Chapitre A6
Équations différentielles

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction, et qui relie cette fonction à ses dérivées.

Elle admet généralement une infinité de solutions. Si on la munit de conditions initiales judicieuses elle admet une et une seule solution.

Par exemple l'équation $y' = y$ munie de la condition initiale $y(0) = 1$ admet pour unique solution $y(t) = e^t$.

I. Équations différentielles linéaires du premier ordre

Soit D une partie de $\mathbb{R}$.

Dans cette partie on résout les équations de la forme :

$$y'(t) - a(t)y(t) = b(t)$$

où a et b sont deux fonctions continues de D dans $\mathbb{R}$.

On cherche une solution $y : D \to \mathbb{R}$ nécessairement dérivable.

A. Principe de superposition

Proposition. *Soit a, b_1 et b_2 trois fonctions. On considère les équations :*

$$\begin{array}{lrcl} (E_1) & y' - a(t)y & = & b_1(t) \\ (E_2) & y' - a(t)y & = & b_2(t) \\ (E) & y' - a(t)y & = & b_1(t) + b_2(t) \end{array}$$

Si y_1 est une solution de (E_1) et y_2 est une solution de (E_2) alors $y = y_1 + y_2$ est solution de (E).

Démonstration. Comme y_1 est solution de (E_1) et y_2 est une solution de (E_2) alors :

$$\begin{array}{rcl} y_1' - a(t)y_1 & = & b_1(t) \\ y_2' - a(t)y_2 & = & b_2(t) \end{array}$$

Par somme :

$$(y_1' + y_2') - a(t)(y_1 + y_2) = b_1(t) + b_2(t)$$

Ceci donne :

$$(y_1 + y_2)' - a(t)(y_1 + y_2) = b_1(t) + b_2(t)$$

Ainsi $y_1 + y_2$ est solution de (E). □

Définition. Soit a et b deux fonctions. Soit (E) l'équation différentielle :

$$(E) \qquad y' - a(t)y = b(t)$$

Alors l'équation

$$(H) \qquad y' - a(t)y = 0$$

est appelée équation homogène associée à (E).

Proposition. *On conserve les notations ci-dessus, et on note $\mathcal{E}$ l'ensemble des solutions de l'équation (E), $\mathcal{H}$ l'ensemble des solutions de l'équation (H).*
Soit y_1 une solution de (E). Alors :

$$\mathcal{E} = \{y_0 + y_1 \mid y_0 \in \mathcal{H}\}$$

Remarque. Il suffit donc de connaître une seule solution y_1 de $\mathcal{E}$, alors les autres sont obtenues en lui additionnant les solutions de (H).
On dit que y_1 est une solution particulière de (E).

Démonstration. D'après le principe de superposition, si y_0 est solution de (H) et y_1 est solution de (E) alors $y_0 + y_1$ est solution de (E). Ceci démontre l'inclusion :

$$\mathcal{E} \supseteq \{y_0 + y_1 \mid y_0 \in \mathcal{H}\}$$

Démontrons l'inclusion réciproque.

Soit y est une solution de (E). Comme y_1 est solution de (E) également alors d'après le principe de superposition $y - y_1$ est solution de (H).

On peut donc écrire $y = (y - y_1) + y_1$ avec $(y - y_1) \in \mathcal{H}$. Ceci démontre l'inclusion

$$\mathcal{E} \subseteq \{y_0 + y_1 \mid y_0 \in \mathcal{H}\}$$

Par double inclusion l'égalité d'ensembles est démontrée. □

B. Résolution de l'équation homogène

Théorème. *Soit a une fonction de I dans $\mathbb{R}$, où I est un intervalle non-vide de $\mathbb{R}$. Soit (H) l'équation différentielle homogène :*

$$(H) \qquad y' - a(t)y = 0$$

Soit A une primitive de a. Alors les solutions de l'équation (H) sont les fonctions

$$y_0 : \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \lambda e^{A(t)} \end{array}$$

où λ est une constante réelle.

Remarque. Ainsi l'ensemble des solutions de (H) est : $\mathcal{H} = \left\{ \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \lambda e^{A(t)} \end{array} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

Exemple 1. Si a est une constante, alors les solutions de l'équation $y' - ay = 0$ sont les fonctions $y_0 : t \mapsto \lambda e^{at}$.

Démonstration.

▷ **Exercice 1.**

C. Recherche d'une solution particulière

1) Solutions évidentes

Exemple 2. Donner une solution particulière des équations suivantes.

