  $y_1$  est solution de  $(E_1)$  et  $y_2$  est une solution de  $(E_2)$  alors :

$$\begin{aligned} y'_1 - a(t)y_1 &= b_1(t) \\ y'_2 - a(t)y_2 &= b_2(t) \end{aligned}$$

Par somme :

$$(y'_1 + y'_2) - a(t)(y_1 + y_2) = b_1(t) + b_2(t)$$

Ceci donne :

$$(y_1 + y_2)' - a(t)(y_1 + y_2) = b_1(t) + b_2(t)$$

Ainsi  $y_1 + y_2$  est solution de  $(E)$ . □

**Définition**

Soit  $a$  et  $b$  deux fonctions. Soit  $(E)$  l'équation différentielle :

$$(E) \quad y' - a(t)y = b(t)$$

Alors l'équation

$$(H) \quad y' - a(t)y = 0$$

est appelée *équation homogène* associée à  $(E)$ .

**Proposition**

On conserve les notations ci-dessus, et on note

- $\mathcal{E}$  l'ensemble des solutions de l'équation  $(E)$ ,
- $\mathcal{H}$  l'ensemble des solutions de l'équation  $(H)$ .

Soit  $y_1$  une solution de  $(E)$ . Alors :

$$\mathcal{E} = \{y_0 + y_1 \mid y_0 \in \mathcal{H}\}$$

**Remarque.** Il suffit donc de connaître une seule solution  $y_1$  de  $\mathcal{E}$ , alors les autres sont obtenues en lui additionnant les solutions de  $(H)$ .

On dit que  $y_1$  est une *solution particulière* de  $(E)$ .

Démonstration.

## B. Résolution de l'équation homogène

### Théorème

Soit  $a$  une fonction de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ , où  $I$  est un intervalle non-vide de  $\mathbb{R}$ . Soit  $(H)$  l'équation différentielle homogène :

$$(H) \quad y' - a(t)y = 0$$

Soit  $A$  une primitive de  $a$ . Alors les solutions de l'équation  $(H)$  sont les fonctions :

$$\begin{aligned} y_0 : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \lambda e^{A(t)} \end{aligned}$$

où  $\lambda$  est une constante réelle.

**Remarque.** Ainsi l'ensemble des solutions de  $(H)$  est :

$$\mathcal{H} = \left\{ \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \lambda e^{A(t)} \end{array} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

**Exemple 1.** Si  $a$  est une constante, alors les solutions de l'équation  $y' - ay = 0$  sont les fonctions  $y_0 : t \mapsto \lambda e^{at}$  où  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Démonstration.

► **Exercice 1.**

## C. Recherche d'une solution particulière

### 1. Solutions évidentes

**Exemple 2.** Donner une solution particulière des équations suivantes.

$(E_1)$	$y' + y = 3$	$y(t) =$	$y' + y = t + 1$	$y(t) =$
	$y' + y = e^t$	$y(t) =$	$y' + y = 3 + e^t$	$y(t) =$
$(E_2)$	$2t y' + y = \sqrt{t}$	$y(t) =$	$2t y' + y = t^2$	$y(t) =$
$(E_3)$	$(\cos t)y' + (\sin t)y = 1$	$y(t) =$		
	$(\cos t)y' + (\sin t)y = 0$	$y(t) =$		
$(E_4)$	$(2 - t)y' + 3y = t^2 + 2t - 8$	$y(t) =$		

► **Exercice 2.**

### 2. Variation de la constante

#### Méthode

On a calculé les solutions de l'équation homogène, qui sont de la forme :

$$y(t) = \lambda e^{A(t)}$$

où  $\lambda$  est une constante. On fait varier cette constante, c'est à dire qu'elle devient une fonction de  $t$ , *i.e.*, on pose

$$y(t) = \lambda(t) e^{A(t)}$$

où  $\lambda$  est une fonction dérivable. On résout ensuite l'équation  $(E)$ .