(E_1)	$y' + y = 3$	$y(t) =$	$y' + y = t + 1$	$y(t) =$
	$y' + y = e^t$	$y(t) =$	$y' + y = 3 + e^t$	$y(t) =$
(E_2)	$2t\,y' + y = \sqrt{t}$	$y(t) =$	$2t\,y' + y = t^2$	$y(t) =$
(E_3)	$(\cos t)y' + (\sin t)y = 1$	$y(t) =$		
	$(\cos t)y' + (\sin t)y = 0$	$y(t) =$		
(E_4)	$(2-t)y' + 3y = t^2 + 2t - 8$	$y(t) =$		

▷ **Exercice 2.**

2) Variation de la constante

Méthode. Supposons que l'on a calculé les solutions de l'équation homogène. Elles sont de la forme
$$y(t) = \lambda e^{A(t)}$$
où λ est une constante. On fait varier cette constante, c'est à dire qu'elle devient une fonction de t, *i.e.*, on pose
$$y(t) = \lambda(t)e^{A(t)}$$
où λ est une fonction dérivable. On résout ensuite l'équation (E).

Exemple 3. Résoudre l'équation
$$y' - \frac{1}{t}y = 1$$
sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$.

Remarque. Cette méthode n'aboutit pas toujours, car on ne sait pas toujours intégrer la fonction $\lambda'(t)$. On peut le constater par exemple en essayant de résoudre l'équation :
$$y' - 2ty = 2t^3$$

D. Problème de Cauchy

Théorème. *Si I est un intervalle, a et b sont deux fonctions continues sur I, t_0 un élément de I et y_0 un réel, alors il existe une et une seule solution de l'équation différentielle*
$$y'(t) - a(t)y(t) = b(t)$$
satisfaisant la condition initiale $y(t_0) = y_0$.

Démonstration. Notons (E) l'équation différentielle concernée.

L'équation homogène associée à (E) admet les solutions $y_0(t) = \lambda e^{A(t)}$ où λ est une constante réelle, A étant une primitive de a. La fonction A existe en vertu du théorème fondamental, car a est continue et I est un intervalle.

Par variation de la constante on obtient que $y(t) = \lambda(t)e^{A(t)}$ est solution de l'équation non homogène si et seulement si $\lambda'(t) = b(t)e^{-A(t)}$. La fonction $t \mapsto b(t)e^{-A(t)}$ admet une primitive par le théorème fondamental, car b est continue et I est un intervalle. Notons F cette primitive.

Les solutions de (E) sont alors les fonctions
$$y(t) = (\lambda + F(t))e^{A(t)}$$
où λ est une constante réelle.

La condition initiale $y(t_0) = y_0$ équivaut à $\lambda = y_0\, e^{-A(t_0)} - F(t_0)$, ce réel existe et il est unique, donc l'équation (E) admet une et une seule solution vérifiant $y(t_0) = y_0$. □

Remarque. On obtient la solution théorique
$$y(t) = y_0 + (F(t) - F(t_0))e^{A(t)}$$
mais on ne peut l'expliciter si on ne sait pas calculer les primitives A et F.

▷ **Exercice 3.**

II. Équations différentielles linéaires du second ordre

Dans cette partie on résout les équations de la forme

$$(E) \qquad ay'' + by' + cy = d(t)$$

où a, b, c sont des constantes et d est une fonction, éventuellement complexe. Il s'agit des équations différentielles linéaires à coefficients constants.

On appelle toujours équation homogène associée à (E) l'équation :

$$(H) \qquad ay'' + by' + cy = 0$$

A. Principe de superposition

Proposition. *Soit a, b, c trois constantes, d_1 et d_2 deux fonctions. On considère les équations :*

$$\begin{array}{lrcl} (E_1) & ay'' + by' + cy & = & d_1(t) \\ (E_2) & ay'' + by' + cy & = & d_2(t) \\ (E) & ay'' + by' + cy & = & d_1(t) + d_2(t) \end{array}$$

Si y_1 est une solution de (E_1) et y_2 est une solution de (E_2) alors $y = y_1 + y_2$ est solution de (E).

Démonstration. Similaire à celle pour le premier ordre. □

Proposition. *On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des solutions de l'équation (E), $\mathcal{H}$ l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée (H).*

Soit y_1 une solution de (E). Alors :

$$\mathcal{E} = \{y_0 + y_1 \mid y_0 \in \mathcal{H}\}$$

Démonstration. Identique à celle pour le premier ordre. □

B. Résolution de l'équation homogène

Définition. Soit a, b, c trois réels et

$$(H) \qquad ay'' + by' + cy = 0$$

une équation différentielle homogène. L'équation

$$(C) \qquad a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

d'inconnue $\lambda \in \mathbb{C}$ est appelé équation caractéristique de (H).

Remarque. On suppose dans toute la suite que a est non-nul, c'est-à-dire que les équations sont bien du second ordre et non du premier.