**Exemple 3.** Résoudre sur l'intervalle  $\mathbb{R}_+^*$  l'équation :

$$y' - \frac{1}{t}y = 1$$

**Remarque.** Cette méthode n'aboutit pas toujours, car on ne sait pas toujours intégrer la fonction  $\lambda'(t)$ . On peut le constater par exemple en essayant de résoudre l'équation :

$$y' - 2ty = 2t^3$$

## D. Problème de Cauchy

**Remarque.** Un *problème de Cauchy* est la donnée d'une équation différentielle ainsi que d'une condition initiale, c'est-à-dire de la valeur de la fonction inconnue en un point. Louis-Augustin Cauchy (1789 – 1857).

### Théorème de Cauchy

Si  $I$  est un intervalle,  $a$  et  $b$  sont deux fonctions continues sur  $I$ ,  $t_0$  un élément de  $I$  et  $y_0$  un réel, alors il existe une et une seule solution de l'équation différentielle

$$y'(t) - a(t)y(t) = b(t)$$

satisfaisant la condition initiale  $y(t_0) = y_0$ .

Démonstration. Notons  $(E)$  l'équation différentielle concernée.

L'équation homogène associée à  $(E)$  admet les solutions  $y_0(t) = \lambda e^{A(t)}$  où  $\lambda$  est une constante réelle,  $A$  étant une primitive de  $a$ . La fonction  $A$  existe en vertu du théorème fondamental, car  $a$  est continue et  $I$  est un intervalle.

Par variation de la constante on obtient que  $y(t) = \lambda(t)e^{A(t)}$  est solution de l'équation non homogène si et seulement si  $\lambda'(t) = b(t)e^{-A(t)}$ . La fonction  $t \mapsto b(t)e^{-A(t)}$  admet une primitive par le théorème fondamental, car  $b$  est continue et  $I$  est un intervalle.

Notons  $\Lambda$  une telle primitive.

Les solutions de  $(E)$  sont alors les fonctions

$$y(t) = (\lambda + \Lambda(t))e^{A(t)}$$

où  $\lambda$  est une constante réelle.

La condition initiale  $y(t_0) = y_0$  équivaut à  $\lambda = y_0 e^{-A(t_0)} - \Lambda(t_0)$ , ce réel existe et il est unique, donc l'équation  $(E)$  admet une et une seule solution vérifiant  $y(t_0) = y_0$ .  $\square$

**Remarque.** On peut poser :

$$\forall t \in I \quad A(t) = \int_{t_0}^t a(u) \, du \quad \text{et} \quad \Lambda(t) = \int_{t_0}^t b(u)e^{-A(u)} \, du.$$

Alors  $A$  est une primitive de  $a$  et  $\Lambda$  est une primitive de  $t \mapsto b(t)e^{-A(t)}$ . La solution de l'équation  $(E)$  est :

$$y : t \mapsto (y_0 + \Lambda(t))e^{A(t)}.$$

On peut expliciter cette solution si on sait expliciter les primitives de  $a$  et de  $t \mapsto b(t)e^{-A(t)}$ .

### Exercice 3.

## II. Équations différentielles linéaires du second ordre

Dans cette partie on résout les équations de la forme

$$(E) \quad ay'' + by' + cy = d(t)$$

où  $a, b, c$  sont des constantes et  $d$  est une fonction, éventuellement complexe. Il s'agit des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants.

On appelle toujours *équation homogène* associée à  $(E)$  l'équation :

$$(H) \quad ay'' + by' + cy = 0$$

### A. Structure de l'ensemble des solutions

#### Proposition : Principe de superposition

Soit  $a, b, c$  trois constantes,  $d_1$  et  $d_2$  deux fonctions. On considère les équations :

$$\begin{aligned} (E_1) \quad ay'' + by' + cy &= d_1(t) \\ (E_2) \quad ay'' + by' + cy &= d_2(t) \\ (E) \quad ay'' + by' + cy &= d_1(t) + d_2(t) \end{aligned}$$

Si  $y_1$  est une solution de  $(E_1)$  et  $y_2$  est une solution de  $(E_2)$  alors  $y = y_1 + y_2$  est solution de  $(E)$ .

Démonstration. Similaire à celle pour le premier ordre. □

#### Proposition

On note  $\mathcal{E}$  l'ensemble des solutions de l'équation  $(E)$ ,  $\mathcal{H}$  l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée  $(H)$ .

Soit  $y_1$  une solution de  $(E)$ . Alors :

$$\mathcal{E} = \{y_0 + y_1 \mid y_0 \in \mathcal{H}\}$$

Démonstration. Identique à celle pour le premier ordre. □

## B. Résolution de l'équation homogène

### Définition

Soit  $a, b, c$  trois réels et

$$(H) \quad ay'' + by' + cy = 0$$

une équation différentielle homogène. L'équation

$$(C) \quad a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

d'inconnue  $\lambda \in \mathbb{C}$  est appelé *équation caractéristique* de  $(H)$ .

**Remarque.** On suppose dans toute la suite que  $a$  est non-nul, c'est-à-dire que les équations sont bien du second ordre et non du premier.

### Théorème

Avec les notations précédentes, en notant  $\Delta$  le discriminant de  $(C)$ .

- Si  $\Delta \neq 0$  alors l'équation  $(C)$  admet deux solutions  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . Les solutions de  $(H)$  sont les fonctions

$$y(t) = \alpha e^{\lambda_1 t} + \beta e^{\lambda_2 t}$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux constantes.

- Si  $\Delta = 0$  alors l'équation  $(C)$  admet une unique solution  $\lambda_0$ . Les solutions de  $(H)$  sont les fonctions

$$y(t) = (\alpha t + \beta) e^{\lambda_0 t}$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux constantes.

Démonstration. Soit  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  les solutions de l'équation caractéristique  $(C)$ . (Ces solutions sont égales si  $\Delta = 0$ .)

Soit  $y$  une fonction quelconque. On définit la fonction  $z$  par :  $z(t) = y(t)e^{-\lambda_1 t}$

On calcule alors :  $y(t) =$

puis  $y'(t) =$

et  $y''(t) =$

Ainsi,  $y$  est solution de l'équation  $(H)$  si et seulement si

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

$\iff$

Comme $\lambda_1$ est solution de l'équation (C) alors : $a\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c =$
Comme $\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{b}{a}$ alors : $2a\lambda_1 + b =$

De plus  $a$  est non-nul et l'exponentielle est non-nulle, donc  $y$  est solution de (H) si et seulement si  $z$  est solution de l'équation différentielle :

$$(H') \quad z'' + (\lambda_1 - \lambda_2)z' = 0$$

Il s'agit d'une équation différentielle du premier ordre en  $z'$ , ses solutions sont les fonctions  $z'$  définies pour tout  $t \in \mathbb{R}$  par

$$z'(t) = \mu e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}$$

où  $\mu$  est une constante éventuellement complexe.

Supposons que  $\Delta \neq 0$ . Dans ce cas  $\lambda_1 - \lambda_2$  est non-nul, donc par intégration il existe une constante  $\alpha$  telle que pour tout  $t \in \mathbb{R}$  :

$$z(t) = \mu \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} + \alpha$$

On pose  $\beta = \frac{\mu}{\lambda_2 - \lambda_1}$ , ce qui donne :

$$z(t) = \alpha + \beta e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}$$

Comme  $y(t) = z(t)e^{\lambda_1 t}$  alors

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad y(t) = \alpha e^{\lambda_1 t} + \beta e^{\lambda_2 t}$$

Ceci démontre le résultat du théorème.