Théorème. *Avec les notations précédentes, en notant Δ le discriminant de (C).*

- *Si $\Delta \neq 0$ alors l'équation (C) admet deux solutions λ_1 et λ_2. Les solutions de (H) sont les fonctions*
$$y(t) = \alpha e^{\lambda_1 t} + \beta e^{\lambda_2 t}$$
où α et β sont deux constantes.
- *Si $\Delta = 0$ alors l'équation (C) admet une unique solution λ_0. Les solutions de (H) sont les fonctions*
$$y(t) = (\alpha t + \beta)e^{\lambda_0 t}$$
où α et β sont deux constantes.

Démonstration. Soit λ_1 et λ_2 les solutions de l'équation caractéristique (C). (Ces solutions sont égales si $\Delta = 0$.)

Soit y une fonction quelconque. On définit la fonction z par : $z(t) = y(t)e^{-\lambda_1 t}$

On calcule alors : $y(t) =$

puis $y'(t) =$

et $y''(t) =$

Ainsi, y est solution de l'équation (H) si et seulement si

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

$\Longleftrightarrow$

Comme λ_1 est solution de l'équation (C) alors : $a\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c =$

Comme $\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{b}{a}$ alors : $2a\lambda_1 + b =$

De plus a est non-nul et l'exponentielle est non-nulle, donc y est solution de (H) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle :

$$(H') \qquad z'' + (\lambda_1 - \lambda_2)z' = 0$$

Il s'agit d'une équation différentielle du premier ordre en z', ses solutions sont les fonctions z' définies pour tout $t \in \mathbb{R}$ par
$$z'(t) = \mu e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}$$
où μ est une constante éventuellement complexe.

Supposons que $\Delta \neq 0$. Dans ce cas $\lambda_1 - \lambda_2$ est non-nul, donc par intégration il existe une constante α telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$:
$$z(t) = \mu \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} + \alpha$$

On pose $\beta = \frac{\mu}{\lambda_2 - \lambda_1}$, ce qui donne :

$$z(t) = \alpha + \beta e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}$$

Comme $y(t) = z(t)e^{\lambda_1 t}$ alors

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad y(t) = \alpha e^{\lambda_1 t} + \beta e^{\lambda_2 t}$$

Ceci démontre le résultat du théorème.

Supposons maintenant que $\Delta = 0$. Dans ce cas $\lambda_1 - \lambda_2$ est nul donc l'équation (H') s'écrit :

$$(H') : \qquad z'' = 0$$

Elle est vérifiée si et seulement si il existe une constante α telle que $z'(t) = \alpha$, ce qui est vérifié si et seulement si il existe une constante β telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$z(t) = \alpha t + \beta$$

Comme $y(t) = z(t)e^{\lambda_0 t}$ alors :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad y(t) = (\alpha t + \beta)e^{\lambda_0 t}$$

Ceci est bien le résultat annoncé par le théorème. $\square$

Théorème. *Supposons que $\Delta < 0$. Alors on peut écrire $\lambda_1 = u + iv$ et $\lambda_2 = u - iv$, où u et v sont des réels. Les solutions de (H) sont alors les fonctions définies par :*

$$y(t) = e^{ut}(A\cos(vt) + B\sin(vt))$$

où A et B sont des constantes réelles.

Démonstration. L'équation (H) est une équation à coefficients réels, donc *a fortiori* une équation à coefficients complexes. D'après le théorème précédent, nous savons que ses solutions complexes sont les fonctions de la forme

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad y(t) = \alpha e^{\lambda_1 t} + \beta e^{\lambda_2 t}$$

où α et β sont des constantes complexes.

Ceci donne :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad y(t) = e^{ut}[(\alpha + \beta)\cos vt + i(\alpha - \beta)\sin vt]$$

On pose

$$\begin{cases} A = \alpha + \beta \\ B = i(\alpha - \beta) \end{cases} \qquad \text{ce qui équivaut à} \qquad \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2}(A - iB) \\ \beta = \frac{1}{2}(A + iB) \end{cases}$$

Ceci donne :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad y(t) = e^{ut}(A\cos vt + B\sin vt)$$

Or la fonction y est réelle : $\forall t \in \mathbb{R} \quad y(t) \in \mathbb{R}$

Pour $t = 0$ et $t = \frac{\pi}{2v}$ on obtient $y(0) = A$ et $y(\frac{\pi}{2v}) = e^{\frac{u\pi}{2v}}B$, donc A et B sont réels.

Le théorème est donc démontré. $\square$

▷ **Exercice 4.**

C. Résolution avec second membre

On résout les équations de la forme

$$(E) : \qquad ay'' + by' + cy = Ke^{\mu t}$$

où a, b, c, K et μ sont des constantes, K et μ éventuellement complexes.

D'après le principe de superposition il suffit de trouver une solution particulière de (E) pour obtenir toutes ses solutions.