Supposons maintenant que  $\Delta = 0$ . Dans ce cas  $\lambda_1 - \lambda_2$  est nul donc l'équation (H') s'écrit :

$$(H') : \quad z'' = 0$$

Elle est vérifiée si et seulement si il existe une constante  $\alpha$  telle que  $z'(t) = \alpha$ , ce qui est vérifié si et seulement si il existe une constante  $\beta$  telle que pour tout  $t \in \mathbb{R}$  :

$$z(t) = \alpha t + \beta$$

Comme  $y(t) = z(t)e^{\lambda_0 t}$  alors :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad y(t) = (\alpha t + \beta)e^{\lambda_0 t}$$

Ceci est bien le résultat annoncé par le théorème. □

**Théorème**

Supposons que  $\Delta < 0$ . Alors on peut écrire  $\lambda_1 = u + iv$  et  $\lambda_2 = u - iv$ , où  $u$  et  $v$  sont des réels. Les solutions de  $(H)$  sont alors les fonctions définies par :

$$y(t) = e^{ut}(A \cos(vt) + B \sin(vt))$$

où  $A$  et  $B$  sont des constantes réelles.

Démonstration. L'équation  $(H)$  est une équation à coefficients réels, donc *a fortiori* une équation à coefficients complexes. D'après le théorème précédent, nous savons que ses solutions complexes sont les fonctions de la forme

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad y(t) = \alpha e^{\lambda_1 t} + \beta e^{\lambda_2 t}$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes complexes.

Ceci donne :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad y(t) = e^{ut}[(\alpha + \beta) \cos vt + i(\alpha - \beta) \sin vt]$$

On pose

$$\begin{cases} A = \alpha + \beta \\ B = i(\alpha - \beta) \end{cases} \quad \text{ce qui équivaut à} \quad \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2}(A - iB) \\ \beta = \frac{1}{2}(A + iB) \end{cases}$$

Ceci donne :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad y(t) = e^{ut}(A \cos vt + B \sin vt)$$

Or la fonction  $y$  est réelle :  $\forall t \in \mathbb{R} \quad y(t) \in \mathbb{R}$

Pour  $t = 0$  et  $t = \frac{\pi}{2v}$  on obtient  $y(0) = A$  et  $y\left(\frac{\pi}{2v}\right) = e^{\frac{u\pi}{2v}} B$ , donc  $A$  et  $B$  sont réels.

Le théorème est démontré. □

► **Exercice 4.**

## C. Résolution avec second membre

On résout les équations de la forme

$$(E) : \quad ay'' + by' + cy = K e^{\mu t}$$

où  $a, b, c, K$  et  $\mu$  sont des constantes,  $K$  et  $\mu$  éventuellement complexes.

D'après le principe de superposition il suffit de trouver une solution particulière de  $(E)$  pour obtenir toutes ses solutions.

**Méthode**

On cherche une solution de la forme :

- $y(t) = Le^{\mu t}$  si  $\mu$  n'est pas racine de l'équation caractéristique  
*i.e.,*  $\mu \neq \lambda_1, \mu \neq \lambda_2$  ou  $\mu \neq \lambda_0$
- $y(t) = Lte^{\mu t}$  si  $\mu$  est racine simple de l'équation caractéristique  
*i.e.,*  $\Delta \neq 0$  et  $\mu = \lambda_1$  ou  $\mu = \lambda_2$
- $y(t) = Lt^2e^{\mu t}$  si  $\mu$  est racine double de l'équation caractéristique  
*i.e.,*  $\Delta = 0$  et  $\mu = \lambda_0$ .

**Exemple 4.** Résoudre les équations :

$$\begin{aligned} (E_1) \quad y'' - y' - 2y &= e^t \\ (E_2) \quad y'' - y' - 2y &= 2 \operatorname{ch} t \\ (E_3) \quad y'' - y' - 2y &= 5 - 4t^3 \end{aligned}$$

**Remarque.** Lorsque le second membre est polynomial, on cherche une solution polynomiale.

**Méthode : second membre trigonométrique**

Supposons que  $\mu$  soit un complexe. Dans ce cas, si  $y$  est solution de :

$$ay'' + by' + cy = Ke^{\mu t}$$

alors  $\operatorname{Re}(y)$  et  $\operatorname{Im}(y)$  sont solutions respectivement de :

$$ay'' + by' + cy = K \operatorname{Re}(e^{\mu t}) \quad \text{et} \quad ay'' + by' + cy = K \operatorname{Im}(e^{\mu t})$$

En particulier pour résoudre les équations

$$(E_1) \quad ay'' + by' + cy = K \cos \omega t \quad \text{et} \quad (E_2) \quad ay'' + by' + cy = K \sin \omega t$$

il suffit de résoudre l'équation :

$$(E) \quad ay'' + by' + cy = Ke^{i\omega t}$$

Si  $y$  est solution de  $(E)$  alors  $\operatorname{Re}(y)$  est solution de  $(E_1)$  et  $\operatorname{Im}(y)$  est solution de  $(E_2)$ .

**Exemple 5.** Résolution de l'équation :

$$y'' - y' - 2y = 10 \cos t$$

► **Exercice 5.**

## D. Problème de Cauchy

### Théorème de Cauchy

Soit  $t_0$  un réel,  $y_0$  et  $z_0$  deux éléments de  $\mathbb{C}$ . Alors l'équation

$$ay'' + by' + cy = Ke^{\mu t}$$

admet une unique solution telle que  $y(t_0) = y_0$  et  $y'(t_0) = z_0$ .

Démonstration. Supposons que  $\Delta \neq 0$ . Alors les solutions sont de la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad y(t) = \alpha e^{\lambda_1 t} + \beta e^{\lambda_2 t} + y_1(t)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux constantes éléments de  $\mathbb{C}$ , et  $y_1$  est une solution particulière. Ceci donne :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad y'(t) = \alpha \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + \beta \lambda_2 e^{\lambda_2 t} + y'_1(t)$$

Les conditions initiales  $y(t_0) = y_0$  et  $y'(t_0) = z_0$  équivalent alors au système

$$\begin{cases} e^{\lambda_1 t_0} \alpha + e^{\lambda_2 t_0} \beta = y_0 - y_1(t_0) \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t_0} \alpha + \lambda_2 e^{\lambda_2 t_0} \beta = z_0 - y'_1(t_0) \end{cases}$$

dont les inconnues sont  $\alpha$  et  $\beta$ . Il s'agit d'un système de deux équations à deux inconnues. Son déterminant est :

$$D = e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t_0} (\lambda_2 - \lambda_1)$$

Comme le discriminant  $\Delta$  de l'équation caractéristique est supposé non-nul alors les deux racines  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont distinctes, et donc le déterminant  $D$  est non-nul.

Le système admet ainsi une unique solution  $(\alpha, \beta)$ , ce qui montre qu'une unique fonction  $y$  est solution de l'équation différentielle munie de ses conditions initiales.

Supposons maintenant que  $\Delta = 0$ . alors les solutions de l'équation différentielle sont de la forme

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad y(t) = (\alpha t + \beta) e^{\lambda_0 t} + y_1(t)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux constantes éléments de  $\mathbb{C}$  et  $y_1$  est une solution particulière. Ceci donne :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad y'(t) = (\lambda_0 \alpha t + \lambda_0 \beta + \alpha) e^{\lambda_0 t} + y'_1(t)$$

Les conditions initiales  $y(t_0) = y_0$  et  $y'(t_0) = z_0$  sont équivalentes au système

$$\begin{cases} t_0 e^{\lambda_0 t_0} \alpha + e^{\lambda_0 t_0} \beta = y_0 - y_1(t_0) \\ (\lambda_0 t_0 + 1) e^{\lambda_0 t_0} \alpha + \lambda_0 e^{\lambda_0 t_0} \beta = z_0 - y'_1(t_0) \end{cases}$$

Le déterminant de ce système est  $D = -e^{2\lambda_0 t_0}$ , il est non-nul donc ce système a une unique solution  $(\alpha, \beta)$ , *i.e.*, il existe une unique solution  $y$  de l'équation différentielle munie de ses conditions initiales.  $\square$

### ► Exercice 6.