Méthode. On cherche une solution de la forme :

- $y(t) = Le^{\mu t}$ si μ n'est pas racine de l'équation caractéristique *i.e.*, $\mu \neq \lambda_1$, $\mu \neq \lambda_2$ ou $\mu \neq \lambda_0$
- $y(t) = Lte^{\mu t}$ si μ est racine simple de l'équation caractéristique *i.e.*, $\Delta \neq 0$ et $\mu = \lambda_1$ ou $\mu = \lambda_2$
- $y(t) = Lt^2e^{\mu t}$ si μ est racine double de l'équation caractéristique *i.e.*, $\Delta = 0$ et $\mu = \lambda_0$.

Exemple 4. Résoudre les équations :

$$\begin{array}{lrcl} (E_1) & y'' - y' - 2y & = & e^t \\ (E_2) & y'' - y' - 2y & = & 2\operatorname{ch} t \\ (E_3) & y'' - y' - 2y & = & 5 - 4t^3 \end{array}$$

Remarque. Lorsque le second membre est polynomial, on cherche une solution polynomiale.

Méthode : second membre trigonométrique. Supposons que μ soit un complexe. Dans ce cas, si y est solution de :

$$ay'' + by' + cy = Ke^{\mu t}$$

alors $\operatorname{Re}(y)$ et $\operatorname{Im}(y)$ sont solutions respectivement de :

$$ay'' + by' + cy = K \operatorname{Re}\left(e^{\mu t}\right) \qquad \text{et} \qquad ay'' + by' + cy = K \operatorname{Im}\left(e^{\mu t}\right)$$

En particulier pour résoudre les équations

$$(E_1) \quad ay'' + by' + cy = K\cos\omega t \qquad \text{et} \qquad (E_2) \quad ay'' + by' + cy = K\sin\omega t$$

il suffit de résoudre l'équation :

$$(E) \qquad ay'' + by' + cy = Ke^{i\omega t}$$

Si y est solution de (E) alors $\operatorname{Re}(y)$ est solution de (E_1) et $\operatorname{Im}(y)$ est solution de (E_2).

Exemple 5. Résolution de l'équation :

$$y'' - y' - 2y = 10\cos t$$

▷ **Exercice 5.**

D. Problème de Cauchy

Théorème. *Soit t_0 un réel, y_0 et z_0 deux éléments de $\mathbb{C}$. Alors l'équation*

$$ay'' + by' + cy = Ke^{\mu t}$$

admet une unique solution telle que $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = z_0$.

Démonstration. Supposons que $\Delta \neq 0$. Alors les solutions sont de la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad y(t) = \alpha e^{\lambda_1 t} + \beta e^{\lambda_2 t} + y_1(t)$$

où α et β sont deux constantes éléments de $\mathbb{C}$, et y_1 est une solution particulière. Ceci donne :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad y'(t) = \alpha\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + \beta\lambda_2 e^{\lambda_2 t} + y_1'(t)$$

Les conditions initiales $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = z_0$ équivalent alors au système

$$\begin{cases} e^{\lambda_1 t_0}\alpha + e^{\lambda_2 t_0}\beta = y_0 - y_1(t_0) \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t_0}\alpha + \lambda_2 e^{\lambda_2 t_0}\beta = z_0 - y_1'(t_0) \end{cases}$$

dont les inconnues sont α et β. Il s'agit d'un système de deux équations à deux inconnues. Son déterminant est :

$$D = e^{(\lambda_1+\lambda_2)t_0}(\lambda_2 - \lambda_1)$$

Comme le discriminant Δ de l'équation caractéristique est supposé non-nul alors les deux racines λ_1 et λ_2 sont distinctes, et donc le déterminant D est non-nul.

Le système admet ainsi une unique solution (α, β), ce qui montre qu'une unique fonction y est solution de l'équation différentielle munie de ses conditions initiales.

Supposons maintenant que $\Delta = 0$. alors les solutions de l'équation différentielle sont de la forme

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad y(t) = (\alpha t + \beta)e^{\lambda_0 t} + y_1(t)$$

où α et β sont deux constantes éléments de $\mathbb{C}$ et y_1 est une solution particulière. Ceci donne :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad y'(t) = (\lambda_0\alpha t + \lambda_0\beta + \alpha)e^{\lambda_0 t} + y_1'(t)$$

Les conditions initiales $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = z_0$ équivalent alors au système

$$\begin{cases} t_0 e^{\lambda_0 t_0}\alpha + e^{\lambda_0 t_0}\beta = y_0 - y_1(t_0) \\ (\lambda_0 t_0 + 1)e^{\lambda_0 t_0}\alpha + \lambda_0 e^{\lambda_0 t_0}\beta = z_0 - y_1'(t_0) \end{cases}$$

Le déterminant de ce système est $D = -e^{2\lambda_0 t_0}$, il est non-nul donc ce système a une unique solution (α, β), *i.e.,* il existe une unique solution y de l'équation différentielle munie de ses conditions initiales. $\square$

▷ **Exercice 6.**